This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

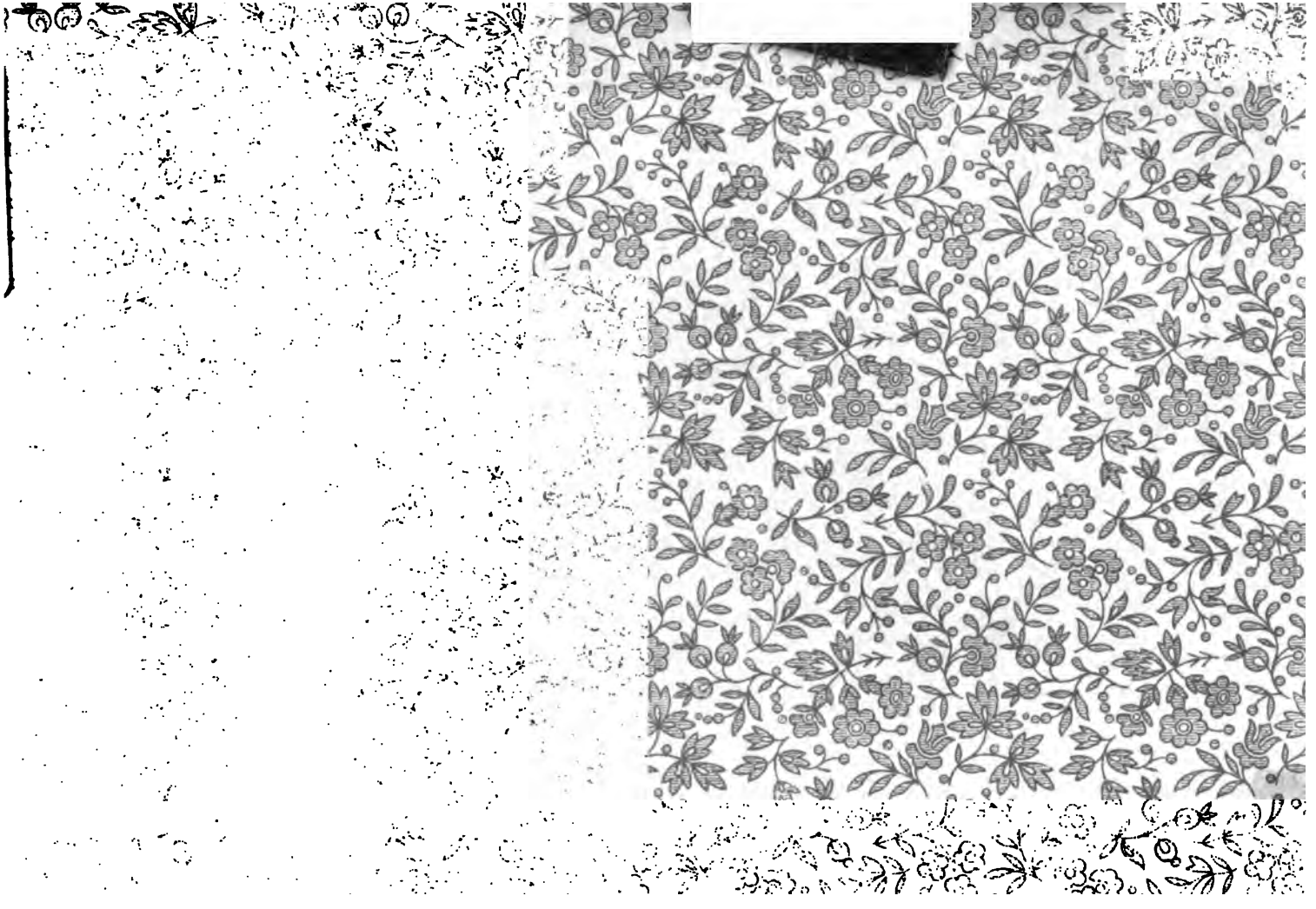
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

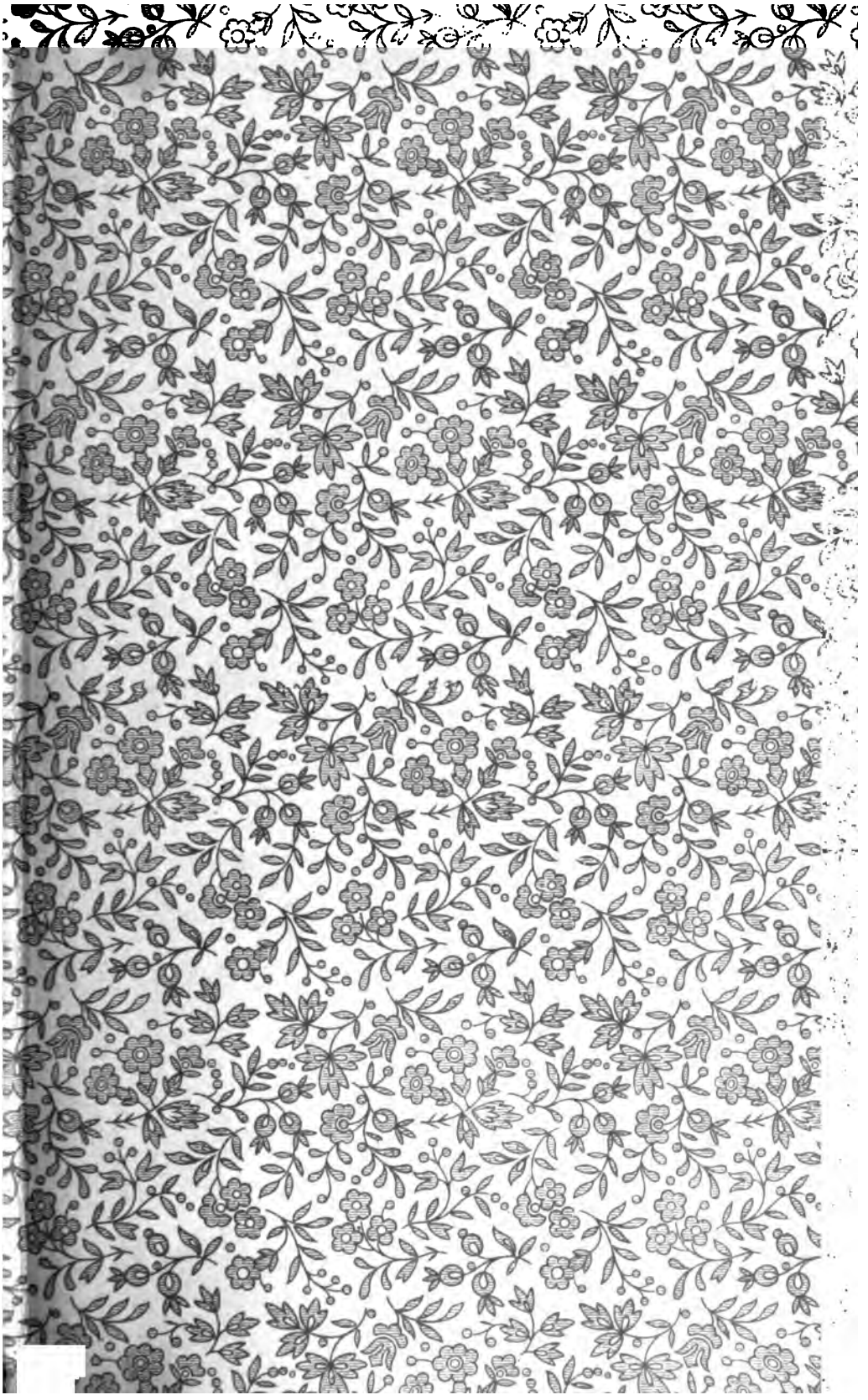
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Stanford University Libraries





MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

43. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1893.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY.
Q 28335

Inhalt des dreiundvierzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Baker, H. F., in Cambridge. On a Geometrical Proof of Jacobi's ϑ-Formula 593

Baur, Ludwig, in Darmstadt. Zur Theorie der Functionen eines cubischen Körpers 505

Bianchi, Luigi, in Pisa. Sopra alcune classi di gruppi di sostituzioni lineari a coefficienti complessi 101

Bôcher, Maxime, in Cambridge (Mass.). Einige Sätze über projective Spiegelung 598

Burkhardt, Heinrich, in Göttingen. Ueber Functionen von Vectorgrössen, welche selbst wieder Vectorgrössen sind. Eine Anwendung invariantentheoretischer Methoden auf eine Frage der mathematischen Physik . . 197

Gall, Frhr. v., in Darmstadt. Ueber die Syzygante $D^2\psi = [5, 5, 2]$ zweier simultanen biquadratischen binären Formen 550

Gordan, P., in Erlangen. Transcendenz von e und π 222

Graf, J. H., in Bern. Ueber die Addition und Subtraction der Argumente bei Bessel'schen Functionen nebst einer Anwendung 136

Hilbert, David, in Königsberg i. Pr. Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π 216

Hölder, Otto, in Tübingen. Die Gruppen der Ordnungen p^3, pq^2, pqr, p^4 301

Hurwitz, A., in Zürich. Beweis der Transcendenz der Zahl e. 220

Junker, Fr., in Urach. Ueber symmetrische Functionen von mehreren Reihen von Veränderlichen 225

Killing, Wilhelm, in Münster i. W. Zur projectiven Geometrie 569

Klein, Felix, in Göttingen. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen 63

Kraser, A., in Strassburg i. E. Die Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen. (Erste Abhandlung) 413

——— ——— (Zweite Abhandlung). 457

Meyer, Franz, in Clausthal. Ueber Discriminanten und Resultanten der Gleichungen für Singularitäten von algebraischen Raumcurven, mit Anwendungen auf Realitätsverhältnisse 286

Mie, Gustav, in Karlsruhe. Beweis der Integrirbarkeit gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme nach Peano. (Mit einer Figurentafel) . . 553

Moore, E. Hastings, in Chicago. Concerning triple systems 271

Seite

Rausenberger, Otto, in Frankfurt a./M. Das Grundproblem der Flächen- und Rauminhaltslehre 601

Reye, Th., in Strassburg i. E. Ueber symbolisches Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften 145

Stäckel, Paul, in Halle. Ueber algebraisch rectificirbare Raumcurven . . 171

Stolz, O., in Innsbruck. Zu den Grundformeln der analytischen Geometrie 591

Weber, H., in Göttingen. Leopold Kronecker 1

———— Ein Beitrag zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen mit einer Anwendung auf Zahlentheorie 185

———— Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie 521

Wölffing, Ernst, in Stuttgart. Ueber die Invarianten algebraischer Functionen von Formen 26

Leopold Kronecker.

Von

H. Weber in Göttingen*).

Seit der letzten Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung hat unsere Wissenschaft einen unersetzlichen Verlust zu beklagen.

Leopold Kronecker ist nicht mehr unter uns, der während der letzten Jahrzehnte eine so beherrschende Stellung im Kreise der deutschen Mathematiker eingenommen hat; dessen Geist so deutlich und eindringlich den Weg gewiesen hat für den Gang der Forschung.

Dass er es nicht verschmähte, als die deutschen Mathematiker vor zwei Jahren zu einer Gesellschaft zusammentraten, in diese Bestrebungen mit einzutreten, sie durch das Ansehen seines Namens zu stützen, das war von vorn herein für die junge Genossenschaft ein günstiges Omen, und an uns ist es daher vor allem, am heutigen Tage seiner und seiner Verdienste in dankbarer Erinnerung zu gedenken.

Der Vorstand unserer Vereinigung hat mir die Ehre erwiesen, mich zu dieser Gedächtnissrede aufzufordern; ich wollte mich dieser Aufgabe nicht entziehen, wenn ich auch nicht ohne Bedenken daran gegangen bin, und ich muss mit der Bitte um Nachsicht beginnen bei dem Versuch, den ich mache, ein Bild des Mannes und seines Wirkens zu entwerfen.

Ich habe nicht als Student zu Kronecker's Füssen gesessen, und wenn ich auch die Schriften des Meisters viel studirt und ihm viel zu verdanken habe, so bin ich doch nicht in alle Seiten seiner so vielseitigen Forschung gleichmässig eingedrungen, und ich zweifle, ob es mir gelingen wird, sie allseitig richtig zu würdigen.

Spät erst bin ich mit ihm persönlich bekannt geworden; aber wer unter uns ist, der nicht gleich mir in dem schönen Hause in der Bellevue-Strasse gastliche Aufnahme gefunden, der nicht in dem reich

*) Abgedruckt aus dem „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 2. Band, 1892.

belebten Familienkreise herzlich willkommen geheissen und Anregung und Arbeitsfreude von da mitgenommen hätte? So steht wohl den meisten unter uns sein Bild noch lebendig vor der Seele, wie er nach eingehenden wissenschaftlichen Gesprächen, reich an Gedanken und Ausblicken, die Unterhaltung auch auf andere Dinge, auf Fragen der Kunst und Literatur oder des öffentlichen Lebens zu lenken und geistvoll zu beleben wusste. —

Durch freundliches Entgegenkommen des ältesten Sohnes und des Bruders des Verstorbenen ist es mir möglich gewesen, mir auch über meine persönliche Erinnerung hinaus ein lebendiges Bild von dem Lebensgang und dem geistigen Wesen des ausserordentlichen Mannes zu machen; möge es mir gelingen, Ihnen am Faden der Erzählung seines Lebens dies Bild zu übermitteln und zugleich eine Würdigung der Hauptmomente seines wissenschaftlichen Schaffens hinein zu verweben.

Leopold Kronecker wurde am 7. December 1823 zu Liegnitz geboren. Sein Vater, der dort ein kaufmännisches Geschäft betrieb und, wie der Briefwechsel mit dem Sohne ergiebt, ein Mann von bedeutender, namentlich auch philosophischer Bildung war, der dem Sohne die sorgfältigste Erziehung gab, liess ihn anfangs durch einen Hauslehrer unterrichten. Später trat der junge Leopold in die Vorschule des Conrectors Werner ein, der auch in der Folge auf dem Gymnasium sein Lehrer war, und nächst Kummer den grössten Einfluss auf seine Entwicklung übte. Namentlich von Werner's Unterricht in der philosophischen Propädeutik und in der christlichen Religionslehre, an dem er — obwohl Jude — theilnahm, sprach er stets mit grosser Begeisterung.

Auf dem Gymnasium zeichnete er sich in allen Fächern durch Fleiss und Talent aus: aber schon hier zeigte sich seine besondere Begabung und Neigung für die Mathematik, in der Kummer sein Lehrer war. Hier schon knüpfte sich die Beziehung an, die so entscheidend auf Kronecker's Entwicklung einwirkte und der Anfang einer bis zum Tode ungetrübten innigen Freundschaft war.

Als Kronecker im Frühjahr 1841 die Universität bezog, hatten die mathematischen Studien in Deutschland unter dem Einfluss der grossen Männer, deren Namen die erste Hälfte des Jahrhunderts zieren, einen neuen Aufschwung genommen. Er hörte in Berlin die Vorlesungen Dirichlet's, Jacobi's, Steiner's und später in Breslau seines alten Lehrers Kummer, der inzwischen als Professor dorthin berufen worden war.

Wenn auch von vorn herein die Mathematik Kronecker's Hauptstudium und nie aus dem Auge verlorenes Ziel bildete, so beschränkte er sich doch keineswegs einseitig auf das Fachstudium; ausser Natur-

wissenschaften trieb er philosophische Studien in den Vorlesungen von Werder und Schelling, und auch in die Hegel'sche Philosophie hat er sich durch das Studium der Werke theilweise eingearbeitet.

Auch die Sprachen des classischen Alterthums, die er auf dem Gymnasium mit grosser Liebe betrieben hatte, hat er auf der Universität nicht aus dem Auge verloren.

Manche für das Leben wichtige Verbindung knüpfte sich in der Studienzeit an. Die Freundschaft mit seinem Schulgenossen Hugo Rühle, dem vor einigen Jahren verstorbenen Bonner Kliniker, brachte ihn mit Medicinern in Verbindung, unter denen ihm L. Traube für's Leben ein treuer Freund blieb.

Wichtig für Kronecker war auch der Verkehr im Hause des Banquiers Alexander Mendelssohn, in dem er durch Dirichlet Zutritt gefunden hatte, wo er unter anderm mit Felix Mendelssohn Bartholdy und mit Alexander von Humboldt Beziehungen anknüpfte.

In schöner, ideal verklärter Erinnerung stand ihm stets die kurze Bonner Studienzeit. Sie fiel noch in die Zeiten, in denen die burschenschaftlichen Bestrebungen an den Universitäten verdächtig und nach oben hin anrüchig und die Farben Schwarz-Roth-Gold streng verpönt waren. Es waren aber nicht die Schlechtesten unter der studirenden Jugend, die den Gedanken der Burschenschaft noch hochhielten und neu zu beleben suchten, und mancher Name vom besten Klang ist darunter zu finden. So war auch Kronecker in Bonn an der Begründung einer burschenschaftlichen Verbindung Friedericiana hervorragend thätig, an der sich Männer wie Geibel, Kinkel, Palleske, der Schillerbiograph und Becker (der sogenannte rothe Becker, später Bürgermeister von Köln) betheiligten. Die neue Verbindung, die bald mehr als ein Zehntel der ganzen Bonner Studentenschaft und darunter die fleissigsten und tüchtigsten umfasste, fand einflussreiche Freunde und Beschützer unter den Professoren, darunter der damalige Rector Naumann, F. Chr. Dahlmann, Nitzsch und E. M. Arndt. Deren Einfluss und Vermittlung war es zu danken, dass eine in Berlin beabsichtigte politische Untersuchung unterblieb.

Im Jahre 1845 wurde Kronecker in Berlin unter Böckh's Decanat mit Auszeichnung zum Doctor der Philosophie promovirt. Diesen Ehrentag mit dem sich anschliessenden Doctorschmaus, an dem auch Böckh theilnahm, rechnete Kronecker stets, nach den Berichten seines Sohnes, zu den schönsten Erinnerungen seines Lebens.

Indem ich aber die Dissertation „de unitatibus complexis" berühre, muss ich mit einigen Worten an die Geschichte der Wissenschaft jener Tage erinnern.

Seit dem Erscheinen von Gauss' zweiter Abhandlung über die

biquadratischen Reste (1832) war der Zahlentheorie eine neue weitgreifende Aufgabe gestellt, der Ausbau der Theorie der complexen, allgemeiner der algebraischen Zahlen. Im fünften Jahrzehnt des Jahrhunderts bewegten diese Fragen die Gemüther besonders lebhaft, und neue Bahnen wurden damals eingeschlagen.

Es war die Zeit, da Jacobi nach seiner italienischen Reise sich in Berlin niedergelassen hatte und sich viel mit zahlentheoretischen Fragen beschäftigte, da Dirichlet, der mit Jacobi in Italien zusammengetroffen war, seine unsterblichen Untersuchungen bekannt machte, und da Kummer seine folgenreichen Arbeiten durch die „Disputatio de numeris complexis, qui unitatis radicibus et numeris realibus constant" eröffnete. Hier trat nun Kronecker in einen Gedankenkreis ein, der seiner Denkweise vorzüglich angemessen war, in dem er später besonders seine Grösse entfalten sollte.

Bereits seine Dissertation befasst sich mit einem Gegenstand, der für die Theorie von fundamentalster Bedeutung ist, und noch im Jahre 1882 hielt sie der gereifte Verfasser mit Recht eines neuen Abdrucks für würdig, der im Journal für Mathematik zugleich mit den Schlussparagraphen, die, obwohl gleichzeitig entstanden, bei der ersten Publication nicht mit abgedruckt waren, erschienen ist.

Es handelt sich um die Theorie der Einheiten in einem algebraischen Zahlkörper; ich bediene mich dieses jetzt allgemein verständlichen und immer mehr gebräuchlichen Ausdrucks, obwohl er von Kronecker abgelehnt wurde. Die Theorie der Einheiten fällt in dem einfachsten Fall der quadratischen Körper im wesentlichen zusammen mit der Theorie der Pell'schen Gleichung, deren Begründung eine der schönsten Leistungen von Lagrange auf dem Gebiete der Zahlentheorie ist. Die Aufgabe ist die, das ganze System der Einheiten, deren es, mit wenigen Ausnahmen besonderer Natur, in jedem Körper unendlich viele giebt, als eine Gruppe, um mich der modernen Terminologie zu bedienen, darzustellen, und zwar als eine unendliche Gruppe vertauschbarer Elemente mit einer endlichen Basis, deren Elemente die fundamentalen Einheiten genannt werden.

Dirichlet hat während seines Aufenthaltes in Italien diese Frage nach Ueberwindung mannigfacher Schwierigkeiten in völliger Allgemeinheit und grossartiger Einfachheit zur Entscheidung gebracht; aber zur Zeit, da Kronecker seine Untersuchungen anstellte, waren die Resultate von Dirichlet noch nicht bekannt, und so war Kronecker's Arbeit, die für Kreistheilungszahlen die Frage erledigte und die bei diesen besonderen Zahlenarten bestehenden Verhältnisse klarlegte, immerhin von grosser Bedeutung. In den späteren Untersuchungen von Kummer über die allgemeinen Classenzahlen spielen diese Einheiten dieselbe Rolle, wie die Lösungen der Pell'schen

Gleichung bei den Classenzahlen der quadratischen Formen, und hierdurch gewannen diese Fragen noch ein erhöhtes Interesse. Es zeigte sich, dass die wirkliche Durchführung im einzelnen, d. h. die wirkliche Bestimmung eines Systems fundamentaler Einheiten, selbst in den einfachsten Fällen zu den unzugänglichsten und dornenvollsten Aufgaben der Mathematik gehört, wodurch wesentlich der Ausbau der Theorie gehemmt würde.

Es traten nun im Leben Kronecker's Verhältnisse ein, durch die er zu Beschäftigungen gezwungen wurde, die von seinen mathematischen Interessen weit ablagen. Aber auch hier bewies er sein Talent und seine Tüchtigkeit. Im Interesse der Familie betrieb er die Landwirthschaft und ordnete mit grosser Gewandtheit das Geschäft eines verstorbenen Oheims, des Vaters seiner späteren Frau, wodurch er der Familie ein nicht unbeträchtliches Vermögen rettete.

Im Jahre 1848 verheirathete er sich mit seiner Cousine Fanny Prausnitzer, einer liebenswürdigen, geistig bedeutenden und tüchtigen Frau, die an den geistigen Interessen des Mannes und an seinen Erfolgen den lebhaftesten Antheil nahm. Dreiundvierzig Jahre, bis zu dem kurz vor seinem eigenen Ende erfolgten Tod der Gattin lebte er mit ihr in glücklichster Ehe, der sechs Kinder entsprossen, von denen noch vier, drei Söhne und eine Tochter, am Leben sind.

Der Erziehung und Berathung seiner Kinder widmete sich Leopold Kronecker im Verein mit seiner Gattin mit grösster Hingebung. Auch seines um siebzehn Jahre jüngeren Bruders Hugo, der jetzt Professor der Physiologie in Bern ist, hat er sich in fast väterlicher Weise angenommen und ihn menschlich und wissenschaftlich gefördert.

Der Lebensabschnitt, in dem Kronecker's Thätigkeit grösstentheils Familienangelegenheiten gewidmet war, in dem er überdies noch durch körperliche Beschwerden gehindert war, ist gekennzeichnet durch eine Lücke in der Reihe der Publicationen.

Zwischen den Jahren 1845 und 1853 finde ich keine Veröffentlichung zu verzeichnen. Dass er aber in dieser Zeit auch wissenschaftlich nicht müssig war, und dass hier vielleicht gerade die Zeit der wissenschaftlichen Entwicklung und Reife zu suchen ist, das beweist der Erfolg, auch wenn wir nicht wüssten, dass er während der ganzen Zeit eine eifrige wissenschaftliche Correspondenz, namentlich mit seinem Freunde Kummer, unterhielt.

Die Arbeit, mit der er zuerst wieder an die Oeffentlichkeit trat, übergab er im Mai 1853, als er auf einer Reise nach Paris in Berlin weilte, an Dirichlet, der sie am 20. Juni desselben Jahres der Berliner Akademie vorlegte, in deren Sitzungsberichten sie erschienen ist.

Es ist die berühmte Abhandlung über die algebraisch auflösbaren Gleichungen, eine Arbeit, die in ihrer Kürze und in ihrem Gedanken-

reichthum eine Fülle von Vorarbeiten voraussetzt, über die uns vielleicht noch die zu hoffenden Publicationen aus dem Nachlass Aufschluss geben werden.

Kronecker knüpft in dieser Arbeit an die nur fragmentarisch überlieferten algebraischen Untersuchungen Abel's an, dessen Sätze er zunächst zu beweisen sucht. Es ist mir zweifelhaft, ob die Arbeiten von Galois Kronecker damals schon bekannt waren. Diese für die Algebra so wichtigen Arbeiten waren zuerst erschienen in den Jahren 1828—30, aber wenig beachtet und bekannt, bis Liouville im Jahre 1846 einen neuen Abdruck in seinem Journal herausgab. Galois wird von Kronecker zuerst in einem Brief an Dirichlet vom 3. März 1856 und in der Arbeit, die am 14. April 1856 von Kummer der Berliner Akademie vorgelegt wurde, erwähnt, so dass die Vermuthung nahe liegt, dass er erst während seines Pariser Aufenthalts im Jahre 1853, wo er mit den bedeutendsten französischen Mathematikern, namentlich mit Hermite und Bertrand, enge Beziehungen anknüpfte, mit Galois' Arbeiten bekannt wurde. Wie dem aber auch sei, Kronecker's Arbeiten haben die Algebra über den Standpunkt hinaus gefördert, auf den sie durch Galois' geniale Schöpfung gehoben war. Galois hatte in der einer Gleichung eigenthümlichen Substitutionsgruppe den Kernpunkt aller tiefer eindringenden algebraischen Untersuchungen erkannt, und hatte damit die Grundfrage der Algebra in einfachster und allgemeinster Weise formulirt; damit ist aber zunächst nur die formale Seite getroffen. Das andere Ziel ist die Erforschung der Eigenschaften der durch die Gleichungen definirten Zahlenarten, die Anwendung der allgemeinen Grundsätze auf besondere Gleichungsarten, die tiefer gehende, jedem besonderen Falle angepasste Hülfsmittel erfordert. Hierzu finden sich bei Galois zwar Ansätze, z. B. in seinen Aussprüchen über die Modulargleichungen der Transformation 5ten, 7ten, 11ten Grades, aber keinerlei weitere Ausführungen. Mehr in dieser Richtung weisen die Sätze von Abel, die sich in einzelnen seiner algebraischen Fragmente finden, und vor allem in den Untersuchungen von Gauss über die Kreistheilung.

Die Frage, die die Algebraiker in erster Linie beschäftigte, die wohl auch den Anstoss zu allen diesen Untersuchungen gegeben hat, war die nach der algebraischen Auflösbarkeit der Gleichungen, d. h. der Reduction auf *reine* Gleichungen. Diese Fragestellung, die von einem höheren Standpunkte betrachtet, etwas Willkürliches hat und später weiter fortgebildet werden musste, war durch die elementare Algebra gegeben, und so bewegen sich auch Kronecker's algebraische Arbeiten zunächst in dieser Richtung. Wie kommt es, dass die höheren Gleichungen in diesem Sinne nicht mehr auflösbar sind, und welche Eigenschaften müssen die besonderen Gleichungen haben, die eine

Auflösung gestatten? Galois hat auf diese Fragen, wenigstens für Gleichungen von Primzahlgraden, eine Antwort aus der Natur der Gruppe abgeleitet, und dadurch ein Mittel gefunden, das wenigstens principiell in jedem besonderen Fall die Entscheidung giebt, wenn es auch meist nicht praktisch durchführbar sein wird. Kronecker löst die Aufgaben vollständiger, indem er einen algebraischen Ausdruck aufstellt, in dem *alle* Wurzeln auflösbarer Gleichungen von gegebenem Grad eines beliebigen Rationalitätsbereichs, und nichts anderes, enthalten sind, einen Ausdruck, der übrigens für Gleichungen fünften Grades schon von Abel ohne Beweis angegeben war.

Durch diesen allgemeineren Ausdruck wird die Aufgabe zunächst zurückgeführt auf die Bestimmung der Wurzeln einer sogenannten Abel'schen Gleichung, und die Sätze, die Kronecker über die letztere Gleichungsart bereits in seiner ersten Abhandlung mit voller Bestimmtheit ausspricht, und die sich dahin einfach zusammenfassen lassen, dass im absoluten Rationalitätsbereich, in dem nur die rationalen Zahlen als bekannt vorausgesetzt sind, alle Abel'schen Gleichungen unter den Kreistheilungsgleichungen enthalten sind, gehören mit den zu ihrem Beweis nöthigen und zu schaffenden Hülfsmitteln und mit dem, was weiter sich daran anschloss, zu den bedeutendsten Leistungen Kronecker's. Hierzu findet sich auch bei Abel noch kein Ansatz, und es war auch erst durch die von Kummer begründete Theorie der Zerlegung der algebraischen Zahlen in ihre Primfactoren möglich, an solche Fragen heranzutreten.

Am Schlusse der Abhandlung eröffnet Kronecker noch eine Perspective auf die Erweiterung dieser Sätze über Abel'sche Gleichungen für den Fall, dass nicht der absolute Rationalitätsbereich, sondern der der Gauss'schen complexen Zahlen zu Grunde gelegt wird, in dem an die Stelle der Kreistheilungszahlen, die aus der Lemniskatentheilung stammenden Zahlen treten. So finden sich auch die Untersuchungen über die singulären Moduln der elliptischen Functionen, die in den späteren Arbeiten Kronecker's eine so wichtige Rolle spielen, hier im Keime schon angedeutet.

Nachdem im Jahre 1855 die geschäftliche Thätigkeit ihren Abschluss gefunden hatte, siedelte Kronecker nach Berlin über, und hier schloss sich der enge Freundschaftsbund, dem die Wissenschaft so viel verdankt, zwischen vier Männern, die zu den ersten Vertretern der Mathematik in Deutschland zählen. Zwar hatte Dirichlet Berlin kurz vorher verlassen; aber statt dessen wurde Kronecker's alter Freund Kummer nach Berlin berufen, und kurze Zeit darauf Weierstrass. Zu diesem Kreis gehörte auch Borchardt, der seit Crelle's Tod die Herausgabe des Journals für Mathematik leitete und im Jahre 1856 in die Akademie der Wissenschaften aufgenommen wurde.

Kronecker, der 1861 in die Akademie eintrat, lebte in Berlin in glücklicher Musse seinen wissenschaftlichen Idealen, und reiche Früchte und innere Befriedigung krönten diese Thätigkeit.

Aus den ersten Jahren des Berliner Aufenthalts besitzen wir den wissenschaftlich und persönlich werthvollen Briefwechsel mit Dirichlet, den Schering in den Göttinger Nachrichten veröffentlicht hat, und dessen Originale die Göttinger Bibliothek aufbewahrt, der uns über Kronecker's Arbeiten in jener Zeit Aufschluss giebt.

Am 17. Mai 1857 schreibt er an Dirichlet: „Ich habe so manche sehr interessante Sachen gefunden, und da ich mich zunächst dadurch so unabhängig fühle, dass mich keine Spur irgend welchen Ehrgeizes quält, da ich vielmehr einzig und allein meine Freude in der Erkenntniss des Wahren habe, so kommt es mir wenig darauf an, wozu ich gerade meine Zeit verwende, wenn ich sie nur überhaupt gut benutze."

Und über die divinatorische Art seines Schaffens giebt ein Brief vom 26. Juni 1856 Aufschluss.

„Aber ich bin vielfach in der hoffnungsvollen Fernsicht dem, was ich beweisen kann, vorausgeeilt, und habe dabei Anschauungen von der Natur der Gleichungen gewonnen, die, wenn sie sich bewähren, ein ganz neues und erhebliches Interesse gewähren dürften. Bei der gänzlichen Neuheit des Feldes aber, auf welchem ich jetzt arbeite, und bei der kaum zu bewältigenden Complicirtheit, glaube ich, dass ich jahrelanger Arbeit bedürfen werde, ehe ich zu stricten Resultaten komme."

Kronecker hatte schon früh herausgefühlt, und die Abhandlung aus dem Jahre 1853 enthält darüber bereits eine Andeutung, dass nächst den Gleichungen, die wir jetzt in etwas weiterem Sinne, als Kronecker diesen Ausdruck ursprünglich brauchte, Abel'sche nennen, und die, wie Kronecker zuerst erkannt hat, alle durch die Einheitswurzeln gelöst werden, die aus der sogenannten complexen Multiplication der elliptischen Functionen stammenden Gleichungen von fundamentaler Bedeutung sind, dass gewissermassen die nächst höhere Zahlenart durch sie definirt wird. Diesen Gleichungen wandte sich daher im natürlichen Fortschritt seiner Untersuchungen sein hauptsächlichstes Interesse zu. Die Fortschritte, die wir Kronecker auf diesem Gebiete verdanken, gehören zu den werthvollsten Bereicherungen der Algebra.

Abel hatte in seinen Untersuchungen über elliptische Functionen die Frage gestellt, unter welchen Bedingungen eine algebraische Multiplication der elliptischen Functionen mit einem andern als ganzzahligen Multiplicator möglich sei; es ergiebt sich leicht, dass die Bedingung dafür die ist, dass die Perioden einer homogenen Gleichung zweiten Grades genügen, so dass das Periodenverhältniss durch die Quadratwurzel aus einer negativen ganzen Zahl ausgedrückt ist. Abel hatte

auch erkannt, dass für den Modul der elliptischen Functionen hieraus eine algebraische Gleichung resultirt; und hat später ohne Beweis ausgesprochen, dass diese Gleichung zu den algebraisch lösbaren gehöre.

Zu diesen Sätzen hat Kronecker zunächst die Beweise gesucht, und wurde dadurch zu den merkwürdigsten Eigenschaften und Beziehungen dieser Gleichungen und der durch sie definirten algebraischen Zahlen geführt.

Der Kernpunkt dieser Ergebnisse ist die enge Beziehung zur Theorie der quadratischen Formen, eben jener Formen, deren Wurzeln die singulären Periodenverhältnisse sind. Es zeigt sich, dass zu jeder negativen Determinante eine algebraische Gleichung mit rationalen Coëfficienten gehört, deren Wurzeln die von Kronecker so genannten singulären Moduln sind, so dass jeder Wurzel dieser Gleichung eine Classe äquivalenter quadratischer Formen entspricht, und dass sonach der Grad dieser Gleichung der Classenzahl für die betreffende Determinante gleich ist. Die Gleichung ist irreducibel im absoluten Rationalitätsbereich, zerfällt aber in Factoren, wenn die Quadratwurzeln aus den in der Determinante aufgehenden Primzahlen adjungirt werden, und zwar entspricht jedem dieser Factoren ein Geschlecht von Formenclassen.

Die Gleichung ist, von einigen besonderen Fällen abgesehen, im absoluten Rationalitätsbereich keine Abel'sche; sie wird es erst durch Adjunction der Quadratwurzel aus der Determinante; dann aber entspricht ihre Gruppe genau der von Gauss entdeckten Gruppe der Composition der Classen quadratischer Formen; die Gleichung ist als Abel'sche algebraisch lösbar.

Dass diese Zahlen für die Abel'schen Gleichungen im quadratischen Rationalitätsbereich mit negativer Discriminante dieselbe allgemeine Rolle spielen, wie die Einheitswurzeln für den absoluten Rationalitätsbereich, d. h. dass die Wurzeln aller Gleichungen, die nach Adjunction einer imaginären Quadratwurzel Abel'sche Gleichungen sind, durch diese Zahlen rational darstellbar sind, hat Kronecker mehrfach ausgesprochen. Den Beweis dafür und ebenso die Uebertragung auf positive Discriminanten, mit der sich Kronecker gleichfalls beschäftigt hat, suchen wir noch vergeblich.

Indem ich so in den grossen Zügen die Hauptmomente der Theorie der complexen Multiplication aufführe, erkennt man leicht, wie sie vollständig parallel läuft mit der Theorie der quadratischen Formen von negativer Determinante, so dass diese auch aus der complexen Multiplication abgeleitet und bewiesen werden kann, und so zwischen zwei auf ganz verschiedenem Boden gewachsenen Disciplinen ein ebenso unerwarteter als merkwürdiger und fruchtbarer Zusammenhang hergestellt ist.

Noch mannigfache Resultate und Erscheinungen der Algebra und Zahlentheorie haben diese Untersuchungen zu Tage gebracht; ich erwähne die merkwürdige Beziehung zu der Pell'schen Gleichung, zum Beweis des Satzes, dass eine primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darstellen kann, die merkwürdigen Relationen zwischen den Classenzahlen quadratischer Formen verschiedener Determinanten und anderes, was sich hier nicht gut ausführen lässt. Die Anfänge dieser Arbeiten fallen, wie der erwähnte Briefwechsel mit Dirichlet zeigt, schon in die fünfziger Jahre, und vielleicht noch früher. Es zieht sich aber das Interesse an dem Gegenstand durch das ganze wissenschaftliche Leben Kronecker's, und noch in den Abhandlungen „Zur Theorie der elliptischen Functionen", die seit dem Jahre 1883 bis kurz vor des Verfassers Tod in längerer Reihe in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie erschienen sind, werden diese Fragen berührt.

Daneben geht noch eine andere Art der Anwendung der elliptischen Functionen auf die Zahlentheorie, die sich von der Theorie der singulären Moduln wesentlich dadurch unterscheidet, dass der Modul variabel bleibt; die Entdeckung dieser Beziehung geht auf Dirichlet zurück, der sie in seiner berühmten Abhandlung „Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres" zuerst berührt und die in dem erwähnten Briefwechsel schon Gegenstand der Besprechung ist; diese Untersuchungen, die auch auf das Gebiet der Thetafunctionen zweier Veränderlicher hinüberspielen, und auch für dieses bemerkenswerthe Resultate und Beziehungen zu elliptischen Thetafunctionen ergaben, werden von Kronecker in seinen letzten Publicationen in sehr merkwürdiger Weise verallgemeinert. Es ist mir aber hier nicht möglich, von dem Gedankeninhalt dieser Umformungen, die wohl noch einer weiteren Verarbeitung würdig wären, in kurzen Worten eine Vorstellung zu geben.

Um eine formale Seite der Kronecker'schen Forschungen zu erwähnen, die in seinen späteren Jahren mehr und mehr von ihm betont wird, will ich auf sein Bestreben hinweisen, invariante Eigenschaften möglichst, wie er sich ausdrückt, in Evidenz treten zu lassen, d. h. die Formeln in eine Gestalt zu bringen, in der ihre invarianten Eigenschaften unmittelbar in die Augen springen. Als Beispiel will ich die Formeln erwähnen, die ihn noch in seiner letzten Zeit beschäftigt haben, mittels deren er die elliptischen Functionen durch Fourier'sche Doppelreihen darstellt, die eine grosse Eleganz und Einfachheit der Form haben, und die die doppelte Periodicität unmittelbar erkennen lassen; freilich auf Kosten einer andern Eigenschaft, die darin verdeckt ist, nämlich Functionen complexen Arguments zu sein.

Kronecker hätte seine algebraischen Untersuchungen nicht mit dem glänzenden Erfolge führen können, wenn er nicht über ein Hülfsmittel verfügt hätte, auf das ich jetzt Ihre Aufmerksamkeit lenken möchte.

Durch die Einführung der complexen Zahlen hatte Gauss der Zahlentheorie ein grosses neues Forschungsgebiet eröffnet. Zunächst veranlasst durch die Untersuchung der biquadratischen Reste hatte Gauss einen Zahlkörper betrachtet, der ausser den rationalen Zahlen, vierte Einheitswurzeln enthält. Auf diesen Zahlkörpern lässt sich die rationale Zahlentheorie in allen wesentlichen Punkten, namentlich der Satz über Theilbarkeit und Zerlegung in Primfactoren, ohne Schwierigkeit übertragen, und dasselbe gelang auch bei anderen Zahlkörpern, z. B. dem, der aus cubischen Einheitswurzeln abgeleitet ist. Wie aber diese Betrachtungen weiter verfolgt und auf Einheitswurzeln höherer Grade übertragen wurden, trat eine Erscheinung zu Tage, die zunächst ein unüberwindliches Hinderniss eines weiteren Fortschritts schien.

Während nämlich im rationalen Zahlkörper die Primzahlen die doppelte Eigenschaft haben, nicht weiter in Factoren zerlegbar zu sein, und ein Product mehrerer Factoren nur dann zu theilen, wenn sie wenigstens einen der Factoren des Products theilen, woraus dann folgt, dass eine Zahl nur auf eine Art in Primfactoren zerlegbar ist, treten in den höheren Zahlkörpern Zahlen auf, die zwar nicht weiter zerlegbar sind, aber doch ein Product theilen können, ohne einen seiner Factoren zu theilen, so dass eine Zahl auf mehr als eine Art in unzerlegbare Factoren zerfällt werden kann. Diese unzerlegbaren Factoren haben also noch nicht den Charakter wahrer Primfactoren. Kummer hat für die Kreistheilungszahlen diese Schwierigkeit überwunden durch die Schöpfung der idealen Factoren, indem er definitionsweise sagt, eine Zahl ist durch einen gewissen idealen Factor (der keine selbständige Existenz hat) theilbar, wenn sie einer gewissen Congruenzbedingung genügt.

Diese Methode war aber nur den Kreistheilungszahlen angepasst und bedurfte der Verallgemeinerung auf beliebige Zahlkörper. Es ist klar, dass eine allgemeine Zahlentheorie, die zugleich die Algebra umfasst, erst dann sich entwickeln kann, wenn diese Schwierigkeit überwunden ist, und dass sie nur dadurch überwunden werden kann, dass man den Begriff der Theilbarkeit durch einen anderen ersetzt, aus dem die gewöhnliche Theilbarkeit als specieller Fall abgeleitet werden kann.

Auch in der Theorie der algebraischen Functionen einer oder mehrerer Veränderlichen herrschen analoge Gesetze wie in der Theorie der Zahlen, und eine allgemeine Theorie der Theilbarkeit muss auch diese umfassen.

Eine Verallgemeinerung eines Begriffes ist aber nach verschiedenen Seiten hin denkbar und möglich. So sind auch auf verschiedenen Wegen Kronecker und Dedekind zu einer gleich vollständigen Lösung dieser Aufgabe gelangt, Dedekind indem er nicht einzelne Zahlen, sondern Systeme von Zahlen betrachtet, die als Specialfall das System aller Multipla einer festen Zahl enthalten, die er *Ideale* nennt. ein Name, der aber nur historischen Ursprung hat, und zu Ehren der Kummer'schen Schöpfung gebildet ist. Nachdem Multiplication und Theilbarkeit dieser Ideale definirt ist, wird bewiesen, dass jedes Ideal auf eine einzige Weise in Primfactoren, d. h. Primideale, zerlegbar ist, in völliger Uebereinstimmung mit den Gesetzen der Theilbarkeit bei den rationalen Zahlen.

Kronecker hat seine Theorie, von der er längst Gebrauch gemacht hatte, im Zusammenhang veröffentlicht in der Festschrift, die er dem alten Freund Kummer zum fünfzigjährigen Doctorjubiläum am 10. Sept. 1881 mit warmen Worten der Dankbarkeit und Anhänglichkeit überreichte, die zugleich auch im Journal für Mathematik abgedruckt wurde.

Es ist unmöglich, in der Kürze und ohne Anwendung mathematischer Formeln einen Ueberblick über den Inhalt der gedankenreichen und schwer geschriebenen Festschrift zu geben. Vielleicht aber gelingt es mir, von dem Grundgedanken wenigstens eine ungefähre Vorstellung zu geben, wenn ich an ein Beispiel aus der Functionentheorie anknüpfe, wo die Verhältnisse durch die Benutzung der Riemann'schen Mittel anschaulicher werden und auch ohnehin wohl der Mehrzahl unter Ihnen vertrauter sind, als die analogen Begriffe der Zahlentheorie.

Man denke sich algebraische Functionen einer Veränderlichen in einer Riemann'schen Fläche dargestellt; das System aller dieser Functionen bildet einen Körper oder nach Kronecker's Terminologie einen Gattungsbereich. Die ganzen Functionen darunter sind die, die im Endlichen endlich bleiben. Das System aller ganzen Functionen, die in einem festen Punkt oder in einer festen Punktgruppe verschwinden, bildet nach Dedekind's Bezeichnung ein Ideal, und die Multiplication besteht in der Zusammenfassung der Nullpunkte der Factoren zu einer neuen Punktgruppe.

Kronecker bildet ganze rationale Formen von beliebigen Hülfsvariablen, die an sich mit der Frage nichts zu thun haben, deren Coëfficienten ganze Functionen des betrachteten Körpers sind. Wenn diese Coëfficienten alle in einem und demselben Punkt verschwinden, so werden die Coëfficienten der Norm ganze rationale Functionen der unabhängigen Variablen sein, die einen gemeinsamen Linearfactor haben. Haben die Coëfficienten der Norm keinen gemeinsamen Theiler,

so heisst die Form eine *primitive*. Solche Formen spielen die Rolle von Einheiten und könnten daher wohl auch Einheitsformen genannt werden; und nun gelingt es, jede Form und folglich auch jede Function des Körpers in Primfactoren wirklich zu zerlegen, wenn man in den Factoren auch gebrochene Formen zulässt, die im Nenner Einheitsformen enthalten. Diese Zerlegung ist eine völlig bestimmte, abgesehen von Einheitsformen, die im Zähler und Nenner in verschiedener Weise auftreten können.

Ganz dasselbe gilt auch, wenn die Coefficienten der Formen nicht einem Functionenkörper, sondern einem Zahlenkörper angehören, und so ist eine ausreichende Grundlage für die Zahlentheorie aller dieser Körper gewonnen.

Hiermit ist nun freilich erst der Ausgangspunkt für die Theorie gekennzeichnet; alle die tiefer greifenden Untersuchungen, die wir in der Schrift noch finden, zumal die auf die Discriminante des Körpers und die Eigenschaften der in ihr enthaltenen Factoren sich beziehen, können hier nicht berührt werden; es sei nur noch erwähnt, dass die Theorien von Dedekind und Kronecker trotz der Verschiedenheit der Ausgangspunkte in den Resultaten übereinstimmen; genauer gesagt, dass die Dedekind'schen Primideale in wechselseitig eindeutiger Weise auf die Kronecker'schen Primfactoren bezogen werden können. Dies spricht für die innere Wahrheit und Nothwendigkeit beider Theorien.

Es kann nicht die Aufgabe dieser Gedächtnissrede sein, alle die schönen und werthvollen Untersuchungen zu besprechen oder auch nur zu erwähnen, die das reiche wissenschaftliche Leben Kronecker's ausmachen. Das Verzeichniss der Abhandlungen Kronecker's enthält nicht weniger als 144 Nummern; ich habe mich in meiner sehr unvollständigen Schilderung an das gehalten, was mir das allgemeinste, principiell wichtigste erschien, und wovon ich zugleich hoffen konnte, einem grösseren Kreis eine ungefähre Anschauung zu übermitteln. Auch sind mir selbst nicht alle Seiten von Kronecker's vielumfassender Thätigkeit gleichmässig vertraut und bekannt. Lassen Sie mich aber noch einen Gegenstand wenigstens kurz berühren, der einen bemerkenswerthen Fortschritt in Kronecker's algebraischen Anschauungen kennzeichnet, und der zugleich geeignet ist, in weiteren Kreisen Interesse zu erwecken, das sind seine Untersuchungen über die Gleichungen fünften Grades und ihren Zusammenhang mit der Transformationstheorie der elliptischen Functionen.

Es war wohl Hermite, der zuerst den Gedanken aussprach, dass, wenn man nach Galois die Modulargleichung sechsten Grades, die bei der Transformation fünften Grades der elliptischen Functionen auftritt, auf den fünften Grad reducirt, man mit Hülfe von Gleichungen, die den vierten Grad nicht übersteigen, eine Uebereinstimmung mit

der *allgemeinen* Gleichung fünften Grades herstellen kann, und dass man daraus eine Art Auflösung der Gleichung fünften Grades gewinnt, ähnlich wie man seit lange gewohnt ist, die Dreitheilung des Winkels zur Auflösung einer Gleichung dritten Grades zu benutzen. In einem von Hermite veröffentlichten berühmt gewordenen Brief hat nun Kronecker diesen Gegenstand von ganz anderer Seite beleuchtet und auf seinen algebraischen Kern zurückgeführt.

Bei Kronecker tritt zunächst die Zurückführung auf die Transformationsgleichung der elliptischen Functionen zurück hinter der allgemeinen Frage, wie man die Gleichung fünften Grades von einer möglichst einfachen Normalgleichung abhängig machen kann. Als nächstliegendes Ziel stellt sich dar die Zurückführung auf eine Gleichung, die nur von *einem* Parameter abhängig ist, wie es in der That bei den aus der Transformation der elliptischen Functionen stammenden Gleichungen, die nur von dem Modul der elliptischen Functionen abhängig sind, zutrifft. Zunächst entspricht dieser Forderung bereits die Jerrard'sche Form der Gleichungen fünften Grades, deren sich Hermite bedient hat; aber auch gewisse Resolventen sechsten Grades, die sich, wie Kronecker gezeigt hat, auf mannigfache Weise mit den Modulargleichungen sechsten Grades in Einklang bringen lassen.

Aber Kronecker stellt sich noch eine weitere Aufgabe. Er versucht, das Ziel zu erreichen nur durch Benutzung solcher Irrationalitäten, die sich rational durch die Wurzeln der zu lösenden Gleichung ausdrücken lassen, die er als die einfachsten, der Gleichung natürlichsten betrachtet. Dieser Forderung legte er ein grosses Gewicht bei. Da aber der Versuch, ihr zu genügen, nicht gelang, so sprach er den Satz aus, dass die Forderung überhaupt unerfüllbar sei, dass also durch natürliche Irrationalitäten die Gleichung fünften Grades nicht in eine nur von *einem* Parameter abhängige Gleichung transformirbar sei. Einen Beweis für diesen Satz hat er nicht publicirt; dass aber der Satz richtig ist, haben spätere Untersuchungen dargethan.

Eine wesentliche Lücke würde aber in dem Bilde des *Mathematikers* Kronecker bleiben, wenn ich seine Stellung zu den fundamentalen, philosophischen Fragen der Mathematik mit Stillschweigen übergehen wollte. Es ist ein Standpunkt, der besonders in seinen späteren Jahren hervortrat, vielleicht mehr noch im persönlichen Verkehr als in der Oeffentlichkeit; aber auch öffentlich hat er seine Anschauungen nicht verleugnet und z. B. in der Festschrift zu Zeller's Jubiläum scharf hervorgekehrt.

In Bezug auf Strenge der Begriffe stellt er die höchsten Anforderungen und sucht alles, was Bürgerrecht in der Mathematik haben soll, in die krystallklare eckige Form der Zahlentheorie zu

zwängen. Manche von Ihnen werden sich des Ausspruchs erinnern, den er in einem Vortrag bei der Berliner Naturforscher-Versammlung im Jahre 1886 that: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk".

So war ihm alles, was sich nicht eines arithmetischen Ursprungs unmittelbar bewusst war, unsympathisch, und sein Streben ging dahin, nicht nur in der Algebra, sondern auch in der Functionentheorie die arithmetische Abstammung deutlich hervortreten zu lassen.

Aber freilich hat er auch an jenem „Menschenwerk" manches bekämpft und verworfen, was sich seit der Zeit des alten Euklid als gut und brauchbar und als logisch richtig erwiesen hat, wenn er z. B. eine Definition nur dann für zulässig erklärt, wenn sie in jedem Falle durch eine endliche Anzahl von Schlüssen erprobt werden kann. Er bricht damit den Stab nicht nur über alle die neueren Versuche, zu einer logisch verständlichen Auffassung der Irrationalzahlen zu gelangen, sondern auch über Euklid's darauf bezügliche Definitionen.

Die Consequenz dieser Auffassungsweise war, dass Kronecker der geometrischen Anschauung in mathematischen Dingen nur eine bedingte Berechtigung einräumte; und in der That findet man in seinen Arbeiten von diesem Hülfsmittel nur sehr beschränkten Gebrauch gemacht. Dass er es aber, wo er es am Platze hielt, mit Meisterschaft handhabte, beweisen seine Arbeiten über die Charakteristiken und die Sturm'schen Reihen, auf die hier näher einzugehen ich mir versagen muss.

Dass Kronecker's wissenschaftliche Arbeit eine ausgezeichnet productive war, der es nur auf das Entdecken und Erkennen ankam, hatte den Erfolg, dass viele seiner wichtigsten Schöpfungen lange Zeit nicht ausführlich und mit Beweisen publicirt waren; erst in den letzten Jahren hat er angefangen, manche seiner Untersuchungen im Zusammenhang darzustellen, und über manches dürfen wir vielleicht noch aus dem Nachlass Aufschluss hoffen.

Um so wichtiger war es, dass Kronecker von dem ihm als Mitglied der Akademie zustehenden Recht, an der Universität Vorlesungen zu halten, regelmässig und umfassend Gebrauch machte. Seine Vorlesungen waren ausschliesslich den Gegenständen gewidmet, denen er sein eigenes wissenschaftliches Interesse zugewandt hatte, und so waren seine Forschungsresultate dem Kreise seiner vertrauteren Schüler schon früh bekannt, und seine Vorlesungen gehörten, wenn auch nur den fortgeschrittenen und wissenschaftlich interessirten Schülern verständlich, zu dem Werthvollsten und Eigenartigsten, was die Berliner Universität dem Mathematiker bot.

Gleichwohl hat Kronecker nicht in dem Masse eine mathe-

matische Schule begründet, wie wir das von anderen hervorragenden Lehrern wissen.

Er selbst spricht sich hierüber in dem schönen und merkwürdigen Briefe aus, den er einige Monate vor seinem Tode an Georg Cantor in Halle gerichtet hat, und der in dem vorigen Jahresbericht unserer Vereinigung abgedruckt ist.

„Ich mag auch bei uns nicht den Ausdruck „Schüler" gern; wir wollen und brauchen keine Schule, sondern wir gehen nur in den Wegen fort, die uns ein Lehrer oder Vorgänger geebnet und gewiesen hat, wenn wir meinen, auf diesem Wege weitere Ziele erreichen zu können. Wir wollen und brauchen keine Schule, weil in unserer absolut klaren Wissenschaft jede neue Entdeckung die bisherige Schulweisheit werthlos machen kann. Das hat uns ja die Geschichte unserer Wissenschaft oft genug gezeigt."

Eine Berufung nach Göttingen, die im Jahre 1868 an ihn ergangen war, lehnte er ab, da er seine Thätigkeit an der Berliner Universität im Kreise der wissenschaftlichen Freunde und Collegen aus der Akademie höher schätzte.

Als aber Kummer im Jahre 1883 wegen hohen Alters von der Lehrthätigkeit zurücktrat, übernahm Kronecker eine ordentliche Professur an der Berliner Universität. Den dadurch vermehrten Lehrpflichten in Vorlesungen und Seminar kam er mit grösstem Eifer nach. Seine den verschiedensten Nationalitäten angehörigen Schüler, denen er allen ein warmes persönliches Interesse entgegenbrachte, hingen mit grösster Verehrung und Dankbarkeit an ihm. Manche sind darunter, die seine Ideen selbständig weiter gebildet haben. Die ihm nach Borchardt's Tod zugefallene Redaction des Crelle'schen Journals leitete er seit dem Jahre 1881 mit Umsicht und Gewissenhaftigkeit.

Lassen sie mich schweigen von den Ehren und Auszeichnungen, die ihm ungesucht in reichem Masse von Regierungen und gelehrten Gesellschaften zu Theil wurden; aber ich will dem Bilde noch einige Züge hinzufügen, die geeignet sind, den ausserordentlichen Mann im Kreise seiner Freunde und Collegen und im öffentlichen Leben zu kennzeichnen, Züge, die ich den Mittheilungen des Sohnes des Verstorbenen verdanke.

Vermöge seiner grossen Erfahrung und Tüchtigkeit in Dingen des praktischen Lebens, seiner Gewandtheit im klaren und formvollendeten schriftlichen und mündlichen Ausdruck hat er sich auch den geschäftlichen Angelegenheiten, die seine Stellung als Mitglied der Akademie und der Facultät mit sich brachten, mit grossem Eifer und Erfolg gewidmet. Die mustergültige Ordnung der Angelegenheiten der *akademischen Druckerei*, die Neuredaction der *Akademie-Statuten* sind vorzugsweise sein Werk. Auch fungirte er erfolgreich als Mitglied des

wissenschaftlichen Beiraths des *geodätischen Instituts* bis zu dem Zeitpunkt, wo dieser Beirath durch ministerielle Verfügung aufgelöst wurde.

In vielen wichtigen Fragen, die das Wohl der Universität und der Akademie betrafen, war sein Rath von entscheidendem Einfluss, und stets war er bereit, durch seine Erfahrung und practische Tüchtigkeit nicht nur dem Gemeinwohl, sondern auch seinen Freunden in wissenschaftlichen wie in persönlichen Angelegenheiten zu rathen und zu helfen.

Sein Haus war eine Stätte heiterer Geselligkeit. Er liebte es, seine Freunde und deren Familien in kleinerem und grösserem Kreise um sich zu versammeln. Er hatte es besonders gern, wenn diese Abende durch Musik verschönt wurden; diese war ihm überhaupt die liebste der Künste; er hat das Clavierspiel und in seiner Jugend auch den Gesang eifrigst gepflegt, sich auch in früheren Zeiten in eigenen Compositionen versucht.

Tieferes Interesse und Verständniss brachte er aber auch den bildenden Künsten entgegen. Seine Ferienreisen, die er alljährlich innerhalb Deutschlands, nach Oesterreich, der Schweiz und Italien, nach Frankreich, Holland und Belgien, nach Grossbritannien und Skandinavien unternahm, galten neben der körperlichen und geistigen Erholung und der Anknüpfung und Erhaltung der Verbindung mit wissenschaftlichen Freunden, dem Genuss der schönen Natur und dem Studium der Kunstwerke dieser Länder.

Für das classische Alterthum und seine Cultur hatte er stets eine grosse Vorliebe, und war in dem Meinungsstreit der letzten Jahre ein Gegner der Realschulbildung. Sein eigenes Interesse an der griechischen Sprache und Litteratur bethätigte er als eifriges Mitglied der „Graeca", einer geselligen Vereinigung, die sich mit der Uebersetzung und Erläuterung griechischer Classiker beschäftigte, zu der ausser den bedeutendsten Fachmännern der Berliner Universität und Akademie auch aus anderen Lebenskreisen gebildete und hochstehende Männer zählten.

Auch in der Politik ist Kronecker einmal hervorgetreten, als im Jahre 1869 der Finanz-Minister Camphausen den Gesetzentwurf über die Consolidation der Preussischen Staatsschuld einbrachte. Kronecker bekämpfte in einer Broschüre, der ausführliche Tabellen und Berechnungen beigegeben sind, diesen Gesetzentwurf, den er für nachtheilig hielt, freilich ohne Erfolg.

In seinen politischen Anschauungen war Kronecker 1848 und in den folgenden Jahren liberal, hat sich aber später gewendet. Er gehörte zu den ersten seines Kreises, die Bismarck's deutschen Beruf erkannten und blieb bis zu seinem Lebensende ein enthusiastischer Bewunderer des ersten deutschen Kanzlers. Den glücklichen Ausgang

des Krieges 1870/71 sah er voraus. Am 30. Juli 1870, also *vor* der Schlacht bei Weissenburg, schreibt er an seine Frau, nachdem er die materiellen und sittlichen Grundlagen der deutschen Rüstung geschildert: „Sonst erhob eine feste Macht Frankreichs oder sein Bewusstsein der grossen Errungenschaften seiner Revolution den Muth seiner Armeen, selbst wenn sie einen Misserfolg hatten, — heut ist alles morsch und mürbe, und nach kurzem Donner der Kriegsgeschütze wird jenes Gebäude des zweiten Kaiserreichs zerfallen, dessen Glanz doch nur der eines Theaterpompes ist und dessen faule Grundlage nur auf der Vernichtung alles Sittlichen beruht."

Seine religiöse Weltanschauung entsprach von der Zeit an, da er in den oberen Classen des Gymnasiums am christlichen Religionsunterricht theilnahm, den Lehren des evangelischen Christenthums, in denen er seine Kinder erziehen liess. Er selbst zögerte aus Gewissensbedenken mit seinem Uebertritt zum Christenthum bis in sein letztes Lebensjahr.

Kronecker war, obwohl von sehr kleiner Statur, bis in seine letzte Lebenszeit körperlich rüstig, in früherer Zeit ein guter Turner und Schwimmer, später ein tüchtiger Bergsteiger. Seit dem Tode seiner Frau (23. Aug. 1891) war er körperlich und seelisch gebrochen, wenn auch der Geist noch in der gewohnten Wissenschaft fortarbeitete. Mitte December befiel ihn eine Bronchitis, die die gesunkenen Kräfte rasch aufzehrte und am 29. Dez. 1891 seinem reichen Leben ein Ende machte. Sein Name aber wird in der Wissenschaft fortleben und unter den besten mit Ehren genannt werden.

Schriften von L. Kronecker*).

1845.

1. Beweis, dass für jede Primzahl p die Gleichung $1+x+x^2+\cdots+x^{p-1}=0$ irreductibel ist. J. für Math. XXIX. 280.
2. De unitatibus complexis. Dissertatio inauguralis. §§ 1—16. Berolini. 35 S.

1853.

3. Ueber die algebraisch auflösbaren Gleichungen. Monatsber. 365—374. Uebersetzt in Serret, Cours d'Algèbre supérieure, I. Aufl. Note XIII. 560—569: Sur les équations résolubles algébriquement (1854), in den späteren Auflagen ebenfalls abgedruckt.

1854.

4. Mémoire sur les facteurs irréductibles de l'expression (x^n-1). Journ. de Math. (1) XIX. 193—208.

*) Nach dem durch K. Hensel vervollständigten Kataloge Kronecker's chronologisch geordnet von E. Lampe.

5. Note sur les fonctions semblables des racines d'une équation. Journ. de Math. (I) XIX. 279—280.

1856.

6. Sur quelques fonctions symétriques et sur les nombres de Bernoulli. Journ. de Math. (2) I. 385—391.
7. Sur une formule de Gauss. Journ. de Math. (2) I. 392—395.
8. Démonstration d'un théorème de M. Kummer. Journ. de Math. (2) I. 396—398.
9. Démonstration de l'irréductibilité de l'équation $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$ où n dénote un nombre premier. Journ. de Math. (2) I. 399—400.
10. Ueber die algebraisch auflösbaren Gleichungen. Monatsber. 203—215.

1857.

11. Ueber elliptische Functionen, für welche complexe Multiplication stattfindet, Monatsber. 455—460.
    Uebersetzt von Hoüel in Journ. de Math. (2) III. 265—270: Sur les fonctions elliptiques et sur la théorie des nombres (1858).
12. Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten. J. für Math. LIII. 173—175.
13. Ueber complexe Einheiten. J. für Math. LIII. 176—181.

1858.

14. Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Comptes Rendus XLVI. (I. Sem.) 1150—52.
15. Ueber Gleichungen des siebenten Grades. Monatsber. 287—289.

1859.

16. Ueber kubische Gleichungen mit rationalen Coefficienten. Journ. für Math. LVI. 188.
17. Extrait d'une lettre de M. Kronecker à M. Brioschi (sur la théorie des substitutions). Annali di Mat. (2) II. 131.

1860.

18. Ueber die Anzahl der verschiedenen Klassen quadratischer Formen von negativer Determinante. J. für Math. LVII. 248—255.
    Uebersetzt von Hoüel in Journ. de Math. (2) V. 289—299: Sur le nombre de classes différentes de formes quadratiques à déterminants négatifs (1860).

1861.

19. Mittheilung über algebraische Arbeiten. Monatsber. 609—617.
    Uebersetzt von Hoüel in Ann. de l'Éc. Norm. III. 279—286: Note de M. Kronecker sur ses travaux algébriques (1866).
20. Ueber die Gleichungen fünften Grades. J. für Math. LIX. 306—310. (Theilweiser Abdruck von Nr. 19.)
21. Ueber die Bedingungen der Integrabilität. J. für Math. LIX. 311—312.
22. Antrittsrede. Monatsber. 637—639. (Erwiederung von Encke. 640—642).

1862.

23. Ueber eine neue Eigenschaft der quadratischen Formen von negativer Determinante. Monatsber. 302—311.
    Uebersetzt von Houël in Ann. de l'Éc. Norm. III. 287—294: Sur une nouvelle propriété des formes quadratiques de déterminant négatif (1866).
24. Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. Monatsber. 363—372.
    Uebersetzt von Houël in Ann. de l'Éc. Norm. III. 295—302; Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques (1866).

1863.

25. Ueber die Auflösung der Pell'schen Gleichung mittelst elliptischer Functionen. Monatsber. 44—50.
    Uebersetzt von Houël in Ann. de l'Éc. Norm. III. 303—308: Sur la résolution de l'équation de Pell au moyen des fonctions elliptiques (1866).
26. Ueber die Klassenanzahl der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen. Monatsber. 340—345.

1864.

27. Ueber den Gebrauch der Dirichlet'schen Methoden in der Theorie der quadratischen Formen. Monatsber. 285—303.

1865.

28. Ueber einige Interpolationsformeln für ganze Functionen mehrerer Variabeln. Monatsber. 686—691.

1866.

29. Ueber bilineare Formen. Monatsber. 597—612.
    Abgedruckt im J. für Math. LXVIII. 273—285. (1868).

1868.

30. Bemerkungen zu Weierstrass' Abhandlung: Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Monatsber. 339—346.

1869.

31. Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln. Monatsber. 159—193.
31a. Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln. Monatsber. 688—698.
32. Sur le théorème de Sturm. Comptes Rendus LXVIII. 1078—82.
33. Zur Potentialtheorie. J. für Math. LXX. 246—248.
34. Bemerkungen zur Determinantentheorie. J. für Math. LXXII. 152—175.
35. Bedenken gegen die Annahme des Gesetzentwurfs betreffend die Konsolidation preussischer Staatsanleihen. Berlin. Dümmler.
36. Tabelle zum Konsolidationsgesetz. Berlin. Dümmler.

1870.

37. Bemerkungen zu du Bois-Reymond's Arbeit: Die aperiodische Bewegung gedämpfter Magnete. Zweite Abhandlung. Monatsber. 569—570.
38. Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenanzahl idealer complexer Zahlen. Monatsber. 881—889.

1872.

39. Zur algebraischen Theorie der quadratischen Formen. Monatsber. 490—504. Uebersetzt in Darboux Bull. IV. 256—271: Sur la théorie algébrique des formes quadratiques (1873).
Darstellung dieser Untersuchungen nach einer Bearbeitung derselben von Kronecker: Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. V. Aufl. S. 271—278.
40. Zeller's Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Monatsber. 846—847.

1873.

41. Ueber die verschiedenen Sturm'schen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen. Monatsber. 117—154.

1874.

42. Ueber Scharen von quadratischen Formen. Monatsber. 59—76.
43. Nachtrag zu diesem Aufsatze. 149—156.
44. Ueber Scharen von quadratischen und bilinearen Formen. Monatsber. 206—232.
45. Sur les faisceaux de formes quadratiques et bilinéaires. Comptes Rendus LXXVIII. 1181—1182.
46. Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen. Monatsber. 397—447.

1875.

47. Ueber quadratische Formen von negativer Determinante, und Bemerkungen über Reuschle's Tafeln complexer Primzahlen. Monatsber. 223—238.
48. Bemerkungen zur Geschichte des Reciprocitätsgesetzes. Monatsber. 267—274. Italienische Uebers. von A. Sparagna in Boncompagni Bull. XVIII. 244 bis 249: Intorno alla storia della legge di reciprocità, osservazioni del prof. Leopoldo Kronecker (1885).
49. Ueber die algebraischen Gleichungen, von denen die Theilung der elliptischen Functionen abhängt. Monatsber. 498—507.

1876.

50. Bemerkung zu der Abhandlung Nr. 49 mit Bezug auf eine Notiz von Herrn Sylow. Monatsber. 242.
51. Ueber das Reciprocitätsgesetz. Monatsber. 331—341. Zur Mittheilung von Schering. Monatsber. 330—331.
Franz. Uebers. in Darboux Bull. (2) IV. 182—192: Sur la loi de réciprocité (1880).

1877.

52. Ueber Abel'sche Gleichungen. Monatsber. 845—851.

1878.

53. Notiz über Potenzreihen. Monatsber. 53—58.
54. Ueber Sturm'sche Functionen. Monatsber. 95—121.
55. Ueber die Charakteristik von Functionen-Systemen. Monatsber. 145—152.

1879.

56. Entwickelungen aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. Monatsber. 205—229.

1880.

57. Ueber die Irreductibilität von Gleichungen. Monatsber. 155—162.
58. Ueber die Potenzreste gewisser complexer Zahlen. Monatsber. 404—407.
59. Ueber den vierten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Monatsber. 686—698, 854—860.
60. Ueber die symmetrischen Functionen. Monatsber. 936—948.

1881.

61. Ueber die in Heun's Aufsatz behandelten Determinanten. Göttinger Nachr. 271—279.
62. Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen. Monatsber. 535—600.
63. Adresse der Academie zu E. E. Kummer's Doctorjubiläum. Monatsber. 895—898.
64. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Monatsber. 1165—1172.
65. Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variablen. J. für Math. XCI. 301—334.
66. Ueber Potentiale n-facher Mannigfaltigkeiten. Coll. Math. in mem. Chelini. 224—231.

1882.

67. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. J. für Math. XLII. 1—122.
68. De unitatibus complexis. Dissertatio inaug. arithmetica (vergl. No. 2; §§ 17—20 a. a. O. nicht veröffentlicht). J. für Math. XCIII. 1—52.
69. Festschrift zu Herrn Ernst Eduard Kummer's fünfzigjährigem Doctor-Jubiläum, 10. September 1881. Berlin. G. Reimer. (Enthaltend Widmung, No. 67 u. No. 68 vereinigt.)
    Darstellung des Inhaltes durch J. Molk in Darboux Bull. (2) VIII. 145—154.
70. Die Subdeterminanten symmetrischer Systeme. Sitzungsber. Berl. 821 bis 824.
71. Die Composition Abel'scher Gleichungen. Sitzungsber. Berl. 1059 bis 1064.
72. Die cubischen Abel'schen Gleichungen des Bereichs $\sqrt{-31}$. Sitzungsber. Berl. 1151—1154.
73. Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen. J. für Math. XCIII. 338—364.
74. Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Formen. J. für Math. XCIII. 365—366.

1883.

75. Sur les unités complexes. Comptes Rendus XCVI. 93—98, 148—151, 216—221.
    Mit dieser Arbeit hängt eng zusammen und rührt inhaltlich zum Theil von Kronecker her:
76. Sur les unités complexes, par M. J. Molk. Darboux Bull. (2) VII. 133 bis 136.
77. Ueber die Bernoulli'schen Zahlen. J. für Math. XCIV. 268—269.
78. Die Zerlegung der ganzen Grössen eines natürlichen Rationalitäts-Bereichs in ihre irreductiblen Factoren. J. für Math. XCIV. 344—348.

79. Zur Theorie der elliptischen Functionen. I—V. Sitzungsber. Berl. 497 bis 506, 525—530.
80. Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen. Sitzungsber. Berl. 717—729.
80a. Weitere Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen. Sitzungsber. Berl. 949—956.
81. Zur Theorie der Formen höherer Stufen. Sitzungsber. Berl. 957—960.

1884.

82. Ueber bilineare Formen mit vier Variablen. Abhandl. Berl. Ac. II. (1883). 1—60.
83. Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Sitzungsber. Berl. 519—537.
84. Desgl. (veränderte Darstellung von No. II der vorigen Arbeit). J. für Math. XCVI. 348.
85. Beweis einer Jacobi'schen Integralformel. Sitzungsber. Berl. 539—540.
86. Beweis des Puiseux'schen Satzes. Sitzungsber. Berl. 543—548.
87. Ueber den dritten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Sitzungsber. Berl. 645—647.
88. Der dritte Gauss'sche Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste, in vereinfachter Darstellung. J. für Math. XCVII 93—94.
89. Bemerkungen über ein System von Differentialgleichungen, welches in der vorstehenden Arbeit des Herrn von Helmholtz behandelt ist. J. für Math. XCVII. 141—145.
90. Additions au mémoire sur les unités complexes. Comptes Rendus IC 765—771.
91. Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln. Sitzungsber. Berl. 1071—1080.
92. Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen. Sitzungsber. Berl. 1179—1193, 1271—1299.
93. E. du Bois-Reymond, Untersuchungen über thierische Elektricität. II. Band. II. Abth. S. 489—490. (Anmerkung.)

1885.

94. Sulle superficie algebriche irreduttibili aventi infinite molte sezioni piane che si spezzano in due curve. Rom. Acc. L. Rend. (4) II. 323—324.
95. Bemerkungen zu Herrn Ernst Schering's Mittheilung (über das Reciprocitätsgesetz). Sitzungsber. Berl. 117—118.
96. Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen. Sitzungsber. Berl. 383 bis 396, 1045—1049.
97. Anmerkung zur Note des Herrn A. H. Anglin: „Zur Theorie der symmetrischen Functionen." J. für Math. XCVIII. 176.
98. Sur le second théorème de la moyenne par M. Mansion, avec un extrait d'une lettre de M. L. Kronecker (Une équivalence algébrique). Mathesis V. 97—102.
99. Ueber das Dirichlet'sche Integral. Sitzungsber. Berl. 641—665.
100. Ueber eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel. Sitzungsber. Berl. 841—862.
101. Zur Theorie der elliptischen Functionen. VI—X. Sitzungsber. Berl. 761 bis 784.

102. Ueber den Cauchy'schen Satz. Sitzungsber. Berl. 785—787.
103. Briefwechsel zwischen Gustav Lejeune Dirichlet und Herrn Leopold Kronecker, herausgegeben von Ernst Schering. Göttinger Nachr. 361—382.

1886.

104. Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen. J. für Math. IC. 329—371.
105. Ein Satz über Discriminanten-Formen. J. für Math. C. 79—82.
106. Zur Theorie der Gattungen rationaler Functionen von mehreren Variablen. Sitzungsber. Berl. 251—253.
107. Zur Theorie der elliptischen Functionen. XI. Sitzungsber. Berl. 701 bis 780.
108. Ueber den Zahlbegriff. Samml. philos. Aufs. (Zeller). 263—274.
109. Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes. Comptes Rendus CIII. 980—987.
110. Darlegung arithmetischer Eigenschaften der Kugelfunctionen. Tageblatt der Naturforsch. Vers. LIX. 123.
111. Zwei Noten zu der Abhandlung von E. E. Kummer: Zwei neue Beweise der allgemeinen Reciprocitätsgesetze. J. für Math. C. 12 u. 16.

1887.

112. Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik. J. für Math. C. 490 bis 510.
113. Ueber den Zahlbegriff (vgl. No. 108). J. für Math. CI. 337—355.
114. Bemerkungen über die Jacobi'schen Thetaformeln. J. für Math. CII. 260—272.
115. Vorwort zum hundertsten Bande des J. für Math.

1888.

116. Ueber die arithmetischen Sätze, welche Lejeune Dirichlet in seiner Breslauer Habilitationsschrift entwickelt hat. Sitzungsber. Berl. 417—423.
117. Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme. Sitzungsber. 429—438, 447—465, 557—578, 595—612, 983—1016.
118. Bemerkungen über Dirichlet's letzte Arbeiten. Sitzungsber. Berl. 439—442.

1889.

119. Zur Theorie der elliptischen Functionen. XII—XIX. Sitzungsber. Berl. 53—63, 123—135, 199—220, 255—275, 309—317.
120. Ueber symmetrische Systeme. Sitzungsber. Berl. 349—362.
121. Die Decomposition der Systeme von n^2 Grössen und ihre Anwendung auf die Theorie der Invarianten. Sitzungsber. Berl. 479—505, 603—614.
122. Ueber eine summatorische Function. Sitzungsber. Berl. 867—881.
123. Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste (Auszug aus No. 96_2). J. für Math. CIV. 348—351.
124. Paul du Bois-Reymond. J. für Math. CIV. 352—354.
125. Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale. J. für Math. CV. 157—159, 345—354.
126. Summirung der Gauss'schen Reihen $\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} e^{\frac{2\lambda^2\pi i}{n}}$. J. für Math. CV. 267—268.
127. Vorwort zu G. Lejeune Dirichlet's Werken, Bd. I, S. V—VI.

1890.

128. Ueber die Dirichlet'sche Methode der Werthbestimmung der Gauss'schen Reihen. Hamburger Festschr. 32—36.
129. Zur Theorie der elliptischen Functionen. XX—XXII. Sitzungsber. Berl. 99—120, 123—130, 219—241, 307—318, 1025—1029.
130. Ueber orthogonale Systeme. Sitzungsber. Berl. 525—541, 602—607, 692—699, 873—884, 1063—1080.
131. Ueber die Composition der Systeme von n^2 Grössen mit sich selbst. Sitzungsber. Berl. 1081—1088.
132. Algebraische Reduction der Scharen bilinearer Formen. Sitzungsber. Berl. 1225—1237.
133. Algebraische Reduction der Scharen quadratischer Formen. Sitzungsber. Berl. 1375—1383.
134. Bemerkungen über die von Gauss mit $[x]$ bezeichnete arithmetische Function einer reellen Grösse x. J. für Math. CVI. 346—348.
135. Reduction der Systeme von n^2 ganzzahligen Elementen. J. für Math. CVII. 135—136.
136. Anwendung der Modulsysteme auf Fragen der Determinantentheorie. J. für Math. CVII. 254—261.
137. Ueber eine Stelle in Jacobi's Aufsatz: „Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes. J. für Math. CVII. 349—352.

1891.

138. Algebraische Reduction der Scharen quadratischer Formen. Sitzungsber. Berl. 9—17, 33—44.
139. Die Legendre'sche Relation. Sitzungsber. Berl. 323—332, 343—358, 447—465, 905—908.
140. Die Clausius'schen Coordinaten. Sitzungsber. Berl. 881—890.
141. Sophie von Kowalevsky. J. für Math. CVIII. 88.
142. Eine analytisch-arithmetische Formel. J. für Math. CVIII. 348.
143. Ueber die Zeit und die Art der Entstehung der Jacobi'schen Thetaformeln Sitzungsber. Berl. 653—659, J. für Math. 325—334 (Abdruck nebst einem Verzeichnis der Jacobi'schen Vorlesungen).

1892.

144. Auszug aus einem Schreiben von L. Kronecker an Herrn Prof. G. Cantor. Jahresber. der Deutsch. Math. Ver. I. 23—25.

Ueber die Invarianten algebraischer Functionen von Formen.

Von

Ernst Wölffing in Stuttgart.

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit dem Problem, algebraische Functionen von Grundformen als Argumente in Invarianten einzuführen. (Unter Beschränkung auf eine rationale ganze Function habe ich die Aufgabe bereits in aller Ausführlichkeit für die Hesse'sche Covariante im ternären Gebiet gelöst (Math. Ann. Bd. 36, pag. 97) und werde die Lösung derselben Aufgabe im quaternären Gebiet später publiciren). Der Hauptinhalt der Abhandlung ist folgender:

a) Nach einleitenden Begriffsbestimmungen (§ 1) werden zunächst die Begriffe der Promananten, Remananten (§ 2) und Invariantenfamilien entwickelt und mit ihrer Hilfe Summen von Formen in die Invarianten eingeführt (§ 3). Die Begriffe der Dirimenten und der Invariantenstämme (§ 4) ermöglichen alsdann die Einführung von Producten (§ 5) und rationalen ganzen Functionen (§ 6) der Grundformen in die Invarianten.

b) Die auf Grund dieser Rechnungen erhaltenen Resultate werden auf ihre einfachste Form gebracht, indem verschwindende Bildungen (§ 7) weggelassen, vermittelst der Umwandlungsformeln (§ 8) die reducibeln ermittelt und reducirt (§ 9), sodann die zerfallenden (§ 10) theils reducirt, theils zerlegt werden. Für Einfachheit und Symmetrie des Resultats sorgen dann noch die Relationen (§ 11).

c) Das seitherige Verfahren erweist sich als nur bei Vollformen anwendbar, während beim Eintritt von Minderformen charakteristische Modificationen eintreten (§ 12). Zu besonderer Betrachtung geben noch die Linearsymbole (§ 13) Anlass.

d) Nunmehr wird zu den Invarianten gebrochener (§ 14) und irrationaler (§ 15) Functionen von Grundformen übergegangen. Die Einführung der multiplicirten Invarianten (§ 16) giebt Veranlassung das Verhältniss der symbolisch rechnenden Invariantentheorie zur Differentialrechnung zu erörtern. Es folgt die Betrachtung der Invarianten von Invarianten (§ 17) und hieran schliesst sich die Theorie.

der Invariantengleichungen nebst den beiden Umkehrproblemen der Invariantentheorie (§ 18).

e) Den Schluss bilden einige Bemerkungen über Invarianten mit mehrfachen Veränderlichen, Symbolen und symbolischen Factoren (§ 19).

Voraussetzung für das Studium der vorliegenden Abhandlung ist die Kenntniss der *symbolischen Bezeichnungsweise* der Invarianten (Gordan-Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheorie II, pag. 1ff.; Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I, pag. 183ff.), deren Vortheile gerade bei dem vorliegenden Problem besonders glänzend hervortreten.

Principiell betrachte ich *symbolische Producte* als *Grundgebilde*, während der Ueberschiebungsbegriff in den Hintergrund tritt. Auch spielen die Ordnungen der Grundformen nur eine Nebenrolle, während der *Index* (Gewicht) Haupteintheilungsgrund wird. Auf der andern Seite gelangen neben den übrigen Invarianten die *Simultaninvarianten* in gebührender Weise zur Geltung. Endlich ist, namentlich in den Beispielen, neben dem binären Gebiet auch das *ternäre* und *quaternäre* gehörig berücksichtigt worden. Vom Princip der Dualität wird hiebei Abstand genommen. Die Methode ist vielfach eine *inductive* und es werden vornehmlich auch die bei *practischer* Ausführung von Beispielen (insbesondere der zwei oben erwähnten) in Erscheinung tretenden Verhältnisse berücksichtigt.

Die Mehrdeutigkeit bereits feststehender Begriffe erschwert die Darstellung: Invariante wird sowohl mit als ohne Beziehung auf eine als Argument dienende bestimmte Grundform gebraucht; Symbol ist sogar dreideutig: es bezeichnet einen Buchstaben an einer bestimmten Stelle eines Klammerfactors, ein andermal denselben Buchstaben überall wo er steht, und endlich denselben Buchstaben, aber mit einem Index zwischen 1 und λ versehen, der sich zum vorigen verhält wie eine Veränderliche zur ganzen Veränderlichenreihe. Diese Uebelstände mögen als Ursachen einiger Unebenheiten in der Darstellung angesehen werden.

Ich bemerke noch, dass an mehreren Stellen nur die Grundzüge von Theorien gegeben wurden, die einer weitern Ausbildung fähig und würdig sind und deren Weiterführung ich mir für später vorbehalte.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Es sei im Gebiet λ-ter Stufe

$$f_0 = a_x^{m_0} = b_x^{m_0} = \cdots,$$
$$f_1 = a_x'^{m_1} = b_x'^{m_1} = \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ein System von einander unabhängiger algebraischer Formen mit der einzigen Veränderlichenreihe $x_1\ x_2 \ldots x_\lambda$. Dieselben mögen als *Grundformen* bezeichnet werden.

Unter *Invariante* versteht man eine solche Function der Coefficienten einer oder mehrerer der Grundformen (sowie der Veränderlichen), welche sich bei linearer Transformation der Grundformen nur um eine multiplicative Potenz des Moduls ändert. Sollen die Veränderlichen ausdrücklich als in der Invariante vorkommend hervorgehoben werden, so gebraucht man den Ausdruck *Covariante;* eine Invariante, welche die Veränderlichen ausdrücklich nicht enthält, bezeichne ich als *wirkliche Invariante.* Ferner heisst eine Invariante *Simultaninvariante*, wenn in ihr die Coefficienten mehrerer Formen vorkommen, während sie *gewöhnliche Invariante* genannt werden möge, wenn sie nur Coefficienten *einer* Form enthält. Die Grundformen, von welchen eine Invariante abhängt, mögen die *Argumente* derselben heissen.

Wie hier als bekannt vorausgesetzt wird, können diejenigen Invarianten, welche rationale ganze Functionen der Coefficienten (und der Veränderlichen) sind, dargestellt werden als algebraische Summe von *symbolischen Producten*, bestehend aus *Klammerfactoren*, welche je λ Symbole enthalten, und aus *Linearfactoren* (Verbindungen eines Symbols mit einer Veränderlichenreihe). Dabei kommt das Symbol a einer Form $a_x^{m_0}$ gerade m_0-mal im symbolischen Product vor. Ein solches symbolisches Product nenne ich *einfache* Invariante, eine algebraische Summe von solchen *zusammengesetzte* Invariante. Die wirklichen Invarianten enthalten nur Klammerfactoren, aber auch bei den Covarianten sind die Klammerfactoren die Hauptsache und darum *werden die Linearfactoren, soweit sie aus dem Zusammenhang ergänzt werden können oder auch soweit nichts auf sie ankommt, im Folgenden der Kürze wegen weggelassen.*

Jede einfache Invariante besitzt eine Reihe charakteristischer Zahlen:

die Zahl μ der Klammerfactoren, den *Index* (Gewicht) (Sylvester: weight);

die Zahl h der Linearfactoren, die *Ordnung* in den Veränderlichen (Sylvester: grade);

den *Grad* (order) g_i in den Coefficienten irgend einer Grundform f_i, welche ihrerseits in den Veränderlichen von der *Ordnung* (Sylvester: degree, rank) m_i ist. Alsdann besteht bekanntlich die Beziehung

$$\lambda\mu = \sum m_i g_i - h.$$

Zwei Symbole a und a heissen *gleich;* zwei Symbole a und b, welche sich auf dieselbe Form beziehen, *gleichbedeutend;* zwei Symbole a und a', welche verschiedenen Formen angehören, *verschieden.* Die Vertheilung der gleichen, gleichbedeutenden und verschiedenen Symbole in den Klammerfactoren heisse der *Aufbau* der Invariante. *Gleichgebaut* und demgemäss derselben *Gattung* angehörend, mögen solche Invarianten genannt werden, welche sich nur in den Argumenten unterscheiden, während Uebereinstimmung im Aufbau entweder bereits vorhanden ist oder sich doch durch Umstellung von Klammerfactoren und von Symbolen in denselbeu erzielen lässt. Gleichgebaut mit $(aba'b')\,(aa'b'a'')$ ist daher nicht nur $(aba'b')\,(aa'b'a''')$, sondern auch $(a'b'a'''a)\,(a'b'ab)$.

Das Zusammenvorkommen von zwei Symbolen in einem Klammerfactor kann man eine *Verbindung* (Sylvester: bond) von Symbolen; das Vorkommen eines Symbols in zwei Klammerfactoren einen *Zusammenhang* der Klammerfactoren nennen. Der Inbegriff aller Zusammenhänge einer Invariante heisst die *Zusammensetzung* der Invariante. Die Maximalzahl der zwischen zwei Klammerfactoren möglichen Zusammenhänge ist λ; die Maximalzahl der in einer Invariante möglichen Zusammenhänge ist $\lambda\binom{\mu}{2}$. Die Invariante hat in letzterem Fall *Maximalzusammenhang* und ist eine μ^{te} Ueberschiebung von λ Grundformen.

Anmerkung. Die Ueberschiebungen der Covarianten unter sich und mit Grundformen sind im Allgemeinen zusammengesetzte Invarianten. Es empfiehlt sich für unsere Zwecke dieselben in die sie zusammensetzenden einfachen Invarianten aufzulösen und dabei letztere natürlich in den Symbolen der Grundformen zu schreiben. Sonst ist es in der Invariantentheorie Brauch, die Ueberschiebungen als Grundgebilde anzusehen, und wo eine solche zur Bequemlichkeit der symbolischen Rechnung durch *ein* symbolisches Product ersetzt wird, in letzterem wenigstens auch Symbole von Covarianten zuzulassen (Gordan-Kerschensteiner, Vorl. über Invariantentheorie II, pag. 243ff.).

Zusatz. Für das binäre Gebiet hat Sylvester eine chemisch-graphische Darstellung der Invarianten erdacht (Am. Journ. of math. vol I, pag. 64), deren Grundzüge folgende sind:

Er ordnet jeder Form $f_i = a_x^{(i)m_i}$ einen Punkt und ausserdem ein m_i-werthiges chemisches Element zu. Eine wirkliche Invariante wird nun bildlich dargestellt durch Σg_i Punkte, verbunden durch μ gerade Linien, welche die Symbolverbindungen anzeigen. Der Invariante entspricht ferner eine chemische Verbindung, deren Constitutionsformel durch das graphische Bild der Invariante repräsentirt wird. Die Covarianten werden in gleicher Weise abgebildet, die h Linearfactoren werden durch Gerade, welche von den Punkten ausstrahlen, dargestellt und das Bild kann dann chemisch gedeutet werden als Constitutionsformel einer ungesättigten Molecularverbindung, d. h. eines zusammengesetzten Radicals.

Ordnet man a_x dem Wasserstoff; $a_x'^2$ dem Sauerstoff; $a_x''^4$ dem Kohlenstoff zu: so entspricht dem Aethan $(a''b'')\,(a''a)\,(a''b)\,(a''c)\,(b''d)\,(b''e)\,(b''f)$; dem Methylalcohol $(a''a)\,(a''b)\,(a''c)\,(a''a')\,(a'd)$; dem Aethyl $(a''b'')\,(a''a)\,(a''b)\,(a''c)\,(b''d)\,(b''e)\,b_x''$; dem Aethylen $(a''b'')^2\,(a''a)\,(a''b)\,(b''c)\,(b''d)$; der Kohlensäure $(a''a')^2(a''b')^2$ u. s. f.

Den isomeren Verbindungen und Radicalen der Chemie entsprechen Invarianten, welche im Index μ, in den Ordnungen m_i der Argumente und in den Graden g_i, in welchen diese in die Invariante eingehen, übereinstimmen. Nach Sylvester bleibt nun die Zahl der genannten Bildungen unverändert, wenn an Stelle einer Grundform von der Ordnung m_i und dem Grad g_i eine solche von der Ordnung g_i und dem Grad m_i in die Invariante eintritt: eine Verallgemeinerung des Hermite'schen Reciprocitätsgesetzes für Simultaninvarianten.

Wenn in der erwähnten Abhandlung Sylvesters einige Ungenauigkeiten vorgekommen sind (z. B. wird die schiefe Invariante der cubischen Form als Dreieck mit einfach ausgezogenen Seiten Fig. 7 abgebildet), so ist das dadurch zu erklären, dass Sylvester seine Darstellung nicht direct auf Clebsch's Symbolik aufgebaut hat. Die geometrische Abbildung der Invarianten lässt sich aufs ternäre Gebiet übertragen: den Grundformen entsprechen Punkte im Raum, den Klammerfactoren resp. Linearfactoren Ebenen durch die Punkte, resp. von ihnen ausstrahlend u. s. f. Das quaternäre Gebiet wäre im Raum von vier Dimensionen abzubilden.

Eine von Clebsch's abweichende symbolische Bezeichnung wendet Professor Clifford in London an: er bezeichnet die Symbolverbindungen mit kleinen Buchstaben und fasst diese in Klammern zusammen, welche die Zusammenhänge anzeigen. Die Invariante $(ab)^2\,(cd)^2\,(ac)\,(bd)$ heisst z. B. bei ihm $(tuy)\,(tus)\,(vxy)\,(vxs)$ u. s. f.

§ 2.

Promanantèn, Remananten und Intermananten.

a) Als *Promanante* einer Invariante J bezeichnen wir jede Invariante J', welche aus J dadurch hervorgeht, dass mindestens ein Symbol von J durch ein neues *vollständig* ersetzt wird.

Unter der *vollständigen* Ersetzung eines Symbols a durch ein anderes a' ist zu verstehen, dass *überall da*, wo vorher a stand, a' geschrieben wird. Die neuen Symbole sind unter sich und insbesondere von den bereits in J vorhandenen verschieden; nur da, wo sie gleichbedeutende ersetzen, *dürfen* sie auch gleichbedeutend sein. Promananten von $(abca')\,(abcb')$ sind daher:

$$(aba''a')\,(aba''b');\quad (aa''a'''a')\,(aa''a'''b');\quad (a''b''c''a')\,(a''b''c''b')$$
$$(aba''a'')\,(aba''b');\quad (abca'')\,(abcb'')$$

nicht aber:

$$(aba''b'')\,(aba''b')\quad \text{oder}\quad (abc'a')\,(abc'b').$$

Jede Promanante theilt die Stellen, wo gleiche oder verschiedene Symbole stehen, mit der Stamminvariante, wogegen an Stelle von gleichbedeutenden verschiedene treten *können*. Alle Promananten von J sind mit J von gleicher Zusammensetzung und man kann immer auch solche bilden, welche mit J zur selben Gattung gehören. Denn im Promanantenprocess ist auch die Ersetzung aller Symbole einer Grundform durch diejenigen einer einzigen neuen mitinbegriffen; hiedurch entsteht aber eine mit J gleichgebaute Invariante. Im obigen Beispiel gehören $(a''b''c'a')\,(a''b''c''b')$ und $(abca'')\,(abcb'')$ mit $(abca')\,(abcb')$ zur selben Gattung.

b) *Remananten* einer Simultaninvariante nennen wir alle Bildungen, welche durch Gleichsetzen irgend welcher ihrer Argumente entstehen. Die Remananten von J sind ebenfalls von derselben Zusammensetzung wie J; sie enthalten gleiche und gleichbedeutende Symbole da, wo J solche hat; dagegen *müssen* mindestens einmal an Stelle zweier verschiedenen zwei gleichbedeutende stehen.

Remananten von $(aba''a'')\,(aba''b')$ sind z. B. $(aba''a')\,(aba''b')$; $(abca'')\,(abcb')$; $(abce)\,(abcd)$. Remanante von $(abca')\,(abcb')$ ist $(abcd)\,(abce)$; *nicht* aber $(abca')\,(abcd)$.

c) Ist eine Invariante J' mit J von gleicher Zusammensetzung, aber weder Promanante, noch Remanante von J, so giebt es immer eine Invariante J'' von derselben Zusammensetzung, welche an den Stellen gleichbedeutende Symbole hat, wo solche sowohl in J als in J' vorkommen, sonst aber nicht. Diese Invariante ist Promanante von J und J' ist Remanante von ihr. Sie möge *Intermanante* zwischen J und J' heissen. Ausser J'' giebt es meist noch andere Promananten von J, zu deren Remananten J' gehört; aber beim Uebergang von J

auf eine solche J''' muss mindestens ein Paar gleichbedeutender Symbole verschieden werden, das beim weitern Uebergang auf J' wieder gleichbedeutend wird. Das ist beim Uebergang vermittelst der Intermanante nicht der Fall. Beispiel: Uebergang von $(abca')\,(abcb')$ zu $(a'''b'''c'a')$ $(a'''b'''c'b')$ über die Intermanante $(a'''b'''a''a')\,(a'''b'''a''b')$ oder über die Invariante $(aa'''a''a')\,(aa'''a''b')$; im letztern Fall wird das Paar (ab) zuerst zu (aa'''), dann zu $(a'''b''')$.

Zusatz. Mit den als *Emananten* bekannten Bildungen sind die Promananten zwar in ihrem Wesen verwandt. sie unterscheiden sich jedoch von ihnen in folgenden Punkten:

a) Bei den Emananten treten nur die Symbole *einer* neuen Form in die Invariante ein, bei den Promananten ist die Zahl der eintretenden Symbole unbeschränkt, insbesondere können auch zugleich die Symbole mehrerer Formen durch neue ersetzt werden.

b) Emananten von einfachen Invarianten können auch zusammengesetzte Invarianten sein, Promananten derselben nicht.

c) Die Emananten unterliegen nicht, wie die Promananten, der Beschränkung, dass die neu eintretenden Formen von den bereits vorhandenen verschieden sein müssen.

d) Dagegen ist es bei den Promananten nicht wie bei den Emananten erforderlich, dass die ersetzte und die ersetzende Form von gleicher Ordnung sind. Allerdings hat Herr Wiltheiss (Math. Ann. 35, p. 433: Eine neue Art von Covarianten bildender Operation) ein Mittel angegeben um den Aronhold'schen Process (Emanantenprocess) auf Formen von verschiedener Ordnung anzuwenden. Im Princip kommt sein Verfahren auf folgendes hinaus: Sind $a_x^{m_0}$ und $a_x'^{m_1}$ zwei Invarianten (oder eine Invariante und eine Grundform) und ist $m_0 > m_1$, so wird $a_x^{m_0}$ $m_0 - m_1$ mal polarisirt. Dann kann der Aronhold'sche Process angewandt werden, weil jetzt die Formen $a_y^{m_0-m_1} a_x^{m_1}$ und $a_x'^{m_1}$ in x dieselbe Ordnung haben; zuletzt wird wieder $y = x$ gesetzt.

e) Endlich ist noch zu betonen, dass dem Emanantenprocess eine nicht symbolische Bedeutung zukommt, während der Promanantenprocess rein formal ist.

§ 3.

Invarianten von Summen algebraischer Formen, Familien von Invarianten.

Die in § 2 eingeführten Begriffe ermöglichen es, die Bildungen zu übersehen, die entstehen, wenn in eine Invariante *Summen* von Grundformen als Argumente eingeführt werden.

Die Invariante sei $J(\Phi, \Phi', \Phi'' \ldots)$ und die einzuführenden Summen:

(a) $$\Phi^{(k)} = \sum_i \lambda_i^{(k)} F_i^{(k)}.$$

Die $F_i^{(k)}$ sind zunächst alle als verschieden angenommen und weil die $\Phi^{(k)}$ homogene Formen sein müssen, sind alle dasselbe $\Phi^{(k)}$ zusammensetzenden Formen $F_i^{(k)}$ von derselben Ordnung.

Die Einführung der Symbole der F_i für die Symbole von Φ geschieht, indem man aus der ersten Gleichung (a) geeignete Polarformeln bildet, damit ein Symbol von Φ ersetzt, dann weitere Polarformeln bildet, vermittelst deren man in allen erhaltenen Bildungen ein zweites Symbol von Φ ersetzt; so wird fortgefahren, dann kommt $\Phi' \Phi'' \ldots$ an die Reihe.

Das *Resultat* ist dann zusammengesetzt aus einfachen Invarianten, die sämmtlich *Promananten* von J sind und zwar kommen alle Gattungen von Promananten vor, wenn die $\Phi^{(k)}$ aus hinreichend vielen Formen $F_i^{(k)}$ zusammengesetzt sind. Als *Argumente* dieser Promananten erscheinen irgend welche der $F_i^{(k)}$, so jedoch, dass im symbolischen Ausdruck an den Stellen, die in der Invariante von den Symbolen einer bestimmten Form $\Phi^{(r)}$ eingenommen werden, in den Promananten nur Symbole der Formen $F_i^{(r)}$ stehen dürfen. Jede Promanante J' ist multiplicirt mit einem Coefficienten, der durch Zusammenfassung der gleichen Bildungen entsteht und daher gleich ist der Zahl der Formen, auf welche J' durch Vertauschung der Argumente gebracht werden kann; dabei müssen die zu vertauschenden Argumente demselben Product $\Phi^{(k)}$ angehören. Jede Promanante hat noch einen zweiten Coefficienten, nämlich das Product, das man erhält, wenn man für jedes Argument $F_i^{(k)}$, das in der Promanante im Grad r vorkommt, $(\lambda_i^{(k)})^r$ nimmt und alle diese Grössen multiplicirt.

Sind die in den $\Phi^{(k)}$ vorkommenden Formen $F_i^{(k)}$ theilweise einander gleich, so hindert nichts, sie einstweilen als verschieden anzunehmen und erst nach vollzogener Rechnung einander gleich zu setzen, wie dies z. B. auch Herr Stroh in einem ähnlichen Fall (Math. Ann. 33, pag. 83) gethan hat. In Folge dessen treten *Remananten* der obigen Promananten auf. Es lässt sich zeigen, dass jede mit J gleichzusammengesetzte Gattung von Invarianten auftreten muss, wenn nur hinreichend viele $F_i^{(k)}$ vorhanden und hinreichend viele unter ihnen einander gleich sind. Es könnte scheinen als ob das nicht der Fall wäre, weil nämlich nur solche $F_i^{(k)}$, die nicht in demselben $\Phi^{(k)}$ enthalten sind, einander gleich sein können und daher aus irgend einer Promanante nicht jede ihrer Remanantengattungen entstehen kann. Trotzdem erscheinen aber nicht nur alle Remanantengattungen von J selbst, sondern auch jede andere mit J gleichzusammengesetzte Bildung und zwar entsteht eine solche aus der *Intermanante* zwischen ihr und J. (Vergl. das Beispiel im § 2 c).

Der Inbegriff aller Invarianten, welche dieselbe Zusammensetzung haben, möge als *Invariantenfamilie* bezeichnet werden. Eine solche

umfasst eine endliche Anzahl von Gattungen. Die einzige *gewöhnliche* Invariante der Familie, aus welcher die ganze Familie durch den Promanantenprocess hergeleitet werden kann, heisst die *Hauptinvariante* der Familie; die einzige Invariante der Familie, welche in allen ihren Argumenten linear ist und von welcher alle übrigen Remananten sind, heisst *Linearinvariante*. Die fünf Gattungen, welche z. B. die Familie der Hesse'schen Covariante im quaternären Gebiet umfasst, sind repräsentirt durch: $(abcd)^2$; $(abca')^2$; $(aba'b')^2$; $(aba'a'')^2$; $(aa'a''a''')^2$.

Das Resultat dieses Paragraphen ist daher: Wenn in irgend eine Invariante einer gewissen Familie lineare Combinationen von Formen als Argumente eingeführt werden, so treten im Resultat im allgemeinen alle Gattungen der Familie auf.

Zusatz. Um ein Argument einer Invariante mit einer *Constanten* zu multipliciren, hat man die Invariante mit einer Potenz zu multipliciren, deren Basis die Constante und deren Exponent die Gradzahl des Arguments ist.

§ 4.

Dirimenten und Copulanten. Stämme von Invarianten.

Wenn man in den Klammerfactoren einer Invariante J ein Symbol *stellenweise* durch ein neues Symbol oder mehrere solche ersetzt (oder auch zugleich mehrere Symbole in dieser Weise behandelt), so entstehen Bildungen, welche *Dirimenten* von J genannt werden mögen. Unter der *stellenweisen* Ersetzung eines Symbols a durch *ein* anderes a' ist gemeint, dass an einzelnen Stellen, wo a steht, a' geschrieben wird; dabei ist der Fall, dass a durch a' vollständig (cf. § 2) ersetzt wird, ausdrücklich ausgeschlossen. Die stellenweise Ersetzung von a durch *mehrere* Symbole ist so gemeint, dass a entweder theilweise stehen bleibt und an den übrigen Stellen durch die neuen Symbole ersetzt wird oder aber, dass a völlig verschwindet und die andern Symbole sich in seinen Platz theilen. Die neu eintretenden Symbole sind unter sich und von den bereits vorhandenen verschieden; allerdings dürfen sie, soweit sie an Stelle gleichbedeutender Symbole treten, auch gleichbedeutend sein. Das Wesentliche am Dirimentenprocess ist, dass durch ihn Zusammenhänge *zerrissen* werden (daher Dirimenten von dirimĕre = zerreissen), ohne dass zugleich die Möglichkeit des Entstehens neuer Zusammenhänge vorläge. Dirimenten von $(abc)(aba')(aa'c)$ sind z. B. $(abc)(aba')(aa'a'')$; $(aa''c)(aba')(aa'b'')$; $(aa''c)(aba')(aa'c)$; $(aa''c)(aa'''a')(aa'c)$; $(ab''c)(a''ba')(a'''a'c)$ u. s. f.

Umgekehrt nennen wir *Copulanten* einer Invariante alle Invarianten, die entstehen, wenn in J einzelne *Symbole*, seien es nun gleichbedeutende oder verschiedene, überall wo sie stehen einander *gleich* gemacht werden. Durch den Copulantenprocess entstehen neue Zusam-

menhänge, ohne dass die alten zerrissen würden. Doch ist zu bemerken, dass die einander gleich werdenden Symbole nicht in einem Klammerfactor zusammen vorkommen dürfen. Denn alsdann entständen Invarianten, welche mitsammt ihren sämmtlichen Promananten verschwinden und die ich als *absolut verschwindend* bezeichnen will. Copulanten von $(aba')(abb')(aa''b')$ sind z. B. $(aba')^2(aa''a')$; $(aba')(abb')^2$; $(aba')(abb')(aa'b')$; $(aba')^3$ u. s. f.

Durch Anwendung des Promananten- und Remanantenprocesses auf eine Invariante J und ihre sämmtlichen Dirimentengattungen (es giebt deren nur eine endliche Anzahl) erhält man eine Anzahl von Invariantenfamilien, deren Gesammtheit als *Stamm* der Invariante J bezeichnet werden soll. Die Familie von J selbst ist die *Hauptfamilie* des Stammes. Die Invarianten der Familie von J haben alle denselben Stamm wie J, sie sind daher Erzeugende des Stammes. Die Stämme aller übrigen Invarianten, welche dem Stamm von J angehören, sind ganz im Stamm von J enthalten.

Die Frage, ob alle Invarianten von einem gegebenen Index einem und demselben Stamm, dessen Hauptfamilie dann jedenfalls Maximalzusammenhang haben müsste, angehören, ist zu verneinen. Denn die Invarianten des Stammes der Invarianten mit Maximalzusammenhang haben eine bemerkenswerthe Eigenschaft: durch Umstellung der Symbole in den Klammerfactoren kann man es dahin bringen, dass wenn alle Klammerfactoren genau unter einander geschrieben werden, sich gleiche Symbole nur in verticalen Colonnen vorfinden. Man kann den Zusammenhang solcher Invarianten einen *regelmässigen* nennen. Es giebt alsdann auch Bildungen von *unregelmässigem* Zusammenhang, welche diese Bedingung nicht erfüllen, z. B. die obenerwähnte Invariante $(abc)(aba')(aa'c)$. Diese gehören dem Stamm der Invarianten mit Maximalzusammenhang nicht an.

Es giebt gewissse Invarianten, wie z. B. $(abc)(aba')(aa'c)$, deren sämmtliche Copulanten absolut verschwinden. Dasselbe gilt natürlich von deren Familien und man könnte die letzteren als *primitive* Familien auszeichnen. Sucht man für einen gegebenen Index alle primitiven Familien, so umfassen die von diesen erzeugten Stämme, die natürlich zum Theil zusammenfallen, sämmtliche Invarianten von dem betreffenden Index. Der Inbegriff derselben soll *Classe* heissen.

Zur Classe fünf im ternären Gebiet gehören z. B. 7 primitive Familien, deren Hauptinvarianten sind: $(abc)^5$; $(abc)^3(abd)(acd)$; $(abc)^2(abd)^2(acd)$; $(abc)^2(abd)(acd)(bcd)$; $(abc)^2(abd)(abe)(cde)$; $(abc)^2(ade)(bde)(cde)$; $(abc)(abd)(abe)(cde)(acd)$.

§ 5.

Invarianten von Producten von Formen.

Es seien in eine Invariante $J(F, F', F'' \ldots)$ Producte von Formen einzuführen:

$$F^{(k)} = \prod f_i^{(k)}.$$

wobei $m_i^{(k)}$ die Ordnung der Form $f_i^{(k)}$ ist und alle $f_i^{(k)}$ zunächst als von einander verschieden angenommen werden.

Die Einführung der Symbole von $f_i^{(k)}$ in J erfolgt nach den in § 3 entwickelten Grundsätzen durch Polarenformeln und als Resultat findet man eine Invariante zusammengesetzt aus Promananten von J, Dirimenten von J und den Promananten der letzteren. Die Argumente derselben sind irgend welche der $f_i^{(k)}$, jedoch mit der Beschränkung, dass an Stelle der Symbole einer bestimmten Form $F^{(r)}$ nur die Symbole der Formen $f_i^{(r)}$ treten dürfen. Als erster Coefficient, der von der Zusammenziehung gleicher Invarianten herrührt, tritt bei jeder Invariante die Zahl der verschiedenen Formen auf, auf die ihr Ausdruck, ohne seinen Werth zu ändern gebracht werden kann durch Umstellung von Klammerfactoren und von verschiedenen Symbolen in denselben, wobei jedoch nach wie vor an Stelle der Symbole von $F^{(r)}$ nur diejenigen von $f_i^{(r)}$ stehen dürfen. Hierzu kommt ein zweiter Coefficient, nämlich das Product, das entsteht, wenn man für jedes Symbol von $F_i^{(k)}$, das in r Klammerfactoren der betreffenden Invariante vorkommt, den Factor $\frac{m_i^{(k)}!}{(m_i^{(k)}-r)!\, f_i^{(k)r}}$ nimmt. Die Summe aller Invarianten, jede mit ihren zwei Coefficienten versehen, ist noch zu multipliciren mit einem Product, das man erhält, wenn man für jedes Symbol von $F^{(k)}$, das in t Klammerfactoren von J vorkommt, den Factor $\frac{(M^{(k)}-t)!\, F^{(k)t}}{M^{(k)}!}$ nimmt, wobei $M^{(k)}$ die Ordnung von $F^{(k)}$ ist. Natürlich müssen in dem ebengenannten Product alle in den zweiten Coefficienten im Nenner vorkommenden Grundformen aufgehen, so dass das Resultat eine *ganze* Function der Invarianten und der Grundformen ist.

Sind nun unter den $f_i^{(k)}$ irgend welche einander gleich, so werden sie (wie in § 3) zuerst verschieden angenommen und nach Ausführung der Rechnung einander gleichgesetzt. Dabei treten die Remananten der oben genannten Promananten und Dirimenten auf, und zwar im allgemeinen Fall alle Gattungen, weil sowohl die in verschiedenen $F^{(k)}$, als auch die in demselben $F^{(k)}$ vorkommenden $f_i^{(k)}$ einander gleich sein können. Es treten daher bei Einführung von Producten in eine Invariante J im allgemeinen alle zum *Stamm* von J gehörige Gattungen auf.

§ 6.

Invarianten rationaler ganzer Functionen von Formen.

Geht man nun einen Schritt weiter und fragt nach den Bildungen, die auftreten, wenn rationale ganze Functionen als Argumente in eine Invariante eingeführt werden, so ist die Antwort leicht. Denn die rationalen ganzen Functionen Φ können angesehen werden als lineare Combinationen von Formen F, welche ihrerseits Producte der Grundformen f sind. Nach § 3 erhält man bei Einführung der F sämmtliche Invariantengattungen der Familie von J. Jede derselben liefert bei Einführung der f nach § 5 sämmtliche Gattungen ihres Stammes; da aber nach § 4 die Stämme der Invarianten, welche der Familie von J angehören, mit dem Stamme von J zusammenfallen, so *kommt man auf dieselben Invariantengattungen, ob man in eine Invariante rationale ganze Functionen oder bloss Producte von Formen einführt.*

Ein anderes für die Praxis zu empfehlendes Verfahren, um Producte oder rationale Functionen in Invarianten einzuführen, siehe § 9 Anmerkung.

§ 7.

Symmetrische, schiefsymmetrische und verschwindende Invarianten. Combinanten.

Die in § 6 für die Invarianten rationaler, ganzer Functionen von Formen gewonnene Darstellung ist noch nicht die einfachste, die sich erzielen lässt. Denn unter den Invarianten, welche den Stamm der gegebenen zusammensetzen, sind solche, welche *identisch verschwinden;* andere *zerfallen* unmittelbar in ein Product zweier oder mehrerer Invarianten; wieder andere können endlich *in rational-ganzer Form durch andere Invarianten dargestellt* werden.

Es sei J eine Invariante von solcher Beschaffenheit, dass durch Vertauschung von zwei Symbolen, etwa a und a', aus ihr eine Invariante J' hervorgeht, welche aus J auch, abgesehen davon dass gleichbedeutende Symbole einander vertreten, durch blosse Umstellung von im Ganzen ϱ Symbolpaaren hergestellt werden kann. Dabei ist unter Vertauschung von a und a' zu verstehen, dass überall da wo a steht (also eventuell auch in den Linearfactoren), a' geschrieben wird und umgekehrt; unter der Umstellung von a und a' ist dagegen gemeint, dass in einem Klammerfactor, wo a und a' vorkommen, dieselben ihre Stelle wechseln.

a) Ist nun ϱ eine gerade Zahl, so wird der Werth von J durch die Vertauschung der Symbole nicht geändert; die Invariante J heisst dann *symmetrisch* in Bezug auf a und a'.

b) Ist aber ϱ eine ungerade Zahl, dann wechselt J durch die Vertauschung das Zeichen; die Invariante J heisst dann *schiefsymmetrisch* in Bezug auf a und a'.

c) Ist eine Invariante schiefsymmetrisch in Bezug auf zwei gleichbedeutende Symbole, so muss sie, da sie bei deren Vertauschung einerseits ungeändert bleiben, andrerseits das Zeichen wechseln müsste, den Werth Null haben; eine solche Invariante nennen wir eine *verschwindende.*

Von einer verschwindenden Invariante verschwinden zwar die Remananten, nicht aber alle Promananten und Dirimenten. Werden daher in eine solche rationale ganze Functionen von Formen eingeführt, so erscheinen im Resultat nichtverschwindende Formen; aber dieselben heben sich gegenseitig auf.

Combinanten heissen bekanntlich solche Invarianten, welche sich nur um eine (multiplicative) Constante ändern, wenn an Stelle der Argumente lineare Combinationen derselben eingeführt werden. Diejenigen Combinanten, welche einfache Invarianten sind, sind Linearinvarianten, welche in Bezug auf alle ihre Argumente schiefsymmetrisch sind, so dass alle ihre Remananten verschwinden. Combinanten sind alle ungeraden Ueberschiebungen von Grundformen; es giebt aber auch andere Bildungen, welche Combinanten sind, z. B. $(aa')(aa'')(a'a'')$. Die Linearinvarianten vom Index Eins (Functionaldeterminanten) ändern sich nur um ein multiplicatives Product von Constanten und Grundformen, wenn an Stelle der Argumente Producte von Potenzen derselben eingeführt werden, weil sie weder Promananten, noch Dirimenten haben.

§ 8.

Umformung der Invarianten.

Nach Ausscheidung der verschwindenden Invarianten aus einem Stamm sind die zurückbleibenden keineswegs unabhängig von einander. Um die gegenseitige Abhängigkeit zu untersuchen, *formt* man die Invarianten *um*, wozu man folgende Identität benutzt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1' & a_1'' & \dots & a_1^{(\lambda-1)} & \alpha_1 \\ a_2 & a_2' & a_2'' & \dots & a_2^{(\lambda-1)} & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_\lambda & a_\lambda' & a_\lambda'' & \dots & a_\lambda^{(\lambda-1)} & \alpha_\lambda \\ a_x & a_x' & a_x'' & \dots & a_x^{(\lambda-1)} & \alpha_x \end{vmatrix} \equiv 0.$$

(Die Horizontalreihen bis zur vorletzten resp. mit $x_1 x_2 \dots x_\lambda$ multiplicirt und addirt geben die letzte Horizontalreihe).

Die Identität lässt sich auch schreiben:

$$(I) \qquad (aa'a'' \ldots a^{(\lambda-2)}a^{(\lambda-1)})\, a_x$$
$$\equiv (aa'a'' \ldots a^{(\lambda-2)}\alpha)\, a_x^{(\lambda-1)} + (-1)^1 (aa'a'' \ldots a^{(\lambda-1)}\alpha)\, a_x^{(\lambda-2)} + \cdots$$
$$+ (-1)^{\lambda-2} (aa'' \ldots a^{(\lambda-1)}\alpha)\, a_x' + (-1)^{\lambda-1} (a'a'' \ldots a^{(\lambda-1)}\alpha)\, a_x.$$

Ersetzt man a_x durch $(\alpha\alpha'\alpha'' \ldots \alpha^{(\lambda-1)})$, so folgt eine zweite Identität:

$$(II) \qquad (aa'a'' \ldots a^{(\lambda-2)}a^{(\lambda-1)})\, (\alpha\alpha'\alpha'' \ldots \alpha^{(\lambda-1)})$$
$$\equiv (aa'a'' \ldots a^{(\lambda-2)}\alpha)\, (a^{(\lambda-1)}\alpha'\alpha'' \ldots \alpha^{(\lambda-1)})$$
$$+ (-1)^1 (aa'a'' \ldots a^{(\lambda-1)}\alpha)\, (a^{(\lambda-2)}\alpha'\alpha'' \ldots \alpha^{(\lambda-1)}) + \cdots$$
$$+ (-1)^{\lambda-2} (aa'' \ldots a^{(\lambda-1)}\alpha)\, (a'\alpha'\alpha'' \ldots \alpha^{(\lambda-1)})$$
$$+ (-1)^{\lambda-1} (a'a'' \ldots a^{(\lambda-1)}\alpha)\, (a\alpha'\alpha'' \ldots \alpha^{(\lambda-1)}).$$

Die Formel (I) kann auf jede Combination eines Klammerfactors und eines Linearfactors angewendet werden, wenn das Symbol des letzteren in ersterem nicht vorkommt.

Die Formel (II) kann auf jede Combination zweier Klammerfactoren angewendet werden, wenn dieselben höchstens $\lambda - 2$ Zusammenhänge haben. Wenn es die Umstände erlauben, kann die Formel alsdann in mehrfacher Weise zur Anwendung gelangen, weil im zweiten Klammerfactor jedes im ersten nicht vorkommende Symbol an erster Stelle stehen kann und weil ferner die Reihenfolge beider Klammerfactoren umgekehrt werden kann.

Die Formeln, welche die Umwandlung einer Invariante J mittelst der Formel (I) oder (II) angeben, sollen *ursprüngliche Umwandlungsformeln* von J heissen. Die in denselben vorkommenden Invarianten sind immer von gleichem Index und im allgemeinen auch von derselben Ordnung wie J. Doch kann es auch geschehen, dass sich aus der einen oder andern dieser Invarianten eine Grundform ausscheidet, was z. B. bei der letzten Invariante in der folgenden Formel der Fall ist:

$$(aa'a'')(ba'a'')\, a_x b_x = -(aa'a'')(aa'b)\, b_x a_x'' - (aa'a'')(aba'')\, b_x a_x' + (aa'a'')^2 b_x^2,$$

indem sich ein Symbol b ganz unter die Linearfactoren zurückzieht; alsdann ist die Ordnung der übrig bleibenden Invariante $(aa'a'')^2$ kleiner als diejenige von J.

Im Allgemeinen werden in einer Umwandlungsformel von J auch Invarianten vorkommen, welche nicht zum Stamm von J gehören, weil beim Umwandlungsprocess nicht nur Zusammenhänge zerrissen, sondern auch solche geknüpft werden. Beispielsweise gehört $(aa'a'')^2$ dem Stamm von $(aa'a'')(ba'a'')$ nicht an. Die Zahl der Zusammenhänge bleibt bei der Anwendung der Formel (II) unverändert.

Durch Elimination von Invarianten aus den ursprünglichen Umwandlungsformeln entstehen Formeln, welche man als *abgeleitete Umwandlungsformeln* bezeichnen kann. Zu ihnen gehören auch die Formeln (comparative Umwandlungsformeln) welche entstehen, wenn eine Invariante auf zwei verschiedene Arten umgeformt und die Resultate einander gleichgesetzt werden. Dieselben haben mit den ursprünglichen Umwandlungsformeln die Eigenschaft gemein, dass sie in den etwa sich heraushebenden Grundformen linear sind.

Als *Linearumwandlungsformeln* wären die Umwandlungsformeln der Linearinvarianten zu bezeichnen, aus denen alle übrigen durch den Remanantenprocess hergeleitet werden können. Durch letzteren erleiden die Umwandlungsformeln wesentliche Veränderungen, indem manche Invarianten verschwinden, andere einander gleich werden und sich entweder wegheben oder vereinigen; im letztern Fall entstehen die von den Ordnungen der Argumente unabhängigen Zahlencoefficienten der Umwandlungsformeln.

Ein Glied einer Umwandlungsformel heisst *isolirt*, wenn es keine Grundform als Factor hat. Das Glied auf der linken Seite der ursprünglichen Umwandlungsformeln ist immer isolirt; die nach Formel (II) gebildeten und die aus denselben abgeleiteten Umwandlungsformeln haben nur isolirte Glieder. Eine Invariante mit Maximalzusammenhang kann nicht isolirt sein und daher auch nicht umgeformt werden. Die isolirten Glieder bedingen einen hochwichtigen Unterschied unter den Umwandlungsformeln:

Hat eine solche eine isolirte Invariante, während keine andere von derselben Gattung ebenfalls isolirt darin vorkommt, so ist die Umwandlungsformel als *Reductionsformel* zu bezeichnen; die Invariante lässt sich mittelst derselben als rationale ganze Function anderer Invarianten und eventuell der Grundformen darstellen, sie ist *reducibel*. Dagegen ist eine Umwandlungsformel, die nicht Reductionsformel ist, als *Relation* zu bezeichnen.

§ 9.

Reductionsformeln.

Wie soeben bemerkt wurde, heissen Invarianten, welche sich als rationale ganze Functionen anderer Invarianten und der Grundformen darstellen lassen, *reducibel;* solche hingegen, bei denen dies nicht der Fall ist, werden als *irreducibel* bezeichnet. Manche reducible Invarianten sind mittelst ursprünglicher Umwandlungsformeln reducirbar; wie z. B.

$$(aba')\,(abb')\,a_x'b_x' = 2(aa'b')\,(a'ab)\,b_xb_x' + (aba')^2\,b_x'^2,$$

andere bedürfen hierzu abgeleiteter Umwandlungsformeln;

$$(aa')\,(aa'')\,a_x' a_x''$$

wird z. B. reducirt durch Elimination von

$$(a'a)\,(a'a'')\,a_x a_x'' \quad \text{und} \quad (a''a)\,(a''a')\,a_x a_x'$$

aus folgenden drei ursprünglichen Umwandlungsformeln, welche einzeln zur Reduction nicht ausreichen:

$$(aa')\,(aa'')\,a_x' a_x'' = (aa')^2\,a_x''^2 - (a'a)\,(a'a'')\,a_x a_x'',$$
$$(a'a)\,(a'a'')\,a_x a_x'' = (a'a'')^2\,a_x^2 - (a''a)\,(a''a')\,a_x a_x',$$
$$(a''a)\,(a''a')\,a_x a_x' = (aa'')^2\,a_x'^2 - (aa')\,(aa'')\,a_x' a_x''.$$

Vollständig reducirt ist übrigens eine reducible Form erst, wenn sie durch lauter irreducible Invarianten ausgedrückt ist und das Beispiel der Invariante $(ab)^2\,(cd)^2\,(ac)\,(bd)\,a_x^3\,b_x^3\,c_x^3\,d_x^3$ (cf. unten § 12) beweist, dass man sich oft durch eine lange Reihe reducibler Invarianten hindurchwinden muss, bis man die vollständige Reduction durchgeführt hat.

Der Inbegriff der irreducibeln Invarianten eines Systems von Grundformen heisst bekanntlich das *vollständige Formensystem* der Grundformen. Dieser Begriff ist aber kein vollständig bestimmter. Es können nämlich in einer Umwandlungsformel zwei Invarianten J und J' von verschiedener Gattung als isolirte Glieder vorkommen, während es nicht möglich ist mittelst einer andern Formel eine derselben (oder beide) auf lauter Invarianten von andern Gattungen zu reduciren. Ist alsdann J in Bezug auf eine grössere Anzahl von Argumentpaaren symmetrisch als J', so ist es geboten J' als reducibel vermittelst J anzunehmen und nicht umgekehrt; denn wenn eine Anzahl von Argumenten gegeben ist, giebt es weniger Invarianten von der Gattung J als von der Gattung J' und die Zahl der Formen des vollständigen Systems wird kleiner, wenn man erstere an Stelle der letzteren demselben einverleibt. Man hat z. B.

$$(aba')\,(aa'b')\,b_x b_x' = -\frac{1}{2}\,(aba')^2\,b_x'^2 + \frac{1}{2}\,(aba')\,(abb')\,a_x' b_x'.$$

Die Form $(aba')\,(aa'b')\,b_x b_x'$ ist in Bezug auf die Formen a_x^2 und $a_x'^2$ symmetrisch, die Form $(aba')\,(abb')\,a_x' b_x'$ nicht, also muss letztere als reducibel angesehen werden.

Sind aber die Invarianten J und J' in Bezug auf gleich viele Argumentpaare symmetrisch, so liegt kein Grund vor, der einen oder der andern den Vorzug zu geben und man kann beide als *bedingt* reducibel ansehen.

Man hat z. B. die Formel:

$$(aa'bb'')\,(aa'a''b')\,b_x\,b_x'\,a_x''\,b_x''$$
$$= -\tfrac{1}{2}\,(aba'a'')\,(aba'b'')\,a_x''\,b_x''\cdot b_x'^2$$
$$+\tfrac{1}{2}\,(aa'bb'')\,(aa'bb')\,b_x'\,b_x''\cdot a_x''^2$$
$$-\tfrac{1}{2}\,(aba'b'')\,(aba''b')\,a_x'\,b_x'\,a_x''\,b_x''$$

und die Invarianten

$(aa'bb'')\,(aa'a''b')\,b_x\,b_x'\,a_x''\,b_x''$ und $(aba'b'')\,(aba''b')\,a_x'\,b_x'\,a_x''\,b_x''$ sind je in Bezug auf ein Paar von Argumenten symmetrisch, also bedingt reducibel; dasselbe gilt auch von den Bildungen:

$$(aba')\,(aba'')\,a_x'\,a_x'' \quad \text{und} \quad (a'a''a)\,(a'a''b)\,a_x\,b_x.$$

(Vgl. hierzu noch § 19 Zusatz.)

Bemerkt sei noch, dass man in der Invariantentheorie von zwei bedingt reducibeln Invarianten derjenigen den Vorzug zu geben und sie als irreducibel anzusehen pflegt, welche mehr Zusammenhänge hat (vielleicht weil letztere sich leichter durch Ueberschiebungen ausdrücken lässt?).

Aus § 8 ergiebt sich, dass unter den Invarianten, auf welche eine Invariante J reducirt werden kann, im allgemeinen solche sind, welche dem Stamm von J nicht angehören. Auf diese Weise kann es auch geschehen, dass in die Lösung der Aufgabe, rationale ganze Functionen in die Invariante J' einzuführen, in Folge der Reduction Invarianten hereinkommen, welche dem Stamm von J' nicht angehören. Man könnte sagen, dass die genannten Bildungen den *erweiterten* Stamm von J' zusammensetzen. Zum erweiterten Stamm von $(aa'a'')\,(aa'a''')$ gehört z. B. $(aa'a'')^2$.

Eine reducible Invariante kann irreducible Promananten und Dirimenten haben. Führt man in eine reducible Invariante J die vermittelst der Invarianten $J'J''\ldots$ ausdrückbar ist, rationale ganze Functionen der Grundformen als Argumente ein und sind $J_1J_2\ldots$ irreducible Invarianten, welche zwar dem Stamm von J, nicht aber den erweiterten Stämmen von $J'J''\ldots$ angehören, so müssen zwischen den $J_1J_2\ldots$ solche Relationen bestehen, dass sie sich bei der Einführung der rationalen ganzen Functionen in J wegheben.

Alle Remananten einer reducibeln Form sind ebenfalls reducibel; ist daher eine Linearinvariante reducibel z. B. $(aa'a''')\,(aa''a^{IV})$, so ist es auch deren ganze Familie.

Der von Herrn Gordan (Math. Ann. 33 pag. 372) eingeführte Begriff des *erweiterten Formensystems* lässt sich nun folgendermassen definiren: Aus dem gewöhnlichen Formensystem einer Form m^{ter} Ordnung erhält man das erweiterte System durch Anfügung derjenigen

verschwindenden oder reduciblen Invarianten, welche Familien mit irreducibler Linearinvariante angehören. Das erweiterte Formensystem besteht dann aus allen Hauptinvarianten, deren Index gleich m oder kleiner und deren Linearinvariante irreducibel ist. Aus dem erweiterten Formensystem erhält man sodann das einfache simultane System von n Formen m^{ter} Ordnung, indem man den Invarianten des erweiterten Systems ihre Promananten zufügt, soweit dieselben höchstens n Argumente enthalten; als Argumente treten die n gegebenen Formen auf und es sind jetzt natürlich alle verschwindenden und reduciblen Invarianten wegzulassen. Das erweiterte System einer binären quadratischen Form ist z. B.

$$a_x^2;\ (ab)\,a_x b_x;\ (ab)\,(ac)\,(bc);\ (ab)^2.$$

Hieraus folgt das einfache von 2 quadratischen Formen:

$$a_x^2;\ a_x'^2;\ (aa')\,a_x a_x';\ (ab)^2;\ (aa')^2;\ (a'b')^2$$

und von 3 quadratischen Formen:

$$a_x^2;\ a_x'^2;\ a_x''^2;\ (aa')\,a_x a_x';\ (aa'')\,a_x a_x'';\ (a'a'')\,a_x' a_x'';\ (aa')(aa'')(a'a'');$$
$$(ab)^2;\ (a'b')^2;\ (a''b'')^2;\ (aa')^2;\ (aa'')^2;\ (a'a'')^2.$$

In ähnlicher Weise kann man auch das simultane System einer Form m^{ter} Ordnung und einer Form m'^{ter} Ordnung erweitern und kommt dann auf das einfache simultane System von n Formen m^{ter} und n' Formen m'^{ter} Ordnung.

Es kann auch geschehen, dass eine Invariante vermittelst *einer einfachen* Invariante reducirbar ist, dass sie also gleich ist einer andern Invariante oder gleich dem Product aus einer Invariante und einer oder mehrerer der Argumentformen; rechts tritt alsdann ein Zahlencoefficient bei, der positiv oder negativ ist und auch der Einheit gleich sein kann. Beispiele:

$$(ab)^2\,(ac)^2\,(bc)^2\,a_x^2\,b_x^2\,c_x^2 = 2(ab)^2\,(ac)^3\,(bc)\,a_x\,b_x^3\,c_x^2$$
$$= (ab)\,(ac)^4\,(bc)\,a_x\,b_x^4\,c_x,$$

$$(abcd)\,(abca')\,d_x\,a_x' = \frac{1}{4}\,(abcd)^2 \cdot a_x'^2,$$

$$(abc)\,(acd)\,b_x\,d_x = -\frac{1}{8}\,(abc)^2 \cdot d_x^2,$$

$$(ab)\,(a'a'')\,(bb')\,(aa'')\,(ba'')\,a_x a_x' b_x' = (ab)\,(bb')\,(aa'')^2\,(ba'')\,b_x' \cdot a_x'^2.$$

Selbst Invarianten derselben Familie können einander gleich sein:

$$(ab)^2\,(aa')\,b_x\,a_x'^2 = (aa')^2\,(ab)\,b_x^2\,a_x'.$$

Auch eine verschwindende Invariante kann (im uneigentlichen Sinn) reducibel genannt werden, wenn sie sich in rational ganzer Form durch die Grundformen und andere Invarianten, welche alsdann entweder alle verschwinden oder aber eine Relation bilden, ausdrücken lässt. z. B.:

$$(aa'bd')\,(aa'c'e')\,b_x c_x' d_x' e_x' = -\tfrac{1}{2}(aba'd')\,(abc'e')\,a_x' c_x' d_x' e_x',$$

$$(aa'bc)\,(aa'b'a'')\,b_x c_x b_x' a_x'' = (aa'b'c)\,(aa'ba'')\,b_x c_x b_x' a_x''$$
$$+\tfrac{1}{2}(aba'b')\,(aba'a'')\,b_x' a_x'' \cdot c_x^2$$
$$-(aba'b')\,(aba'c)\,c_x b_x' \cdot a_x''^2.$$

Anmerkung: Die Reducirbarkeit vieler Invarianten giebt ein Mittel an die Hand, die Einführung von Producten in Invarianten (§ 5) in einer Weise, die sich praktisch bewährt hat, zu vereinfachen. Man führt zunächst nur an Stelle *eines* Argumentes der Invariante J ein Product zweier Factoren ein und reducirt die reducibeln unter den auftretenden Bildungen; dann sieht man den einen Factor wieder als Product zweier Factoren an und reducirt nach Einführung derselben auf's Neue; so wird fortgefahren, bis man keine neuen Gattungen mehr erhält und verfährt dann ebenso bei den andern Argumenten. Man erspart so die Betrachtung aller Invarianten, deren sämmtliche Remananten und Copulanten, soweit dieselben dem Stamm von J angehören, reducibel sind. In meiner Abhandlung: „Ueber die Hesse'sche Covariante einer ganzen rationalen Function von ternären Formen." Math. Ann. 36 pag. 97, bin ich auf diesem Wege zu den Formeln (II) bis (IV) gelangt. Eine Schattenseite hat jedoch das Verfahren, dass man nämlich das Resultat meistens erst vermittelst der in § 11 zu besprechenden Relationen symmetrisch machen muss.

§ 10.

Zerfallende Invarianten.

Lassen sich die Klammerfactoren einer Invariante J zu zwei oder mehreren Gruppen anordnen, zwischen welchen gegenseitig gar kein Zusammenhang besteht, so zerfällt J in ein Product von Invarianten; die Summe der Indices der letzteren ist gleich dem Index von J. Die Invariante J wird als *zerfallende Invariante* bezeichnet.

Es liegt nun nahe an Stelle einer zerfallenden Invariante die Theilinvarianten zu betrachten, in welche sie zerfällt. Für gewöhnlich geschieht das auch und man sieht dann eine Umwandlungsformel, in welcher alle isolirten Glieder bis auf eines zerfallen, als eine Reductionsformel für das letztere an. Wenn man jedoch in eine Invariante J rationale ganze Functionen von Formen als Argumente einführt und hierbei auf eine zerfallende Form J' trifft, so wird es in vielen Fällen möglich sein, eine Umwandlungsformel zu finden, vermittelst deren J' durch solche nicht zerfallende Invarianten ausgedrückt wird, welche dem Stamm von J angehören. Alsdann erscheint es als geradezu *überflüssig* dem erweiterten Stamm von J die Theilinvarianten, in

welche J' zerfällt, hinzuzufügen; man wird vielmehr jene Umwandlungsformel als Reductionsformel für J' ansehen und ersetzt demgemäss J' durch lauter Gattungen von Invarianten, welche so wie so schon in die Rechnung eingehen. Insofern muss ich berichtigend bemerken, dass ich Math. Ann. 36, p. 102 die Bildungen S und N mit Unrecht eingeführt habe.

Um in eine zerfallende Form rationale ganze Functionen als Argumente einzuführen, führt man dieselben in die Theilinvarianten ein und multiplicirt die Resultate. Der Stamm einer zerfallenden Form besteht nur aus zerfallenden Formen.

§ 11.

Relationen.

Eine *Relation* ist nach § 8 eine Umwandlungsformel, welche keine Reductionsformel ist, in welcher also entweder gar keine isolirten Glieder vorkommen oder in welcher die isolirten Glieder paarweise oder zu mehreren derselben Gattung angehören. Wie in § 9 bemerkt wurde, dienen die Relationen bei dem vereinfachten Verfahren der Einführung von Producten in Invarianten zum Symmetrischmachen des Resultats. Aber auch beim symmetrischen Verfahren (§ 5) kann das Resultat vermittelst der Relationen umgeändert werden, damit die zweiten Coefficienten einfacher werden, insbesondere lassen sich dadurch bisweilen Factoren aus dem Nenner des Gesammtresultats wegbringen.

In § 6 wurde bemerkt, dass die Einführung von rationalen ganzen Functionen von Formen in eine Invariante zu denselben Gattungen von Invarianten führt, wie wenn bloss Producte eingeführt werden. Hiermit scheinen aber folgende Thatsachen im Widerspruch zu stehen:

In der Formel (II) Math. Ann. 36, pag. 100, mittelst der in die Invariante $(abc)^2$ ein Product von Formen eingeführt wird, fehlt die dem Stamm derselben angehörige irreducible Gattung $(aa'a'')(aa'a''')$. Bei der Lösung derselben Aufgabe für die Invariante $(abcd)^2$ fehlen die ihrem Stamm angehörigen irreduciblen Gattungen

$$(aba'a''')(aba''a^{IV});\ (aa'a''a''')(aa'a''a^{IV});\ (aa'a''a^{IV})(aa'a'''a^{V});$$
$$(aa'a'''a^{V})\,(aa''a^{IV}a^{VI}).$$

Diesen Thatsachen liegen zwei verschiedene Ursachen zu Grunde:

a) Die Invarianten

$$(aba'a''')(aba''a^{IV});\ (aa'a''a^{IV})(aa'a'''a^{V});\ (aa'a'''a^{V})(aa''a^{IV}a^{VI})$$

sind schiefsymmetrisch in Bezug auf mindestens ein Argumentpaar; zu jeder erscheint daher eine zweite, welche sie aufhebt, aber nur, wenn wie bei der Einführung eines Products in $(abcd)^2$, das Argument-

paar an Stelle von Symbolen tritt, die zu demselben Argument gehören. Werden aber Producte in die Invariante $(aa'a''a''')^2$ eingeführt, so ist das nicht mehr der Fall und es treten die betreffenden Gattungen in der Formel wirklich auf.

b) Was die Invariante $(aa'a'')(aa'a''')$ betrifft, so erscheinen die Bildungen $(aa'a'')(aa'a''')$; $(aa''a')(aa''a''')$; $(a'a''a)(a'a''a''')$ in Folge von Reductionen mit demselben Coefficienten behaftet. Aber die Summe dieser drei Bildungen ist nach der Formel (2) (a. a. O. pag. 99) gleich der Invariante $(aa'a'')^2 \cdot f_3$; es liegt hier der Fall vor, dass eine Simultaninvariante zwar irreducibel, die Summe der aus ihr durch gewisse Vertauschungen hervorgehenden aber reducibel ist. Anders ist es dann wieder, wenn wir statt von $(abc)^2$ von $(aa'a'')^2$ ausgehen; denn alsdann können neben der Bildung $(aa'a'')(aa'a''')$ die beiden andern oben angeführten nicht vorkommen. Für die Bildung $(aa'a''a''')(aa'a''a^{IV})$ liegt die Sache ganz ähnlich.

Solche Relationen, deren sämmtliche isolirten Glieder zerfallen, heissen nach Sylvester Syzyganten; ihre Untersuchung steht gegenwärtig in der Invariantentheorie im Vordergrund.

§ 12.

Voll- und Minderformen.

Es ist weiter die Frage zu beantworten, ob bei dem dieser Abhandlung zu Grunde liegenden Problem die Ordnungen der Argumentformen wirklich nur insofern in Betracht kommen, als sie an der Bildung der in § 5 erwähnten zweiten Coefficienten Theil nehmen. Es zeigt sich, dass das nicht der Fall ist. Zunächst giebt es für jedes Argument einer Invariante J eine Zahl, unter welcher seine Ordnung nicht bleiben darf, nämlich die Zahl der Klammerfactoren, in welchen das am öftesten unter den Symbolen des Arguments auftretende vorkommt. Man könnte diese Zahl als *untere Grenze* des Arguments bezeichnen. Sylvester hat sie (Am. Journ. of math. I, pag. 122) „range" genannt und definirt sie als die um Eins verminderte Zahl der zu dem betreffenden Argument gehörigen (nichtsymbolischen) Coefficienten, welche in die Invariante (oder, wenn eine Covariante vorliegt, in die dieselbe erzeugende Differentiante) eingehen. In der Invariante $(ab)^2(ac)(ba')(bb')(b'a'')$ sind die untern Grenzen für die Argumente $f_0 f_1 f_2$ resp. $4, 2, 1$, weil ihre am öftesten vorkommenden Symbole resp. b, b', a'' sind. Sinkt die Ordnung eines Arguments unter seine untere Grenze herab, so muss die Invariante als *illusorisch* bezeichnet werden.

Wenn dagegen die Ordnungen aller Argumente ihre unteren Grenzen erreichen oder überschreiten, so ist zwar die Bildung der

Invariante möglich, ihre *Eigenschaften* sind aber keineswegs von der Ordnung der Argumente unabhängig. Sollen nämlich an einer Invariante alle Umformungen, welche mittelst der Formel (I) des § 8 theoretisch möglich sind, auch wirklich ausgeführt werden können, so muss jedes Symbol in jeden Klammerfactor, in dem es fehlt, hineingebracht werden können, wozu aber jedesmal ein Linearfactor, der das betreffende Symbol enthält, erforderlich ist. Es muss also die Ordnung jedes Arguments mindestens gleich der Zahl der Klammerfactoren, d. h. gleich dem Index der Invariante sein. Ist sie grösser, so kommen nur noch Linearfactoren hinzu, deren Vorhandensein oder Fehlen ohne Belang ist. Bezeichnet man eine algebraische Form, deren Ordnung mindestens gleich dem Index einer Invariante ist, als *Vollform* in Bezug auf die Invariante, so gilt der Satz: Invarianten, welche lauter Vollformen zu Argumenten haben, besitzen die Gesammtheit der ihnen vermöge ihres Aufbaues zukommenden Eigenschaften; man kann dieselben als *regelmässige* Invarianten bezeichnen.

Nennen wir ferner eine algebraische Form, deren Ordnung kleiner ist als der Index einer Invariante, eine *Minderform* in Beziehung auf dieselbe, so gilt der weitere Satz: Der Eintritt von einer oder mehreren Minderformen in eine Invariante hat zur Folge, dass sie entweder illusorisch wird (s. oben) oder aber wenigstens einen Theil ihrer Umformungseigenschaften einbüsst, weil sie nicht mehr sämmtliche erforderlichen Linearfactoren enthält. Im letztern Fall wäre die Invariante als *unregelmässig* zu bezeichnen. Insbesondere kann diese Unregelmässigkeit darin bestehen, dass gerade diejenige Umwandlungsformel, welche zur Reduction einer reducibeln Invariante dient, unmöglich wird; die Invariante ist dann durch den Eintritt der Minderformen irreducibel geworden. Die irreducibeln unregelmässigen Invarianten, welche also theils aus den irreducibeln, theils aus den reducibeln Invarianten des Stammes einer Invariante J durch den Eintritt der Minderformen entstehen, sind dem Stamm der Invarianten als *accessorische* Invarianten hinzuzufügen. Die Zahl ihrer Gattungen wird im Allgemeinen grösser sein, als die Zahl der Gattungen der regelmässigen Invarianten. Bei der Hesse'schen Covariante im ternären Gebiet erscheinen als accessorisch die von mir mit T, Σ, Q, P, G, K, F, B, R, J, M, C, E bezeichneten Bildungen (Math. Ann. 36, pag. 102). Von diesen sind Σ, Q, P, G, K, F, J, M, E aus reduciblen Invarianten hervorgegangen; T ist Theilinvariante einer zerfallenden Form, welche wegen Eintritts von Minderformen nicht mehr reducirbar ist.

Als weiteres Beispiel eines Stammes mit vielen accessorischen Invarianten diene die Invariante $(ab)^2\,(ac)$. Ich beschränke mich auf die Aufzählung der Linearinvariantengattungen, denen alsdann ihre

irreducibeln Remananten beizufügen wären. Von den 6 regelmässigen Gattungen sind nur zwei irreducibel: $(aa')^2(aa'')$ und $(aa')(aa'')(aa''')$. Hierzu kommen accessorische Invarianten, in denen $u, u' \ldots$ lineare, $\alpha, \alpha' \ldots$ quadratische Symbole sind:

a) aus den irreduciblen regelmässigen Invarianten:

α) aus $(aa')^2(aa'')$:

$(a\alpha)^2(aa')$; $(aa')^2(a\alpha)$; $(aa')^2(au)$; $(a\alpha)^2(a\alpha')$; $(a\alpha)^2(au)$,

β) aus $(aa')(aa'')(aa''')$:

$(aa')(aa'')(a\alpha)$; $(aa')(aa'')(au)$; $(aa')(a\alpha)(a\alpha')$;
$(aa')(a\alpha)(au)$; $(aa')(au)(au')$; $(a\alpha)(a\alpha')(a\alpha'')$;
$(a\alpha)(a\alpha')(au)$; $(a\alpha)(au)(au')$; $(au)(au')(au'')$.

b) aus den reducibeln regelmässigen Invarianten:

α) aus $(aa')^2(a''a''')$: keine.

β) aus $(aa')(aa'')(a'''a^{IV})$:

$(a\alpha)(a\alpha')(u''u''')$.

γ) aus $(aa')(a''a')(aa''')$:

$(a\alpha')(a''\alpha')(a\alpha''')$; $(a\alpha')(u\alpha')(a\alpha'')$; $(a\alpha')(u\alpha')(a\alpha')$.

δ) aus $(aa')(a''a''')(a^{IV}a^{V})$:

$(uu')(u''u''')(u^{IV}u^{V})$.

Zu den 2 irreducibeln Gattungen kommen also noch 17 accessorische nichtzerfallende; aus den beiden zerfallenden $(a\alpha)(a\alpha')(u''u''')$ und $(uu')(u''u''')(u^{IV}u^{V})$ ergeben sich noch die Theilinvarianten $(a\alpha)(a\alpha')$ und (uu').

Ist allgemein in eine Invariante J eine rationale ganze Function von Grundformen einzuführen, unter welchen Minderformen sind, so ist zunächst nach § 6 zu verfahren; dann aber sind die illusorisch werdenden Invarianten einfach zu streichen und die Reduction mit Rücksicht auf die Minderformen auszuführen. Ist der Index der Invariante erheblich kleiner, als die Ordnung der $F^{(k)}$ in den Veränderlichen, so ist es empfehlenswerth, die Minderformen zu „engeren Producten" zusammenzufassen und diese erst nach erfolgter Reduction aufzulösen, in derselben Weise wie (Math. Ann. 36, pag. 106) bei der Hesse'schen Covariante im ternären Gebiet mit den linearen Grundformen verfahren wurde. Die Entscheidung, welche Formen irreducibel sind, wird dadurch erleichtert.

Ein sehr instructives Beispiel für den Einfluss der Minderformen ist die Discriminante der cubischen Form, welche reducibel wird, wenn man die cubische Form durch eine biquadratische ersetzt. In den Vollbesitz ihrer Eigenschaften gelangt die betreffende Bildung jedoch erst für eine Form 6. Ordnung.

Für die Ordnung 4 ist:

$$(ab)^2\,(cd)^2\,(ac)\,(bd)\,a_x\,b_x\,c_x\,d_x$$
$$= -\frac{1}{2}\,(ab)^4\cdot(cd)^2\,c_x^2\,d_x^2 + \frac{1}{3}\,(ab)^2\,(ac)^2\,(bc)^2\cdot d_x^4.$$

Für die Ordnung 5 wird weiter:

$$(ab)^2\,(ac)^2\,(bc)^2\,a_x\,b_x\,c_x = -2(ab)^3\,(ac)^2\,(bc)\,b_x\,c_x^2$$
$$= -(ab)^4\,(ac)\,(bc)\,c_x^3,$$

also

$$(ab)^2\,(cd)^2\,(ac)\,(bd)\,a_x^2\,b_x^2\,c_x^2\,d_x^2$$
$$= -\frac{1}{2}\,(ab)^4\,a_x\,b_x\cdot(cd)^2\,c_x^3\,d_x^3 - \frac{1}{3}\,(ab)^4\,(ac)\,(bc)\,c_x^3\cdot d_x^5.$$

Für die Ordnung 6 stellt sich die regelmässige Reduction ein.

Es ist:

$$(ab)^4\,(ac)\,(bc)\,a_x\,b_x\,c_x^4 = -(ab)^5\,(ac)\,b_x\,c_x^5 + (ab)^4\,(ac)^2\,b_x^2\,c_x^4$$
$$= -\frac{1}{2}\,(ab)^6\cdot c_x^6 + (ab)^4\,(ac)^2\,b_x^2\,c_x^4,$$

daher:

$$(ab)^2\,(cd)^2\,(ac)\,(bd)\,a_x^3\,b_x^3\,c_x^3\,d_x^3$$
$$= -\frac{1}{2}\,(ab)^4\,a_x^2\,b_x^2\cdot(cd)^2\,c_x^4\,d_x^4 - \frac{1}{3}\,(ab)^4\,(ac)^2\,b_x^2\,c_x^4\cdot d_x^6$$
$$+\frac{1}{6}\,(ab)^6\cdot c_x^6\,d_x^6.$$

Man bemerke, wie bei dieser successiven Reduction die Zahl der Zusammenhänge wächst, wie folgende Uebersicht zeigt:

Invariante	Zahl der Zusammenhänge	Invariante	Zahl der Zusammenhänge
$(ab)^2(cd)^2(ac)(bd)$	12	$(ab)^4\,(ac)\,(bc)$	21
$(ab)^4\cdot(cd)^2$	14	$(ab)^4\,(ac)^2$	22
$(ab)^2\,(ac)^2\,(bc)^2$	18	$(ab)^5\,(ac)$	25
$(ab)^3\,(ac)^2\,(bc)$	19	$(ab)^6$	30

Bei der Umformung mittelst der Formel (II) des § 8 kommt es auf Linearfactoren gar nicht an. Daher sind solche Umformungseigenschaften der Invarianten, welche aus dieser Formel allein hergeleitet werden, von der Ordnung der Argumente völlig unabhängig (immanent).

Es giebt Invarianten, welche keine accessorischen Invarianten zu bilden vermögen. Das sind solche, welche mittelst der Formel (II) des § 8 allein reducibel sind, z. B.

$$(ab)^3\,(ac)\,(bd)\,(cd) = \frac{1}{2}\,(ab)^4\,(cd)^2,$$

oder solche, bei denen von allen Argumenten wenigstens je ein Symbol in jedem Klammerfactor vorkommt, z. B. $(aba')^2\,(aca')$.

Zwei derselben Gattung angehörigen Invarianten, bei denen *die Ordnungen der Argumente, soweit dieselben Minderformen sind, übereinstimmen*, haben beide *dieselben Umformungseigenschaften* und man kann sagen, dass sie derselben *Art* angehören. Jede Gattung besitzt eine regelmässige Art und kann noch eine Anzahl unregelmässiger umfassen.

§ 13.

Linearsymbole.

Die Symbole der linearen Grundformen, *Linearsymbole* genannt, zeichnen sich durch zwei fundamentale Eigenschaften aus:

a) sie sind unfähig Zusammenhänge zu bilden, so dass jede Invariante zerfällt, welche einen Klammerfactor mit lauter Linearsymbolen enthält.

b) Jede Invariante verschwindet, wenn in einem Klammerfactor zwei gleichbedeutende Linearsymbole vorkommen.

Wenn man in der Formel (I) des § 8 an Stelle der Symbole $aa' \ldots a^{(\lambda-1)}$ und α Symbole linearer Formen setzt, so entsteht eine Umwandlungsformel von ganz besonderem Charakter; sie ist keine ursprüngliche, denn sie besitzt kein isolirtes Glied; sie kann aber auch nicht aus ursprünglichen hergeleitet werden.

Aus der Theorie der Invarianten mit lauter Linearsymbolen seien noch zwei Punkte hervorgehoben:

Wenn man im Gebiet λ^{ter} Stufe in eine wirkliche Invariante vom Index μ als Argumente rationale ganze Functionen von λ linearen Formen einführt, so erhält man die μ^{te} Potenz der Functionaldeterminante der λ Grundformen multiplicirt mit einem von den Coefficienten jener Functionen abhängigen Ausdruck. Fasst man nun jene Grundformen als Veränderliche auf, so sind die Functionen nichts anderes als algebraische Formen und jener Ausdruck die *nichtsymbolische* Form der Invariante, welche die genannten Formen zu Argumenten hat. Liegt eine Covariante vor, so treten auch die Veränderlichen in den nichtsymbolischen Ausdruck ein. Die Functionaldeterminante würde durch ihr Verschwinden anzeigen, dass man die λ linearen Formen wegen einer zwischen ihnen bestehenden Relation nicht als unabhängige Veränderliche behandeln darf.

Jede binäre Form m^{ter} Ordnung f, bei welcher der Coefficient von x^m den Werth Eins hat, kann angesehen werden als Product von m Linearfactoren von der Form $\alpha_1^{(i)} x_1 + \alpha_2^{(i)} x_2$. Setzt man sodann $\xi_i = \frac{-\alpha_2^{(i)} x_2}{\alpha_1^{(i)}}$, so sind die ξ_i die Wurzeln der Gleichung in $x_1 = x$, welche entsteht, wenn man f gleich Null und x_2 gleich Eins setzt.

Bekanntlich ist nun jede Invariante J von f eine solche symmetrische Function der Wurzeldifferenzen der Gleichung $f = 0$ (und wenn sie eine Covariante ist, auch der Wurzeln), welche in allen Wurzeln von gleichem Grad g ist und umgekehrt. Man drückt nun den Werth einer Invariante in den Wurzeldifferenzen aus, indem man für f das Product der m Factoren $\alpha_x^{(i)} = \alpha_1^{(i)} x_1 + \alpha_2^{(i)} x_2$ als Argument einführt (vergl. Gordan-Kerschensteiner a. a. O. pag. 41). Aus der entstehenden zusammengesetzten Invariante erhält man den Werth von J in den Wurzeldifferenzen (und Wurzeln) indem man an Stelle von $(\alpha^{(i)}\alpha^{(k)})$ die Grösse $\xi_k - \xi_i$ und an Stelle von α_x^i die Grösse $x - \xi_i$) einsetzt. Setzt man aber statt dessen in obiger zusammengesetzter Invariante an Stelle von $\alpha'\beta'\gamma'\ldots$ das neue Symbol a', an Stelle von $\alpha''\beta''\gamma''\ldots$ das damit gleichbedeutende b' u. s. f. so bekommt man eine Invariante vom Index μ und vom Grade m in den Coefficienten einer Form g^{ter} Ordnung: also die Invariante, welche der ursprünglichen nach dem in § 1 erwähnten Hermite'schen Satze reciprok ist.

Z. B. die Einführung von $a_x^3 = \alpha_x' \alpha_x'' \alpha_x'''$ in

$$(a\,b)^2\,(c\,d)^2\,(a\,c)\,(b\,d)$$

ergiebt:

$$\frac{2}{27}(\alpha'\beta'')(\alpha''\beta''')(\gamma''\delta')(\gamma'''\delta'')(\alpha'''\gamma')(\beta'\delta''') = -\frac{2}{27}(\xi_2-\xi_3)^2(\xi_3-\xi_1)^2(\xi_1-\xi_2)^2$$

als Ausdruck in den Wurzeldifferenzen und

$$-\frac{2}{27}(a'b')^2\,(a'c')\,(b'c')^2$$

als reciproke Invariante. Reciprok zur Covariante

$$(a\,b)^2(a\,c)\,a_x\,b_x^{\,2}\,c_x^{\,3}$$

findet man

$$\frac{1}{6}(a'b')^2\,(a'c')\,b_x'\,c_x'^{\,2}\,.\,d_x'^{\,3} \text{ u. s. f.}$$

§ 14.

Invarianten rational gebrochener Functionen von Formen.

Weil jede rational gebrochene Function auf die Form eines Quotienten zweier ganzen Functionen gebracht werden kann, so hat man nur die Aufgabe zu behandeln in eine Invariante J als Argument den Quotienten $f = \frac{\varphi}{\psi}$ einzuführen, wo φ und ψ ganze Functionen sind. Aus dieser Gleichung folgt

$$\varphi = f\,.\,\psi.$$

Wendet man nun die Invarianten auf diese Gleichung an d. h. führt man zuerst φ, dann $f\,.\,\psi$ als Argument in die Invariante ein und setzt, was erlaubt ist, die Resultate einander gleich, so erhält man eine

Gleichung, in welcher, wie aus § 5 gefolgert werden kann, rechts $J(f)$ vorkommt, ausserdem aber Simultaninvarianten $J'(f,\psi)\,J''(f,\psi)\ldots$ welche dem Stamm von J angehören. Diese werden nun ebenfalls auf die Gleichung angewandt, indem man an Stelle des Arguments f einerseits φ, andrerseits $f\,.\,\psi$ setzt. Man erhält Gleichungen, welche rechts resp. die Grössen $J'(f,\psi)\,J''(f,\psi)\ldots$ enthalten, ausserdem eventuell neue, deren Stämmen angehörige Simultaninvarianten mit denen ebenso verfahren wird. Man muss aber endlich auf eine letzte Invariante $J^{(r)}(f,\psi)$ kommen, weil dem Stamm von J nur eine endliche Anzahl von Gattungen angehören und nur eine endliche Zahl von Argumenten nämlich f und ψ in Betracht kommen. Man hat alsdann $r+1$ in den Invarianten lineare Gleichungen mit den Invarianten

$$J(\varphi),\ J'(\varphi,\psi)\ldots J^{(r)}(\varphi,\psi)$$

auf der linken Seite. Eliminirt man aus ihnen die r Grössen

$$J'(f,\psi)\ldots J^{(r)}(f,\psi),$$

so bleibt gerade noch eine Gleichung zur Bestimmung der gesuchten Invariante $J(f)$. Man hat nur noch f durch $\frac{\varphi}{\psi}$ zu ersetzen und erhält dann $J(f)$ ausgedrückt durch φ, ψ und deren Invarianten.

Beispiel. Im ternären Gebiet soll die Hesse'sche Form $(abc)^2$ für $a_x^2 = f$ der Quotient $\frac{\varphi}{\psi}$ eingeführt werden, wo $\varphi = a_x'^4$; $\psi = a_x''^2$,

Mit den Abkürzungen

$$(abc)^2 = H(f);\ (aba')^2 a_x'^2 = D(f,\varphi);\ (aba')(aa'b')b_x a_x'^2 b_x'^3 = \Phi(f\varphi)$$

u. s. f. erhält man:

$$H(\varphi) = H(f.\psi) = \tfrac{1}{24}H(f)\,\psi^3 - \tfrac{1}{24}D(f,\psi)\,f\psi^2 - \tfrac{1}{24}D(\psi,f)f^2\psi + \tfrac{1}{24}H(\psi)f^3 - \tfrac{1}{8}\Phi(f,\psi)f\psi,$$

$$D(\varphi,\psi) = D(f.\psi,\psi) = \tfrac{1}{36}D(f,\psi)\psi^2 - \tfrac{1}{18}D(\psi,f)f\psi + \tfrac{5}{3}H(\psi)f^2 - \tfrac{4}{9}\Phi(f,\psi)\,\psi,$$

$$D(\psi,\varphi) = D(\psi,f.\psi) = \tfrac{1}{6}D(\psi,f)\psi + \tfrac{7}{18}H(\psi)f,$$

$$\Phi(\varphi,\psi) = \Phi(f.\psi,\psi) = \tfrac{1}{4}\Phi(f,\psi)\psi^2 + \tfrac{1}{24}D(\psi,f)f\psi^2 - \tfrac{5}{72}H(\psi)f^2\psi.$$

Hieraus folgt durch Elimination von $D(f,\psi)$, $D(\psi,f)$, $\Phi(f,\psi)$:

$$H(f) = \frac{24H(\varphi)}{\psi^3} + \frac{36D(\varphi,\psi)f}{\psi^3} - \frac{6D(\psi,\varphi)f^2}{\psi^3} + \frac{3H(\psi)f^3}{\psi^3} - \frac{96\Phi(\varphi,\psi)f}{\psi^4}$$
$$= \frac{24H(\varphi)}{\psi^3} + \frac{36D(\varphi,\psi)\varphi}{\psi^4} - \frac{6D(\psi,\varphi)\varphi^2}{\psi^5} + \frac{3H(\psi)\varphi^3}{\psi^6} - \frac{96\Phi(\varphi,\psi)\varphi}{\psi^5}.$$

§ 15.

Invarianten irrationaler Functionen von Formen.

Soll in eine Invariante J eine Form f als Argument eingeführt werden, die nur implicite durch eine Gleichung n. Grads gegeben ist, welche sie mit andern Formen verbindet, so verfährt man ähnlich wie in § 14. Man wendet die Invariante J auf die gegebene Gleichung an, nachdem man dieselbe nicht etwa auf Null gebracht, sondern ihr vielmehr eine solche Form gegeben hat, dass die Glieder möglichst gleichmässig auf beiden Seiten vertheilt sind. Die ausser $J(f)$ in der entstehenden Gleichung vorkommenden, f enthaltenden Invarianten werden ebenso auf die gegebene Gleichung angewendet u. s. f. endlich kommt man wie in § 14 auf eine letzte Invariante. Man hat dann so viel Gleichungen, wie Invarianten, die von f abhängen und kann daher $J(f)$ aus denselben berechnen. Man erhält $J(f)$ eindeutig und wenn man zwischen der Bestimmungsgleichung und der gegebenen f eliminirt, ergiebt sich $J(f)$ als Wurzel einer Gleichung n. Grads.

Beispiele.

1) Ist $f = a_x^3$; $\varphi = a_x'^3$; $\psi = a_x''^3$, so soll in die Invariante

$$C_0 = (ab)^2\,(ac)\,b_x\,c_x^2$$

der für f aus der Gleichung $f^2 = \varphi \,.\, \psi$ folgende Werth eingesetzt werden. Mit den Bezeichnungen:

$$(aa')^2\,(ab)b_x^2 a_x' \equiv (ab)^2(aa')b_x a_x'^2 = D_{01}$$

und

$$(a'a)^2(a'b)a_x b_x^2 = E_{01},$$

hat man

$$C(f^2) = C(\varphi \,.\, \psi)$$

oder

$$\tfrac{1}{10} C_0 f^3 = \tfrac{1}{8} C_1 \psi^3 - \left(\tfrac{1}{50} D_{12} + \tfrac{11}{200} E_{12}\right)\varphi\psi^2 - \left(\tfrac{1}{50} D_{21} + \tfrac{11}{200} E_{21}\right)\varphi^2\psi + \tfrac{1}{8} C_2 \varphi^3,$$

somit wenn man f eliminirt:

$$C_0 = \pm\left(\tfrac{5}{4} C_1 \tfrac{\psi}{\varphi^2} - \left(\tfrac{1}{5} D_{12} + \tfrac{11}{20} E_{12}\right)\tfrac{1}{\varphi} - \left(\tfrac{1}{5} D_{21} + \tfrac{11}{20} E_{21}\right)\tfrac{1}{\psi} + \tfrac{5}{4} C_2 \tfrac{\varphi}{\psi^2}\right)\sqrt{\varphi \,.\, \psi}.$$

2) Die Invariante $A_0 = (ab)^2$ soll berechnet werden, wenn

$$f^2 + 2f\varphi + \psi = 0,$$

wobei

$$\varphi = a_x'^2, \quad \psi = a_x''^4.$$

Mit der Bezeichnung $B_{01} = (aa')^2$ erhält man:

$$A(f^2) = A(-2f\varphi - \psi)$$

oder

$$\text{(a)}\quad \left(\tfrac{1}{3}f^2 - \varphi^2\right) A_0 + \tfrac{2}{3}(f\varphi - 2\psi) B_{01} - 2\varphi B_{02} = A_1 f^2 + 2B_{12} f + A_2,$$

$$B(f^2, \varphi) = B(-2f\varphi - \psi, \varphi)$$

oder

$$\text{(b)}\quad -\varphi A_0 + \left(f + \tfrac{1}{3}\varphi\right) B_{01} = -A_1 f - B_{12},$$

endlich

$$B(f^2, \psi) = B(-2f\varphi - \psi, \psi)$$

oder

$$\text{(c)}\quad -\tfrac{1}{3}\psi A_0 - \tfrac{2}{3}\psi B_{01} + (f + \psi) B_{02} = -B_{12} f - A_2.$$

Aus den Gleichungen (a), (b) und (c) kann durch Elimination von B_{01} und B_{02} eine lineare Gleichung für A_0 gewonnen werden; aus dieser und der gegebenen Gleichung ist noch f zu eliminiren.

§ 16.

Multiplicirte Invarianten.

Der Berechnung von Invarianten gebrochener oder irrationaler Functionen stellt sich in gewissen Fällen ein unerwartetes Hinderniss entgegen. Durch die Bestimmungsgleichung, welche in den Veränderlichen homogen sein muss, wird der Form f eine bestimmte Ordnung zugeschrieben, die bei irrationalen Functionen auch gebrochen sein kann. Ist nun diese Ordnung eine ganze Zahl grösser als Null aber kleiner als die untere Grenze des Arguments f in J (cf. § 12), so wird die Invariante illusorisch — wenn f eine rationale ganze Function ist. Ist letzteres nicht der Fall, so kann zwar der Invariante J ein bestimmter Werth nicht abgesprochen werden, man kann aber zunächst nicht zu diesem Werth gelangen, weil in den zur Bestimmung dienenden Formeln die Invariante J den Coefficienten Null erhält und daher herausfällt.

Um diesem Uebelstand abzuhelfen, führt man an Stelle der Invarianten überhaupt andere Grössen ein, welche *multiplicirte Invarianten* heissen mögen. Die multiplicirte Invariante J^* einer Invariante J ist die Grösse J, multiplicirt mit einem Product, das zu Stande kommt, wenn für jedes Symbol a einer Form $a_x^{m_0}$ welches in r Klammerfactoren von J vorkommt, $\frac{m_0!}{(m_0 - r)!}$ als Factor genommen wird. Dann reducirt sich der zweite Coefficient in § 5 auf $\prod \frac{1}{f_i^{(k)}{}_r}$ und ist daher von der Ordnung der Argumente unabhängig. Dagegen erscheinen in den

Reductionsformeln und in den Relationen Coefficienten, die von den Ordnungen der Argumente herrühren, wenn dieselben in den multiplicirten Invarianten geschrieben werden.

Beispiel. Es sei in $A_0 = (ab)^2$, $f = \frac{\varphi}{\psi}$ einzuführen, wenn

$$\varphi = a_x'^2 \quad \text{und} \quad \psi = a_x''^2$$

quadratische Formen sind.

Mit den Bezeichnungen

$$(aa')^2 = B_{01}; \quad (aa')(ab)b_x a_x' = V_{01}; \quad (ab')(a'b)a_x b_x a_x' b_x' = W_{01}$$

erhält man:

$$A_1^* = A_0^* \psi^2 + 2 B_{02}^* f\psi + A_2^* f^2 + 4 V_{02}^* \psi + 4 V_{20}^* f + 2 W_{02}^*.$$

Aus den Reductionsformeln:

$$W_{02} = V_{02}\psi + V_{20} f - B_{02}'\psi,$$

$$V_{02} = \tfrac{1}{2} A_0 \psi,$$

$$V_{20} = \tfrac{1}{2} A_2 f$$

folgen, wenn f von der m^{ten}, ψ von der n^{ten} Ordnung ist und $m+n=\mu$ gesetzt wird:

$$W_{02}^* = \frac{n}{m-1} V_{02}^* \psi + \frac{m}{n-1} V_{20}^* f - \frac{mn}{(m-1)(n-1)} B_{02}^* f \cdot \psi,$$

$$V_{02}^* = \frac{1}{2} \frac{n}{m-1} A_0^* \psi,$$

$$V_{20}^* = \frac{1}{2} \frac{m}{n-1} A_2^* f,$$

also

$$A_1^* = \frac{(\mu-1)^2}{(m-1)^2} A_0^* \psi^2 - \frac{2(\mu-1)}{(m-1)(n-1)} B_{02}^* f\psi + \frac{(\mu-1)^2}{(m-1)^2} A_2^* f^2,$$

und weil hier $m = 0$; $n = \mu = 2$:

$$A_1^* = A_0^* \psi^2 + 2 B_{02}^* f\psi + A_2^* f^2$$

ferner ist

$$B_{12}^* = A_{02}^* \psi + A_2^* f$$

somit

$$A_0^* = \frac{A_1^*}{\psi^2} - \frac{2 B_{12}^* \varphi}{\psi^3} + \frac{A_2^* \varphi^2}{\psi^4}.$$

Den Ausführungen des § 14 und 15 gegenüber muss die Frage aufgeworfen werden, ob es wirklich erlaubt sei mit gebrochenen und irrationalen Formen symbolisch zu rechnen, gerade wie mit ganzen Formen. In der That ist das gestattet. Denn jeder symbolische Ausdruck kann auf einen Differentialausdruck zurückgeführt werden, indem man die Klammerfactoren ausmultiplicirt und alsdann ein Product $a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma \ldots a_\lambda^\nu$ durch $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots+\nu} f}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \partial x_3^\gamma \ldots \partial x_\lambda^\nu}$ ersetzt.

Die Ausführung dieser Differentialoperation ergiebt die Invariante, aber — als multiplicirte Invariante. Die Weglassung der oben genannten Factoren ist also der einzige Unterschied zwischen der Invariantentheorie und der Differentialrechnung und zugleich der einzige Punkt, wo die Invariantentheorie von der Voraussetzung ganzer Formen Gebrauch macht; daher entstehen beim Vorkommen gebrochener und irrationaler Formen Uebelstände, welche bei Einführung der multiplicirten Invarianten d. h. bei der Rückkehr zum Standpunkt der Differentialrechnung verschwinden. Im Uebrigen kommt die symbolische Rechnung auf Operationen mit Differentialsymbolen und auf Relationen zwischen solchen hinaus und bei diesen ist die Voraussetzung ganzer Formen durchaus überflüssig.

§ 17.

Invarianten von Invarianten.

Ist in eine Invariante J eine einfache Invariante J' als Argument einzuführen, so kann nach den Regeln des § 5 verfahren werden. Die Gesammtheit der Klammerfactoren wird hiebei als eine multiplicative Constante behandelt und jeder Linearfactor wird mit sämmtlichen ihm gleichen zu einer Grundform zusammengefasst, so dass also ein Product von Grundformen vorliegt. Wenn nun hiebei die Constante in n^{ter} Potenz aufzutreten hat, so müssen die Klammerfactoren n-mal, jedesmal mit andern Buchstaben geschrieben werden. Soll z. B. in die Invariante $A_0 = (ab)^2 a_x b_x$ die Invariante $C_0 = (ab)^2 (ac)\, b_x c_x^2$ als Argument eingeführt werden, so hat man zu berechnen:

$$(ab)^2 (ac)\, (de)^2 (df) \,.\, A(b_x c_x^2 \,.\, e_x f_x^2).$$

Die Rechnung ergiebt schliesslich

$$\tfrac{1}{2} (ab)^2 (de)^2 (ad) (be) \,.\, (cf)^2 c_x^2 f_x^2 .$$

Ist J' eine zusammengesetzte Invariante, so ist nach § 3 zu verfahren.

Wenn eine Invariante J'' dadurch entsteht, dass in eine Invariante J eine Invariante J' als Argument eingeführt wird, so kann die Aufgabe, in J'' das Product von n Formen einzuführen, durch ein vereinfachtes Verfahren gelöst werden, wenn die Lösung derselben Aufgabe für die (jedenfalls einfacher gebauten) Invarianten J und J' bereits vorliegt. Das Verfahren erhellt aus folgendem Beispiel.

Es sei $(aa') = R_{01}$; $(ab)^2 = A_0$; $(ab)^2 (ac) = C_0$ so ist

$$C_0 = R(A_0, f_0).$$

Es seien ferner m und n die Ordnungen von f_0 und f_1;

$$m + n = \mu; \quad B_{01} = (aa')^2$$

und man habe bereits die Formeln gefunden:

$$R(f_0 \cdot f_1, f_2) = \frac{1}{\mu}(m^6 R_{02} f_1 + n R_{12} f_0),$$

$$A(f_0 \cdot f_1) = \frac{1}{\mu^2(\mu-1)}\left(m^2(\mu-1) A_0 f_1^2 - 2mn B_{01} f_0 f_1 + n^2(\mu-1) A_1 f_0^2\right).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} C(f_0 \cdot f_1) &= \frac{m}{\mu} R\left(A(f_0 \cdot f_1), f_0\right) f_1 + \frac{n}{\mu} R\left(A(f_0 \cdot f_1), f_1\right) f_0, \\ &= \frac{m}{\mu^3(\mu-1)}\Big\{m^2(\mu-1)\Big(\frac{2(m-2)}{2(\mu-2)} R(A_0 f_0) f_1^2 \\ &\qquad + \frac{2n}{2(\mu-2)} R(f_1, f_0) A_0 f_1\Big) \\ &\quad - 2mn\Big(\frac{\mu-4}{2(\mu-2)} R(B_{01}, f_0) f_0 f_1 \\ &\qquad + \frac{n}{2(\mu-2)} R(f_1, f_0) B_{01} f_1\Big) \\ &\quad + n^2(\mu-1)\frac{2(n-2)}{2(\mu-2)} R(A_1, f_0) f_0^2\Big\} \\ &\quad + \frac{n}{\mu^3(\mu-1)}\Big\{n^2(\mu-1)\Big(\frac{2(n-2)}{2(\mu-2)} R(A_1, f_1) f_0^2 \\ &\qquad + \frac{2m}{2(\mu-2)} R(f_0, f_1) A_1 f_0\Big) \\ &\quad - 2mn\Big(\frac{\mu-4}{2(\mu-2)} R(B_{01}, f_1) f_0 f_1 \\ &\qquad + \frac{m}{2(\mu-2)} R(f_0, f_1) B_{01} f_0\Big) \\ &\quad + m^2(\mu-1)\frac{2(m-2)}{2(\mu-2)} R(A_0, f_1) f_1^2\Big\}. \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen $(ab)^2(ac') = D_{01}$; $(a'b)^2(a'c) = E_{01}$ erhält man durch Reduction:

$$\begin{aligned} C(f_0 \cdot f_1) &= \frac{m^3}{\mu^3} C_0 f_1^3 - \frac{(3\mu-4)m^2 n}{\mu^3(\mu-1)(\mu-2)} D_{01} f_0 f_1^2 + \frac{2m^2 n}{\mu^3(\mu-1)(\mu-2)} E_{01} f_0 f_1^2 \\ &\quad + \frac{2mn^2}{\mu^3(\mu-1)(\mu-2)} E_{10} f_0^2 f_1 - \frac{(3\mu-4)mn^2}{\mu^3(\mu-1)(\mu-2)} D_{10} f_0^2 f_1 + \frac{n^3}{\mu^3} C_1 f_0^3. \end{aligned}$$

Das Verfahren ist einfacher als die beiden in § 5 und § 9 entwickelten Methoden; denn die bei Aufstellung der Formeln für $R(f_0 \cdot f_1, f_2)$ und $A(f_0 \cdot f_1)$ erforderlich gewesene Reductionsarbeit kommt der zu berechnenden Formel für $C(f_0 \cdot f_1)$ bereits zu Gute.

Die Brauchbarkeit der eben entwickelten Formel hört übrigens auf, wenn Minderformen (§ 12) vorkommen, beispielsweise wenn die Invariante $(ab)^2 a_x^2 b_x^2$ in die Invariante $(ab)^2(ac) a_x b_x^2 c_x^3$ einzuführen ist; denn alsdann sind a_x^2 und b_x^2 Minderformen in Bezug auf die

eben genannte Invariante. Dann muss das directe Verfahren des § 5 eingeschlagen werden und man erhält als Resultat:

$$-\tfrac{1}{3}(ab)^2\,(ac)^2\,(bc)^2\,.\,(de)^2\,(df)\,d_x e_x{}^2 f_x{}^3.$$

Anmerkung. In der Invariantentheorie hat sich längst aus dem Bedürfniss, Ueberschiebungen von Invarianten herzustellen, ein Verfahren herausgebildet, *Ueberschiebungen* von Producten von Formen zu berechnen (Gordan-Kerschensteiner a. a. O. pag. 39). Dieses Verfahren wird in vorliegender Abhandlung auf Invarianten ausgedehnt, die keine Ueberschiebungen sind, dasselbe wird ausserdem auf ternäre, quaternäre u. s. f. Formen ausgedehnt.

§ 18.

Invariantengleichungen. Die Umkehrprobleme der Invariantentheorie.

In § 15 wurde eine Invariante auf eine Gleichung zwischen Grundformen angewendet und hiedurch eine Gleichung zwischen Invarianten (und Grundformen) erhalten. Eine solche *nichtidentische* Gleichung zwischen Invarianten (und Grundformen) möge *Invariantengleichung* heissen.

Jede Invariantengleichung muss im allgemeinen eine *Lösung* besitzen, d. h. es muss eine Grundformengleichung existiren, aus welcher die Invariantengleichung dadurch, dass ein Invariantenprocess auf jene angewendet wird, hergeleitet werden kann. Denn nach § 16 lässt sich die Invariantengleichung in eine Differentialgleichung überführen, in welcher eine Grundform als abhängige Veränderliche auftritt. Es wird z. B. aus der Invariantengleichung:

$$(ab)^2\,(ac)\,b_x c_x{}^2 = a_x{}'^3$$

die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1{}^3}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2}\frac{\partial f}{\partial x_2} - 2\frac{\partial^3 f}{\partial x_1{}^2\partial x_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2{}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial^3 f}{\partial x_1{}^2\partial x_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2}\frac{\partial f}{\partial x_1}$$
$$+ 2\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2{}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial^3 f}{\partial x_2{}^3}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(= 18(ab)^2\,(ac)\,b_x c_x{}^2\right) = 18 f_1.$$

Eine solche Differentialgleichung gestattet natürlich die allgemeine projective Gruppe (Lie, Transformationsgruppen I, pag. 554) der Mannigfaltigkeit $x_1 \ldots x_2$. Bei binären Formen ist die Form der Differentialgleichung nur scheinbar partiell; sie kann durch Weglassung der homogenisirenden Veränderlichen in eine totale verwandelt werden. Die Lösung der Differentialgleichung, die übrigens auch transcendent sein kann, ist zugleich diejenige der Invariantengleichung. Die einfachste Invariantengleichung:

$$(aa')\,a_x{}^{m-1}\,a_x{}'^{n-1} = a_x{}''^{m+n-2}$$

führt auf eine Euler'sche Gleichung.

Enthält eine Invariantengleichung die Invarianten mehrerer Grundformen, so muss sie der Reihe nach nach diesen allen aufgelöst werden, indem man die Lösung so lange als Invariantengleichung behandelt, als Invarianten darin sind.

Auf das genannte Problem kann das folgende zurückgeführt werden, welches man als *erstes Umkehrproblem* der Invariantentheorie bezeichnen könnte:

Gegeben ist eine Invariantengleichung und eine Invariante; gesucht eine Invariantengleichung derart, dass wenn die gegebene Invariante auf sie angewendet wird, gerade die gegebene Invariantengleichung herauskommt. Man hat nur die gegebene Invariantengleichung auf Null zu bringen und die linke Seite gleich der gegebenen Invariante zu setzen; alsdann wird die entstehende Gleichung nach dem Argument der gegebenen Invariante aufgelöst und die Lösung gleich Null gesetzt.

Etwas allgemeiner ist die Aufgabe eine Invariante zu suchen, welche, als Argument in eine gegebene Invariante eingesetzt, eine andere gegebene Invariante liefert.

Die Invariantentheorie besitzt aber noch ein *zweites Umkehrproblem*. Man kann nämlich fragen ob es möglich ist, eine Invariante J'' von der Beschaffenheit zu finden, dass wenn man eine gegebene Invariante J in sie als Argument einführt, eine andere gegebene Invariante J' herauskommt. Im allgemeinen wird eine solche Invariante J'' existiren, indess wird sie sich nur für den Fall, dass sie algebraisch, rational und ganz ist, durch Versuche finden lassen. Ist z. B.

$$J = (ab)^2(ac)b_x c_x^2 = a_x'^3; \quad J' = (ab)^2(cd)^2(ac)(bd)$$

so ergiebt sich $J'' = (da')^3$. Die Invariante J' kann auch eine Grundform sein z. B.

$$J = (ab)^2 a_x^2 b_x^2 = a_x'^4;$$

$J' = a_x^4$ führt auf

$$J'' = \frac{6}{(ab)^4}(ca')^2 c_x^2 a_x'^2.$$

Wenn eine Grundform f gegeben ist, kann man fragen nach derjenigen Invariante, welche zweimal (oder auch öfter) angewandt, wieder auf die Form f führt, so dass also $J\big(J(f)\big) = f$. Für die binäre Form a_x^4 erhält man z. B.

$$J = \varkappa \,.\, a_x^4 + \lambda(ab)^2 a_x^2 b_x^2,$$

wo $\varkappa$ eine Wurzel der Gleichung:

$$(1-2\varkappa)^2(1+\varkappa)^2 = 24\varkappa^2 \frac{(ab)^2(ac)^2(bc)^2 \,.\, (de)^2(df)^2(ef)^2}{(ab)^4(cd)^4(ef)^4}$$

und

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{6(\varkappa^2+\varkappa)}{(ab)^4}}.$$

Für die binäre Form a_x^2 ist die gesuchte Invariante $(aa')a_x a_x'$, wo $a_x'^2$ die Lösung der Invariantengleichung

$$\frac{1}{2}(aa')^2 b_x'^2 - \frac{1}{2}(a'b')^2 a_x^2 = a_x^2.$$

§ 19.

Mehrfache Veränderliche, Symbole und Klammerfactoren.

Die Veränderungen, welche die vorstehenden Theorien erleiden, wenn in den Invarianten auch Veränderliche anderer Art als die gewöhnlichen auftreten, sollen hier nicht im Einzelnen aufgezählt werden. Wir behalten uns hiefür eine besondere Darstellung vor und machen für jetzt nur auf einige Punkte aufmerksam.

Als *r-fach* sollen *Veränderliche* bezeichnet werden, welche Determinanten von r-reihigen Matricen von Symbolen cogredient sind. Nach § 8 sind daher die gewöhnlichen Veränderlichen $\lambda - 1$-fach. Ein *r-faches Symbol* ist dann dasjenige einer Grundform mit $(\lambda - r)$-fachen Veränderlichen. Ausser den Klammerfactoren und Linearfactoren — letztere sind nunmehr Verbindungen eines r-fachen Symbols mit einer $(\lambda - r)$-fachen Veränderlichenreihe — erscheint jetzt noch eine dritte Art von Factoren, welche eine Veränderlichenreihe und zwei oder mehr Symbole enthalten; sie mögen *gemischte Factoren* heissen. Eine r-fache und eine s-fache Veränderlichenreihe in einem Factor werden zu einer $(r+s)$-fachen zusammengezogen. Eine Verbindung einer r-fachen und einer $(\lambda - r)$-fachen Veränderlichenreihe heisst bekanntlich *identische Covariante*. Für den *Index* wird eine neue Definition erforderlich, wobei es hauptsächlich darauf ankommt, dass der Beitrag der Linearfactoren zum Index Null ist.

Zur Umformung von Invarianten mit mehrfachen Symbolen sind die Formeln (I) und (II) des § 8 im allgemeinen nicht mehr ausreichend; es dienen hiefür Formeln, welche mehr als zwei symbolische Factoren betreffen.

Aus r-fachen Symbolen und Veränderlichen lassen sich aber auch *Klammerfactoren* und *gemischte Factoren* bilden, welche dann als *r-fache* zu bezeichnen sind. Solche Factoren sind Determinanten von der Reihenzahl $\binom{\lambda}{r}$ welche nur für $r = \lambda - 1$ mit λ übereinstimmt, sonst aber grösser als λ ist. Determinanten aus Complexsymbolen, d. h. Symbolen von Grundformen mit Liniencoordinaten im quaternären System, sind daher nicht vier- sondern sechsreihig. Es existiren Formeln um Producte, in welchen solche r-fache Factoren vorkommen, umzuformen; eine solche ist z. B. die Identität C bei Herrn Study (Methoden zur Theorie der ternären Formen pag. 75), in welcher $(U_1 U_2 U_3)$ ein

einfacher, $(X_1 X_2 X_3)$ ein doppelter Factor ist (vergl. die „verkürzten" Identitäten von Herrn Kleiber; Zeitschr. für Math. und Physik 37, pag. 84).

In den r-fachen Klammerfactoren können an Stelle von einzelnen oder allen r-fachen Symbolen (oder Veränderlichen) Determinanten einer r-reihigen Matrix von einfachen Symbolen (oder Veränderlichen) treten und dabei kann es geschehen, dass sich nunmehr der mehrfache Klammerfactor als rationale ganze Function von einfachen darstellen lässt, z. B. $\big(\alpha\,\beta\,(a\,b)\big)$ wo a, b einfache α, β Doppelsymbole sind, kann ersetzt werden durch

$$(\alpha\,a)\,(\beta\,b) - (\alpha\,b)\,(\beta\,a).$$

Unregelmässig möge ein r-facher Klammerfactor heissen, in welchem ein r-faches Symbol durch die Determinanten einer s-reihigen Matrix von t-fachen Symbolen (Veränderlichen) ersetzt ist, derart, dass $s \,.\, t = \varrho\,\lambda + r$ (wo ϱ eine ganze Zahl ist). In dem Beispiel

$$\big(a, b, (x\,y)\big) = a_x b_y - b_x a_y$$

sind die Zahlen $\lambda, r, s, t, \varrho$ resp. $3, 1, 2, 2, 1$.

In einer Invariante können als Argumente auch vorkommen Grundformen mit mehreren Reihen von Veränderlichen, welche ihrer Multiplicität nach gleich oder verschieden sein können. Diese Grundformen haben mehrere Symbole, welche als *verschmolzene* Symbole bezeichnet werden könnten; denn in einem symbolischen Product kann jedes nur zusammen mit allen übrigen auftreten. Uebrigens dürfen zwei mit einander verschmolzene Symbole zugleich in einem Klammerfactor vorkommen.

Dagegen giebt es auch Grundformen mit verschiedenen Veränderlichen, welche ihrerseits *verschiedenen Transformationen* unterliegen. Alsdann hat man es auch mit verschmolzenen Symbolen zu thun, von denen das Auftreten des einen das Erscheinen aller übrigen nach sich zieht. Aber die symbolischen Factoren zerfallen nun in Gruppen; in jeder derselben treten nur solche Symbole auf, welche je zu einer der verschiedenen Veränderlichenreihen gehören. Zwei verschmolzene Symbole können daher in diesem Falle nicht in demselben Klammerfactor vorkommen.

Endlich kann es noch geschehen, dass die verschiedenen Veränderlichenreihen sogar Gebieten verschiedener Stufe angehören, wie dies z. B. bei den von Herrn Study (a. a. O. pag. 110) betrachteten Gebilden der Fall ist, welche zugleich dem Gebiet 3^{ter} und demjenigen N^{ter} Stufe angehören.

Zusatz: Die interessanten Darlegungen des Herrn Kleiber (Ueber eine Methode zur Aufstellung eines vollständigen Systems blosser Invarianten beliebig vieler quadratischer Formen jeder Stufe, Zeitschr.

für Math. u. Physik 37, pag. 79) berühren den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung insbesondere insofern, als sie wenigstens für Invarianten, deren sämmtliche untere Grenzen kleiner als drei sind, ein Criterium angeben, um zwischen bedingt reducibeln Invarianten (§ 9) eine Entscheidung zu treffen. Wie oben an Stelle von mehrfachen Symbolen Determinanten aus einfachen eingesetzt wurden, so kann umgekehrt an Stelle von r gleichbedeutenden Symbolen einer Invariante, welche in jedem Klammerfactor entweder alle fehlen, oder alle zusammen vorkommen, ein r-faches Symbol eingeführt werden. Nennt man nun mit Herrn Kleiber das „*Hilfsgewicht*“ eines r-fachen Symbols die Zahl $1 + 2 + \cdots + r = \binom{r+1}{2}$ und Hilfsgewicht der Invariante die Summe der Hilfsgewichte aller Symbole, die in ihren Klammerfactoren stehen, so ist von zwei bedingt reducibeln Invarianten diejenige als irreducibel anzusehen, welche das grössere Hilfsgewicht hat. In den Beispielen des § 9 sind das die Invarianten $(aba'b'')(aba''b')$ resp. $(aba')(aba'')$.

Stuttgart, November 1892.

Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*).

Von

Felix Klein in Göttingen.

Unter den Leistungen der letzten fünfzig Jahre auf dem Gebiete der Geometrie nimmt die Ausbildung der *projectivischen Geometrie* die erste Stelle ein. Wenn es anfänglich schien, als sollten die sogenannten metrischen Beziehungen ihrer Behandlung nicht zugänglich sein, da sie beim Projiciren nicht ungeändert bleiben, so hat man in

*) Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät etc. Erlangen 1872.

[Mein nachstehend wieder abgedrucktes Programm ist bereits vor einiger Zeit in italienischer, wie in französischer Uebersetzung neu veröffentlicht worden (Annali di Matematica, ser. 2, t. 17, 1890, Uebersetzung von Hrn. G. Fano; Annales de l'Ecole Normale supérieure, ser. 3, t. 8, 1891, Uebersetzung von Hrn. Padé). Ich habe dort an einzelnen Stellen Verbesserungen eingefügt, die ich durch besondere Klammern [—] als solche kenntlich machte. Diese Verbesserungen sind auch bei dem hier folgenden Wiederabdruck beibehalten und stellen die einzigen Abweichungen vom Originale vor. Ich würde ja von meinem heutigen Standpunkte aus gern grössere Aenderungen an dem Programme vorgenommen haben. Beispielsweise würde ich weniger von algebraischen und mehr von analytischen Functionen sprechen. Ich würde nicht nur von den Gebilden handeln, welche durch Nullsetzen der Functionen dargestellt werden, sondern von den Functionen selbst, und solcherweise z. B. neben der projectiven Geometrie die lineare Invariantentheorie selbständig hervortreten lassen. Ferner würde ich suchen, *sämmtliche* Anwendungen der Mannigfaltigkeitslehre heranzuziehen, also nicht nur diejenigen auf Geometrie, sondern ebensowohl diejenigen auf Mechanik und mathematische Physik. Nach anderer Seite wäre all' der viele Stoff einzuarbeiten, der in den zwischenliegenden 20 Jahren hinzugekommen ist, insbesondere natürlich die Ergebnisse von Lie's Theorie der continuirlichen Gruppen, dann auch die geometrischen Beziehungen, die in der Theorie der automorphen Functionen implicite enthalten sind. Ich bin eben damit beschäftigt, eine solche Darlegung in einer grösseren Vorlesung zu skizziren. Aber ich erkenne die Unmöglichkeit, derselben in absehbarer Zeit eine endgültige Gestalt zu ertheilen. So möge es denn einstweilen bei dem Wiederabdruck der ursprünglichen Programmschrift sein Bewenden haben.

Göttingen, Ende März 1893. F. Klein.]

neuerer Zeit gelernt, auch sie vom projectivischen Standpunkte aufzufassen, so dass nun die projectivische Methode die gesammte Geometrie umspannt. Die metrischen Eigenschaften erscheinen in ihr nur nicht mehr als Eigenschaften der räumlichen Dinge an sich, sondern als Beziehungen derselben zu einem Fundamentalgebilde, dem unendlich fernen Kugelkreise*).

Vergleicht man mit der so allmählich gewonnenen Auffassungsweise der räumlichen Dinge die Vorstellungen der gewöhnlichen (elementaren) Geometrie, so entsteht die Frage nach einem allgemeinen Principe, nach welchem die beiden Methoden sich ausbilden konnten. Diese Frage erscheint um so wichtiger als sich neben die elementare und die projectivische Geometrie, ob auch minder entwickelt, eine Reihe anderer Methoden stellt, denen man dasselbe Recht selbständiger Existenz zugestehen muss. Dahin gehören die Geometrie der reciproken Radien, die Geometrie der rationalen Umformungen etc., wie sie in der Folge noch erwähnt und dargestellt werden sollen.

Wenn wir es im Nachstehenden unternehmen, ein solches Princip aufzustellen, so entwickeln wir wohl keinen eigentlich neuen Gedanken, sondern umgränzen nur klar und deutlich, was mehr oder minder bestimmt von Manchem gedacht worden ist. Aber es schien um so berechtigter, derartige zusammenfassende Betrachtungen zu publiciren, als die Geometrie, die doch ihrem Stoffe nach einheitlich ist, bei der raschen Entwicklung, die sie in der letzten Zeit genommen hat, nur zu sehr in eine Reihe von beinahe getrennten Disciplinen zerfallen ist**), die sich ziemlich unabhängig von einander weiter bilden. Es lag dabei aber auch noch die besondere Absicht vor, Methoden und Gesichtspunkte darzulegen, welche von Lie und mir in neueren Arbeiten entwickelt wurden. Es haben unsere beiderseitigen Arbeiten, auf wie verschiedenartige Gegenstände sie sich auch bezogen, übereinstimmend auf die hier dargelegte allgemeine Auffassungsweise hingedrängt, so dass es eine Art von Nothwendigkeit war, auch einmal diese zu erörtern und von ihr aus die betr. Arbeiten nach Inhalt und Tendenz zu charakterisiren.

War bisher nur von geometrischen Forschungen die Rede, so sollen darunter mit verstanden sein die Untersuchungen über beliebig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, die sich, unter Abstreifung des für die rein mathematische Betrachtung unwesentlichen räumlichen Bildes***), aus der Geometrie entwickelt haben†). Es gibt bei der Untersuchung von Mannigfaltigkeiten eben solche verschiedene Typen, wie in der

*) Vergl. Note I. des Anhangs.
**) Vergl. Note II.
***) Vergl. Note III.
†) Vergl. Note IV.

Geometrie, und es gilt, wie bei der Geometrie, das Gemeinsame und das Unterscheidende unabhängig von einander unternommener Forschungen hervorzuheben. Abstract genommen wäre es im Folgenden nur nöthig, schlechthin von mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten zu reden; aber durch Anknüpfung an die geläufigeren räumlichen Vorstellungen wird die Auseinandersetzung einfacher und verständlicher. Indem wir von der Betrachtung der geometrischen Dinge ausgehen und an ihnen als einem Beispiele die allgemeinen Gedanken entwickeln, verfolgen wir den Gang, den die Wissenschaft in ihrer Ausbildung genommen hat, und den bei der Darstellung zu Grunde zu legen gewöhnlich das Vortheilhafteste ist. —

Eine vorläufige Exposition des im Folgenden besprochenen Inhaltes ist hier wohl nicht möglich, da sich derselbe kaum in eine knappere Form*) fügen will; die Ueberschriften der Paragraphen werden den allgemeinen Fortschritt des Gedankens angeben. Ich habe zum Schlusse eine Reihe von Noten zugefügt, in welchen ich entweder, wo es im Interesse der allgemeinen Auseinandersetzung des Textes nützlich schien, besondere Punkte weiter entwickelt habe, oder in denen ich bemüht war, den abstract mathematischen Standpunkt, der für die Betrachtungen des Textes massgebend ist, gegen verwandte abzugränzen.

§ 1.

Gruppen von räumlichen Transformationen. Hauptgruppe. Aufstellung eines allgemeinen Problems.

Der wesentlichste Begriff, der bei den folgenden Auseinandersetzungen nothwendig ist, ist der einer *Gruppe* von räumlichen Aenderungen.

Beliebig viele Transformationen des Raumes**) ergeben zusammengesetzt immer wieder eine Transformation. Hat nun eine gegebene Reihe von Transformationen die Eigenschaft, dass jede Aenderung, die aus den ihr angehörigen durch Zusammensetzung hervorgeht, ihr selbst

*) Diese knappe Form ist ein Mangel der im Folgenden gegebenen Darstellung, der das Verständniss, wie ich fürchte, wesentlich erschweren wird. Aber dem hätte wohl nur durch eine sehr viel weitere Auseinandersetzung abgeholfen werden können, in der die Einzeltheorieen, die hier nur berührt werden, ausführlich entwickelt worden wären.

**) Wir denken von den Transformationen immer die Gesammtheit der räumlichen Gebilde gleichzeitig betroffen und reden desshalb schlechthin von Transformationen des Raumes. Die Transformationen können, wie z. B. die dualistischen, statt der Punkte andere Elemente einführen; es wird dies im Texte nicht unterschieden.

wieder angehört, so soll die Reihe eine *Transformationsgruppe**) genannt werden.

Ein Beispiel für eine Transformationsgruppe bildet die Gesammtheit der Bewegungen (jede Bewegung als eine auf den ganzen Raum ausgeführte Operation betrachtet). Eine in ihr enthaltene Gruppe bilden etwa die Rotationen um einen Punkt**). Eine Gruppe, welche umgekehrt die Gruppe der Bewegungen umfasst, wird durch die Gesammtheit der Collineationen vorgestellt. Die Gesammtheit der dualistischen Umformungen bildet dagegen keine Gruppe — denn zwei dualistische Umformungen ergeben zusammen wieder eine Collineation —, wohl aber wird wieder eine Gruppe erzeugt, wenn man die Gesammtheit der dualistischen mit der Gesammtheit der collinearen zusammenfügt***).

Es gibt nun räumliche Transformationen, welche die geometrischen Eigenschaften räumlicher Gebilde überhaupt ungeändert lassen. Geometrische Eigenschaften sind nämlich ihrem Begriffe nach unabhängig von der Lage, die das zu untersuchende Gebilde im Raume einnimmt, von seiner absoluten Grösse, endlich auch von dem Sinne†), in welchem seine Theile geordnet sind. Die Eigenschaften eines räumlichen Gebildes bleiben also ungeändert durch alle Bewegungen des Raumes, durch seine Aehnlichkeitstransformationen, durch den Process der Spiegelung, sowie durch alle Transformationen, die sich aus diesen zusammensetzen. Den Inbegriff aller dieser Transformationen bezeichnen wir als die *Hauptgruppe*††) räumlicher Aenderungen; *geometrische Eigen-*

*) Begriffsbildung wie Bezeichnung sind herübergenommen von der *Substitutionstheorie*, in der nur an Stelle der Transformationen eines continuirlichen Gebietes die Vertauschungen einer endlichen Zahl discreter Grössen auftreten. [Diese Definition bedarf noch der Ergänzung. Bei den Gruppen des Textes wird nämlich stillschweigend vorausgesetzt, dass dieselben neben jeder Operation, die sie enthalten mögen, immer auch deren inverse enthalten; dies ist aber, wie wohl zuerst Lie hervorhob, bei unendlicher Zahl der Operationen keineswegs eine Folge des Gruppenbegriffs als solchen; unsere Voraussetzung sollte also der im Texte gegebenen Definition dieses Begriffs ausdrücklich zugefügt werden.]

**) Camille Jordan hat alle Gruppen aufgestellt, die überhaupt in der Gruppe der Bewegungen enthalten sind: Sur les groupes de mouvements. Annali di Matematica. t. II.

***) Die Transformationen einer Gruppe brauchen übrigens durchaus nicht, wie das bei den im Texte zu nennenden Gruppen allerdings immer der Fall sein wird, in stetiger Aufeinanderfolge vorhanden zu sein. Eine Gruppe bildet z. B. auch die endliche Reihe von Bewegungen, die einen regelmässigen Körper mit sich selbst zur Deckung bringen, oder die unendliche, aber discrete Reihe, welche eine Sinuslinie sich selber superponirt.

†) Unter dem Sinne verstehe ich hier die Eigenschaft der Anordnung, welche den Unterschied von der symmetrischen Figur (dem Spiegelbilde) begründet. Ihrem Sinne nach unterschieden sind also z. B. eine rechts- und eine linksgewundene Schraubenlinie.

††) Dass diese Transformationen eine Gruppe bilden, ist begrifflich nothwendig.

schaften werden durch die Transformationen der Hauptgruppe nicht geändert. Auch umgekehrt kann man sagen: *Geometrische Eigenschaften sind durch ihre Unveränderlichkeit gegenüber den Transformationen der Hauptgruppe charakterisirt.* Betrachtet man nämlich den Raum einen Augenblick als unbeweglich etc., als eine starre Mannigfaltigkeit, so hat jede Figur ein individuelles Interesse; von den Eigenschaften, die sie als Individuum hat, sind es nur die eigentlich geometrischen, welche bei den Aenderungen der Hauptgruppe erhalten bleiben. Dieser hier etwas unbestimmt formulirte Gedanke wird im weiteren Verlaufe der Auseinandersetzung deutlicher erscheinen.

Streifen wir jetzt das mathematisch unwesentliche sinnliche Bild ab, und erblicken im Raume nur eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, also, indem wir an der gewohnten Vorstellung des Punktes als Raumelement festhalten, eine dreifach ausgedehnte. Nach Analogie mit den räumlichen Transformationen reden wir von Transformationen der Mannigfaltigkeit; auch sie bilden *Gruppen.* Nur ist nicht mehr, wie im Raume, eine Gruppe vor den übrigen durch ihre Bedeutung ausgezeichnet; jede Gruppe ist mit jeder anderen gleichberechtigt. Als Verallgemeinerung der Geometrie entsteht so das folgende umfassende Problem:

Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.

In Anlehnung an die moderne Ausdrucksweise, die man freilich nur auf eine bestimmte Gruppe, die Gruppe aller linearen Umformungen, zu beziehen pflegt, mag man auch so sagen:

Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben. Man entwickele die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie.

Dies ist das allgemeine Problem, welches die gewöhnliche Geometrie nicht nur, sondern namentlich auch die hier zu nennenden neueren geometrischen Methoden und die verschiedenen Behandlungsweisen beliebig ausgedehnter Mannigfaltigkeiten unter sich begreift. Was besonders betont sein mag, ist die Willkürlichkeit, die hinsichtlich der Wahl der zu adjungirenden Transformationsgruppe besteht, und die daraus fliessende und in diesem Sinne zu verstehende gleiche Berechtigung aller sich unter die allgemeine Forderung subsumirenden Betrachtungsweisen.

§ 2.

Transformationsgruppen, von denen die eine die andere umfasst, werden nach einander adjungirt. Die verschiedenen Typen geometrischer Forschung und ihr gegenseitiges Verhältniss.

Da die geometrischen Eigenschaften räumlicher Dinge durch *alle* Transformationen der Hauptgruppe ungeändert bleiben, so ist es an und für sich absurd, nach solchen Eigenschaften derselben zu fragen, bei denen dies nur gegenüber einem Theile dieser Transformationen der Fall ist. Diese Fragestellung wird indess berechtigt, ob auch nur *formal*, wenn wir die räumlichen Gebilde in ihrer Beziehung zu fest gedachten Elementen untersuchen. Betrachten wir z. B., wie in der sphärischen Trigonometrie, die räumlichen Dinge unter Auszeichnung eines Punktes. Dann ist zunächst die Forderung: die unter Adjunction der Hauptgruppe invarianten Eigenschaften nicht mehr der räumlichen Dinge an sich sondern des von ihnen mit dem gegebenen Punkte gebildeten Systems zu entwickeln. Aber dieser Forderung können wir die andere Form ertheilen: Man untersuche die räumlichen Gebilde an sich hinsichtlich solcher Eigenschaften, welche ungeändert bleiben durch diejenigen Transformationen der Hauptgruppe, welche noch stattfinden können, wenn wir den Punkt fest halten. Mit anderen Worten: Es ist dasselbe, ob wir die räumlichen Gebilde im Sinne der Hauptgruppe untersuchen und ihnen den gegebenen Punkt hinzufügen, oder ob wir, ohne ihnen irgend ein Gegebenes hinzuzufügen, die Hauptgruppe durch die in ihr enthaltene Gruppe ersetzen, deren Transformationen den bez. Punkt ungeändert lassen.

Es ist dies ein in der Folge häufig angewandtes Princip, das wir desshalb gleich hier allgemein formuliren wollen; etwa in der folgenden Weise:

Es sei eine Mannigfaltigkeit und zu ihrer Behandlung eine auf sie bezügliche Transformationsgruppe gegeben. Es werde das Problem vorgelegt, die in der Mannigfaltigkeit enthaltenen Gebilde hinsichtlich eines gegebenen Gebildes zu untersuchen. *So kann man entweder dem Systeme der Gebilde das gegebene hinzufügen, und es fragt sich dann nach den Eigenschaften des erweiterten Systems im Sinne der gegebenen Gruppe — oder, man lasse das System unerweitert, beschränke aber die Transformationen, die man bei der Behandlung zu Grunde legt, auf diejenigen in der gegebenen Gruppe enthaltenen, welche das gegebene Gebilde ungeändert lassen (und die nothwendig wieder eine Gruppe bilden).* —

Im Gegensatze zu der zu Anfang des Paragraphen aufgeworfenen Frage beschäftige uns nun die umgekehrte, die von Vornherein verständlich ist. Wir fragen nach denjenigen Eigenschaften räumlicher

Dinge, welche bei einer Transformationsgruppe erhalten bleiben, die die Hauptgruppe als einen Theil umfasst. Jede Eigenschaft, die wir bei einer solchen Untersuchung finden, ist eine geometrische Eigenschaft des Ding's an sich, aber das Umgekehrte gilt nicht. Bei der Umkehr tritt vielmehr das eben vorgetragene Princip in Kraft, wobei die Hauptgruppe nun die kleinere Gruppe ist. Wir erhalten so:

Ersetzt man die Hauptgruppe durch eine umfassendere Gruppe, so bleibt nur ein Theil der geometrischen Eigenschaften erhalten. Die übrigen erscheinen nicht mehr als Eigenschaften der räumlichen Dinge an sich, sondern als Eigenschaften des Systems, welches hervorgeht, wenn man denselben ein ausgezeichnetes Gebilde hinzufügt. Dieses ausgezeichnete Gebilde ist (soweit es überhaupt ein bestimmtes) ist) dadurch definirt, dass es, fest gedacht, dem Raume unter den Transformationen der gegebenen Gruppe nur noch die Transformationen der Hauptgruppe gestattet.*

In diesem Satze beruht die Eigenart der hier zu besprechenden neueren geometrischen Richtungen und ihr Verhältniss zur elementaren Methode. Sie sind dadurch eben zu charakterisiren, dass sie an Stelle der Hauptgruppe eine erweiterte Gruppe räumlicher Umformungen der Betrachtung zu Grunde legen. Ihr gegenseitiges Verhältniss ist, sofern sich ihre Gruppen einschliessen, durch einen entsprechenden Satz bestimmt. Dasselbe gilt von den verschiedenen hier zu betrachtenden Behandlungsweisen mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten. Es soll dies nun an den einzelnen Methoden gezeigt werden, wobei denn die Sätze, die in diesem und dem vorigen Paragraphen allgemein hingestellt wurden, ihre Erläuterung an concreten Gegenständen finden.

§ 3.

Die projectivische Geometrie.

Jede räumliche Umformung, die nicht gerade der Hauptgruppe angehört, kann dazu benutzt werden, um Eigenschaften bekannter Gebilde auf neue Gebilde zu übertragen. So verwerthen wir die Geometrie der Ebene für die Geometrie der Flächen, die sich auf die Ebene abbilden lassen; so schloss man schon lange vor dem Entstehen einer eigentlichen projectivischen Geometrie von den Eigenschaften einer gegebenen Figur auf Eigenschaften anderer, die durch Projection aus ihr hervorgingen. Aber die projectivische Geometrie erwuchs erst, als man sich gewöhnte, die ursprüngliche Figur mit allen aus ihr projectivisch ableitbaren als wesentlich identisch zu erachten und die

*) Man erzeugt ein solches Gebilde beispielsweise, indem man auf ein beliebiges Anfangselement, das durch keine Transformation der gegebenen Gruppe in sich selbst überzuführen ist, die Transformationen der Hauptgruppe anwendet.

Eigenschaften, welche sich beim Projiciren übertragen, so auszusprechen, dass ihre Unabhängigkeit von der mit dem Projiciren verknüpften Aenderung in Evidenz tritt. Hiermit war denn der Behandlung im Sinne von § 1 *die Gruppe aller projectivischen Umformungen* zu Grunde gelegt und *dadurch eben der Gegensatz zwischen projectivischer und gewöhnlicher Geometrie geschaffen.*

Ein ähnlicher Entwicklungsgang, wie der hier geschilderte, kann bei jeder Art von räumlicher Transformation als möglich gedacht werden; wir werden noch öfter darauf zurückkommen. Er hat sich innerhalb der projectivischen Geometrie selbst noch nach zwei Seiten vollzogen. Die eine Weiterbildung der Auffassung geschah durch Aufnahme der *dualistischen* Umformungen in die Gruppe der zu Grunde gelegten Aenderungen. Für den heutigen Standpunkt sind zwei einander dualistisch entgegenstehende Figuren nicht mehr als zwei unterschiedene sondern als wesentlich dieselben Figuren anzusehen. Ein anderer Schritt bestand in der Erweiterung der zu Grunde gelegten Gruppe collinearer und dualistischer Umformungen durch Aufnahme der bez. *imaginären* Transformationen. Dieser Schritt bedingt, dass man vorher den Kreis der eigentlichen Raumelemente durch Hinzunahme der imaginären erweitert habe — ganz dem entsprechend, wie die Aufnahme der dualistischen Umformungen in die zu Grunde gelegte Gruppe die gleichzeitige Einführung von Punkt und Ebene als Raumelement nach sich zieht. Es ist hier nicht der Ort, auf die Zweckmässigkeit der Einführung imaginärer Elemente zu verweisen, durch welche allein der genaue Anschluss der Raumlehre an das einmal gewählte Gebiet algebraischer Operationen erreicht wird. Dagegen muss betont werden, dass der Grund für die Einführung eben in der Betrachtung algebraischer Operationen, nicht aber in der Gruppe der projectivischen und dualistischen Umformungen liegt. So gut wir uns bei den letzteren auf reelle Transformationen beschränken können, da schon die reellen Collineationen und dualistischen Transformationen eine Gruppe bilden, — so gut können wir imaginäre Raumelemente einführen, auch wenn wir nicht auf projectivischem Standpunkte stehen, und sollen es, sofern wir principiell algebraische Gebilde untersuchen.

Wie man vom projectivischen Standpunkte aus die metrischen Eigenschaften aufzufassen hat, bestimmt sich nach dem allgemeinen Satze des vorangehenden Paragraphen. Die metrischen Eigenschaften sind als projectivische Beziehungen zu einem Fundamentalgebilde, dem unendlich fernen Kugelkreise*), zu betrachten, einem Gebilde, das die

*) Diese Anschauungsweise ist als eine der schönsten Leistungen [der französischen Schule] zu betrachten; durch sie erst gewinnt die Eintheilung in Eigenschaften der Lage und Eigenschaften des Masses, wie man sie gern an die Spitze der projectivischen Geometrie stellt, einen präcisen Inhalt.

Eigenschaft hat, nur durch diejenigen Transformationen der projectivischen Gruppe, die eben auch Transformationen der Hauptgruppe sind, in sich überzugehen. · Der so schlechthin ausgesprochene Satz bedarf noch einer wesentlichen Ergänzung, die der Beschränkung der gewöhnlichen Anschauungsweise auf reelle Raumelemente (und reelle Transformationen) entspricht. Man muss dem Kugelkreise, um diesem Standpunkte gerecht zu werden, noch das System der reellen Raumelemente (Punkte) ausdrücklich hinzufügen; Eigenschaften im Sinne der elementaren Geometrie sind projectivisch entweder Eigenschaften der Dinge an sich oder Beziehungen zu diesem Systeme der reellen Elemente, oder zum Kugelkreise, oder endlich zu beiden.

Es mag hier noch der Art gedacht werden, wie v. Staudt in seiner Geometrie der Lage die projectivische Geometrie aufbaut — d. h. diejenige projectivische Geometrie, welche sich auf Zugrundelegung der Gruppe aller reeller projectivisch-dualistischer Umformungen beschränkt*).

Es ist bekannt, wie er dabei aus dem gewöhnlichen Anschauungsmaterial nur solche Momente herausgreift, die auch bei projectivischen Umformungen erhalten bleiben. Wollte man weiterhin zur Betrachtung auch metrischer Eigenschaften übergehen, so hätte man die letzteren geradezu als Beziehungen zum Kugelkreise einzuführen. Der so vervollständigte Gedankengang ist für die hier vorliegenden Betrachtungen insofern von grosser Bedeutung, als ein entsprechender Aufbau der Geometrie im Sinne jeder einzelnen der noch anzuführenden Methoden möglich ist.

§ 4.

Uebertragung durch Abbildung.

Ehe wir in der Besprechung der geometrischen Methoden, die sich neben die elementare und die projectivische Geometrie stellen, weiter gehen, mögen allgemein einige Betrachtungen entwickelt werden, die im Folgenden immer wieder vorkommen und zu denen die bisher berührten Dinge bereits hinreichend viele Beispiele liefern. Auf diese Erörterungen bezieht sich der gegenwärtige und der nächstfolgende Paragraph.

Gesetzt, man habe eine Mannigfaltigkeit A unter Zugrundelegung einer Gruppe B untersucht. Führt man sodann A durch irgendwelche Transformation in eine andere Mannigfaltigkeit A' über, so wird aus der Gruppe B von Aenderungen, die A in sich transformirten, nunmehr eine Gruppe B', deren Transformationen sich auf A' beziehen. Dann

*) Den erweiterten Kreis, der auch imaginäre Umformungen umspannt, hat v. Staudt erst in den „Beiträgen zur Geometrie der Lage" zu Grunde gelegt.

ist es ein selbstverständliches Princip, *dass die Behandlungsweise von A unter Zugrundelegung von B die Behandlungsweise von A' unter Zugrundelegung von B' ergibt*, d. h. jede Eigenschaft, welche ein in A enthaltenes Gebilde mit Bezug auf die Gruppe B hat, ergibt eine Eigenschaft des entsprechenden Gebildes in A' mit Bezug auf die Gruppe B'.

Lassen wir z. B. A eine gerade Linie, B die dreifach unendlich vielen linearen Transformationen bedeuten, welche dieselbe in sich überführen. Die Behandlungsweise von A ist dann eben diejenige, welche die neuere Algebra als Theorie der binären Formen bezeichnet. Nun kann man die gerade Linie auf einen Kegelschnitt A' der Ebene durch Projection von einem Punkte des letzteren aus beziehen. Aus den linearen Transformationen B der Geraden in sich selbst werden dann die linearen Transformationen B' des Kegelschnittes in sich selbst, wie man leicht zeigt, d. h. diejenigen Aenderungen des Kegelschnittes, welche mit den linearen Transformationen der Ebene, die den Kegelschnitt in sich überführen, verknüpft sind.

Es ist nun aber nach dem Princip des zweiten Paragraphen*) dasselbe: nach der Geometrie auf einem Kegelschnitte zu fragen, wenn man sich den Kegelschnitt als fest denkt und nur auf diejenigen linearen Transformationen der Ebene achtet, welche ihn in sich überführen, oder die Geometrie auf dem Kegelschnitte zu studiren, indem man überhaupt die linearen Transformationen der Ebene betrachtet und sich den Kegelschnitt mit ändern lässt. Die Eigenschaften, welche wir an den Punktsystemen auf dem Kegelschnitte auffassten, sind mithin im gewöhnlichen Sinne projectivische. Die Verknüpfung der letzten Ueberlegung mit dem eben abgeleiteten Resultate gibt also:

*Binäre Formentheorie und projectivische Geometrie der Punktsysteme auf einem Kegelschnitte ist dasselbe, d. h. jedem binären Satze entspricht ein Satz über derartige Punktsysteme und umgekehrt***).

Ein anderes Beispiel, welches geeignet ist, diese Art von Betrachtungen zu veranschaulichen, ist das folgende: Wenn man eine Fläche zweiten Grades mit einer Ebene durch stereographische Projection in Verbindung setzt; so tritt auf der Fläche ein Fundamentalpunkt auf: der Projectionspunkt, in der Ebene sind es zwei: die Bilder der durch den Projectionspunkt gehenden Erzeugenden. Man zeigt nun ohne Weiteres: Die linearen Transformationen der Ebene, welche die beiden Fundamentalpunkte derselben ungeändert lassen, gehen

*) Wenn man will, ist hier das Princip unter etwas erweiterter Form angewendet.

**) Statt des Kegelschnittes in der Ebene kann man mit gleichem Erfolge eine Raumcurve dritter Ordnung einführen, überhaupt bei n Dimensionen etwas Entsprechendes aufstellen.

durch die Abbildung in lineare Transformationen der Fläche zweiten Grades in sich selbst über, aber nur in diejenigen, welche den Projectionspunkt ungeändert lassen. Unter linearen Transformationen der Fläche in sich selbst sind dabei diejenigen Aenderungen verstanden, welche die Fläche erfährt, wenn man lineare Raumtransformationen ausführt, welche die Fläche mit sich selbst zur Deckung bringen. Hiernach wird also die projectivische Untersuchung einer Ebene unter Zugrundelegung zweier Punkte und die projectivische Untersuchung einer Fläche zweiten Grades unter Zugrundelegung eines Punktes identisch. Die erstere ist nun — sofern man imaginäre Elemente mit in Betracht zieht — nichts Anderes, als die Untersuchung der Ebene im Sinne der elementaren Geometrie. Denn die Hauptgruppe der ebenen Transformationen besteht eben in den linearen Umformungen, welche ein Punktepaar (die unendlich fernen Kreispunkte) ungeändert lassen. Wir erhalten also schliesslich:

Die elementare Geometrie der Ebene und die projectivische Untersuchung einer Fläche zweiten Grades unter Hinzunahme eines ihrer Punkte sind dasselbe.

Diese Beispiele liessen sich beliebig vervielfachen*); die beiden hier entwickelten sind gewählt worden, da wir in der Folge noch Gelegenheit haben werden, auf dieselben zurückkommen.

§ 5.

Von der Willkürlichkeit in der Wahl des Raumelements. Das Hesse'sche Uebertragungsprincip. Die Liniengeometrie.

Als Element der geraden Linie, der Ebene, des Raumes, überhaupt einer zu untersuchenden Mannigfaltigkeit kann statt des Punktes jedes in der Mannigfaltigkeit enthaltene Gebilde: die Punktgruppe, ev. die Curve, die Fläche u. s. w. verwandt werden**). Indem über die Zahl willkürlicher Parameter, von denen man diese Gebilde abhängig setzen will, von Vornherein gar Nichts feststeht, erscheinen Linie, Ebene, Raum etc. je nach der Wahl des Elementes mit beliebig vielen Dimensionen behaftet. *Aber so lange wir der geometrischen Untersuchung dieselbe Gruppe von Aenderungen zu Grunde legen, bleibt der Inhalt der Geometrie unverändert*, das heisst, jeder Satz, der bei *einer* Annahme des Raumelements sich ergab, ist auch ein Satz bei beliebiger

*) Bez. anderer Beispiele, sowie namentlich der Erweiterungen auf mehr Dimensionen, deren die angeführten fähig sind, verweise ich auf bez. Auseinandersetzungen in einem Aufsatze von mir: *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie.* Math. Annalen, t. V, 2, sowie auf die sogleich noch zu nennenden Lie'schen Arbeiten.

**) Vergl. Note III.

anderer Annahme, nur die Anordnung und Verknüpfung der Sätze ist geändert.

Das Wesentliche ist also die Transformationsgruppe; die Zahl der Dimensionen, die wir einer Mannigfaltigkeit beilegen wollen, erscheint als etwas Secundäres.

Diese Verknüpfung dieser Bemerkung mit dem Princip des vorigen Paragraphen ergibt eine Reihe schöner Anwendungen, von denen hier einige entwickelt werden mögen, da diese Beispiele mehr als alle langen Auseinandersetzungen geeignet scheinen, den Sinn der allgemeinen Betrachtung darzulegen.

Die projectivische Geometrie auf der Geraden (die Theorie der binären Formen) ist nach dem vorigen Paragraphen mit der projectivischen Geometrie auf dem Kegelschnitte gleichbedeutend. Auf letzterem mögen wir jetzt statt des Punktes das Punktepaar als Element betrachten. Die Gesammtheit der Punktepaare des Kegelschnitts lässt sich aber auf die Gesammtheit der Geraden der Ebene beziehen, indem man jede Gerade dem Punktepaare zuordnet, in welchem sie den Kegelschnitt trifft. Bei dieser Abbildung gehen die linearen Transformationen des Kegelschnitts in sich selbst in die linearen Transformationen der (aus Geraden bestehend gedachten) Ebene über, welche den Kegelschnitt ungeändert lassen. Ob wir aber die aus den letzteren bestehende Gruppe betrachten, oder die Gesammtheit der linearen Transformationen der Ebene zu Grunde legen und den zu untersuchenden Gebilden der Ebene den Kegelschnitt allemal hinzufügen, ist nach § 2 gleichbedeutend. Indem wir alle diese Ueberlegungen zusammen nehmen, haben wir:

Die Theorie der binären Formen und die projectivische Geometrie der Ebene unter Zugrundelegung eines Kegelschnittes sind gleichbedeutend.

Da endlich projectivische Geometrie der Ebene unter Zugrundelegung eines Kegelschnittes wegen der Gleichheit der Gruppe mit der projectivischen Massgeometrie coincidirt, die man in der Ebene auf einen Kegelschnitt gründen kann*), so mögen wir auch so sagen:

Die Theorie der binären Formen und die allgemeine projectivische Massgeometrie in der Ebene sind dasselbe.

Statt des Kegelschnitts in der Ebene können wir in der vorstehenden Betrachtung die Curve dritter Ordnung im Raume setzen etc., doch mag dies unausgeführt bleiben. Der hier dargelegte Zusammenhang zwischen der Geometrie der Ebene, weiterhin des Raumes oder einer beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit deckt sich im Wesentlichen mit dem von Hesse vorgeschlagenen Uebertragungsprincipe (Borchardt's Journal Bd. 66).

*) Vergl. Note V.

Ein Beispiel ganz ähnlicher Art ergiebt die projectivische Geometrie des Raumes, oder, anders ausgedrückt, die Theorie der quaternären Formen. Fasst man die gerade Linie als Raumelement und ertheilt ihr, wie in der Liniengeometrie geschieht, sechs homogene Coordinaten, zwischen denen eine Bedingungsgleichung vom zweiten Grade stattfindet, so erscheinen die linearen und dualistischen Transformationen des Raumes als diejenigen linearen Transformationen der unabhängig gedachten sechs Veränderlichen, welche die Bedingungsgleichung in sich überführen. Durch eine Verknüpfung ähnlicher Ueberlegungen, wie sie soeben entwickelt wurden, erhält man hieraus den Satz:

Die Theorie der quaternären Formen deckt sich mit der projectivischen Massbestimmung in einer durch 6 *homogene Veränderliche erzeugten Mannigfaltigkeit.*

Wegen der näheren Ausführung dieser Auffassung verweise ich auf einen demnächst in den Math. Annalen (Bd. VI) erscheinenden Aufsatz: „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" (zweite Abhandlung), sowie auf eine Note am Schlusse dieser Mittheilung*).

Ich knüpfe an die vorstehenden Auseinandersetzungen noch zwei Bemerkungen, von denen die erste zwar schon implicite in dem Bisherigen enthalten ist, aber ausgeführt werden soll, weil der Gegenstand, auf den sie sich bezieht, zu leicht Missverständnissen ausgesetzt ist.

Wenn wir beliebige Gebilde als Raumelemente einführen, so erhält der Raum beliebig viele Dimensionen. Wenn wir dann aber an der uns geläufigen (elementaren oder projectivischen) Anschauungsweise festhalten, so ist die Gruppe, welche wir für die mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zu Grunde zu legen haben, von Vorneherein gegeben; es ist eben die Hauptgruppe bez. die Gruppe der projectivischen Umformungen. Wollten wir eine andere Gruppe zu Grunde legen, so müssten wir von der gewöhnlichen bez. der projectivischen Anschauung abgehen. So richtig es also ist, dass bei geschickter Wahl der Raumelemente der Raum Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Ausdehnungen repräsentirt, so wichtig ist es, hinzuzufügen, *dass bei dieser Repräsentation entweder von Vorneherein eine bestimmte Gruppe der Behandlung der Mannigfaltigkeit zu Grunde zu legen ist, oder dass wir, wollen wir über die Gruppe verfügen, unsere geometrische Auffassung entsprechend auszubilden haben.* — Es könnte, ohne diese Bemerkung, z. B. eine Repräsentation der Liniengeometrie in der folgenden Weise gesucht werden. Die Gerade erhält in der Liniengeometrie sechs Coordinaten, ebensoviele Coefficienten besitzt der Kegelschnitt in der Ebene. Das Bild der Liniengeometrie würde also die Geometrie in einem Kegel-

*) Vergl. Note VI.

schnittsysteme sein, das aus der Gesammtheit der Kegelschnitte durch eine quadratische Gleichung zwischen den Coefficienten ausgesondert wird. Das ist richtig, sowie wir als Gruppe der ebenen Geometrie die Gesammtheit der Transformationen zu Grunde legen, die durch lineare Umformungen der Kegelschnittscoefficienten repräsentirt werden, welche die quadratische Bedingungsgleichung in sich überführen. Halten wir aber an der elementaren bez. der projectivischen Auffassung der ebenen Geometrie fest, so haben wir eben *kein* Bild.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf folgende Begriffsbildung. Sei im Raume irgend eine Gruppe, etwa die Hauptgruppe gegeben. So wähle man ein einzelnes räumliches Gebilde, etwa einen Punkt, oder eine Gerade, oder auch ein Ellipsoid etc. aus und wende auf dasselbe alle Transformationen der Hauptgruppe an. Man erhält dann eine mehrfach unendliche Mannigfaltigkeit mit einer Anzahl von Dimensionen, die im Allgemeinen gleich der Zahl der in der Gruppe enthaltenen willkürlichen Parameter ist, die in besonderen Fällen herabsinkt, wenn nämlich das ursprünglich gewählte Gebilde die Eigenschaft besitzt, durch unendlich viele Transformationen der Gruppe in sich übergeführt zu werden. Jede so erzeugte Mannigfaltigkeit heisse mit Bezug auf die erzeugende Gruppe ein *Körper*.*) Wollen wir nun den Raum im Sinne der Gruppe untersuchen und dabei bestimmte Gebilde als Raumelemente auszeichnen, und wollen wir nicht, dass Gleichberechtigtes ungleichartig dargestellt werde, *so müssen wir die Raumelemente ersichtlich so wählen, dass ihre Mannigfaltigkeit entweder selbst einen Körper bildet oder in Körper zerlegt werden kann***). Von dieser evidenten Bemerkung soll später (§ 9) eine Anwendung gemacht werden. Der Körperbegriff selbst wird im Schlussparagraphen in Verbindung mit verwandten Begriffen noch einmal zur Sprache kommen.

---

*) Ich wähle den Namen nach dem Vorgange von Dedekind, der in der Zahlentheorie ein Zahlengebiet als Körper bezeichnet, wenn es aus gegebenen Elementen durch gegebene Operationen entstanden ist. (Zweite Auflage von Dirichlet's Vorlesungen.)

**) [Im Texte ist nicht hinreichend beachtet, dass die vorgelegte Gruppe sogenannte ausgezeichnete Untergruppen enthalten kann. Bleibt ein geometrisches Gebilde bei den Operationen einer ausgezeichneten Untergruppe ungeändert, so gilt das Gleiche für alle Gebilde, die aus ihm durch die Operationen der Gesammtgruppe hervorgehen, d. h. für alle Gebilde des aus ihm entspringenden Körpers. Ein so beschaffener Körper würde aber zur Darstellung der Operationen der Gruppe durchaus ungeeignet sein. Es sind also im Texte nur solche Körper zuzulassen, die aus Raumelementen entstehen, welche bei keiner einzigen ausgezeichneten Untergruppe der vorgelegten Gruppe ungeändert bleiben.]

§ 6.

Die Geometrie der reciproken Radien. Die Interpretation von $x + iy$.

Wir kehren mit diesem Paragraphen zur Besprechung der verschiedenen Richtungen der geometrischen Forschung zurück, wie sie in §§ 2, 3 begonnen wurde.

Als ein Seitenstück zu den Betrachtungsweisen der projectivischen Geometrie kann man in vielfacher Hinsicht eine Classe geometrischer Ueberlegungen betrachten, bei denen von der Umformung durch reciproke Radien fortlaufender Gebrauch gemacht wird. Es gehören hierher die Untersuchungen über die sog. Cycliden und anallagmatischen Flächen, über die allgemeine Theorie der Orthogonalsysteme, ferner Untersuchungen über das Potential etc. Wenn man die in denselben enthaltenen Betrachtungen noch nicht gleich den projectivischen zu einer besonderen Geometrie zusammengefasst hat, *die dann als Gruppe die Gesammtheit derjenigen Umformungen zu Grunde zu legen hätte, welche durch Verbindung der Hauptgruppe mit der Transformation durch reciproke Radien entstehen*, so ist das wohl dem zufälligen Umstande zuzuschreiben, dass die genannten Theorien seither nicht im Zusammenhange dargestellt worden sind; den einzelnen Autoren, die in dieser Richtung arbeiteten, wird eine solche methodische Auffassung nicht fern gelegen haben.

Die Parallele zwischen dieser Geometrie der reciproken Radien und der projectivischen ergibt sich, sowie einmal die Frage nach einem Vergleiche vorhanden ist, von selbst, und es mag daher nur ganz im Allgemeinen auf die folgenden Punkte aufmerksam gemacht werden:

In der projectivischen Geometrie sind Punkt, Gerade, Ebene die Elementarbegriffe. Kreis und Kugel sind nur specielle Fälle von Kegelschnitt und Fläche zweiten Grades. Das unendlich Ferne der elementaren Geometrie erscheint als Ebene; das Fundamentalgebilde, auf welches sich die elementare Geometrie bezieht, ist ein unendlich ferner, imaginärer Kegelschnitt.

In der Geometrie der reciproken Radien sind Punkt, Kreis und Kugel die Elementarbegriffe. Gerade und Ebene sind specielle Fälle der letzteren, dadurch charakterisirt, dass sie einen, im Sinne der Methode übrigens nicht weiter ausgezeichneten Punkt, den unendlich fernen Punkt, enthalten. Die elementare Geometrie erwächst, so wie man diesen Punkt fest denkt.

Die Geometrie der reciproken Radien ist einer Einkleidung fähig, welche sie neben die Theorie der binären Formen und die Liniengeometrie stellt, falls man die letzteren in der Weise behandelt, wie

das im vorigen Paragraphen angedeutet wurde. Wir mögen zu diesem Zwecke die Betrachtung zunächst auf ebene Geometrie und also auf Geometrie der reciproken Radien in der Ebene*) beschränken.

Es wurde bereits des Zusammenhangs gedacht, der zwischen der elementaren Geometrie der Ebene und der projectivischen Geometrie der mit einem ausgezeichneten Punkte versehenen Fläche zweiten Grades besteht (§ 4). Sieht man von dem ausgezeichneten Punkte ab und betrachtet also die projectivische Geometrie auf der Fläche an sich, so hat man ein Bild der Geometrie der reciproken Radien in der Ebene. Denn man überzeugt sich leicht**), dass der Transformationsgruppe der reciproken Radien in der Ebene vermöge der Abbildung der Fläche zweiten Grades die Gesammtheit der linearen Transformationen der letzteren in sich selbst entspricht. Man hat also:

Geometrie der reciproken Radien in der Ebene und projectivische Geometrie auf einer Fläche zweiten Grades ist dasselbe,

und ganz entsprechend:

Geometrie der reciproken Radien im Raume ist mit der projectivischen Behandlung einer Mannigfaltigkeit gleichbedeutend, die durch eine quadratische Gleichung zwischen fünf homogenen Veränderlichen dargestellt wird.

Die Raumgeometrie ist also durch die Geometrie der reciproken Radien in ganz dieselbe Verbindung mit einer Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen gesetzt, wie vermöge der Liniengeometrie mit einer Mannigfaltigkeit von fünf Ausdehnungen.

Die Geometrie der reciproken Radien in der Ebene gestattet, sofern man nur auf *reelle* Transformationen achten will, noch nach einer anderen Seite eine interessante Darstellung, resp. Verwendung. Breitet man nämlich eine complexe Variable $x + iy$ in gewöhnlicher Weise in der Ebene aus, so entspricht ihren linearen Transformationen die Gruppe der reciproken Radien, mit der erwähnten Beschränkung auf das Reelle***). Die Untersuchung der Functionen einer complexen

*) Geometrie der reciproken Radien auf der Geraden ist mit der projectivischen Untersuchung der Geraden gleichbedeutend, da die bez. Umformungen die nämlichen sind. Man kann daher auch in der Geometrie der reciproken Radien von einem *Doppelverhältnisse* von vier Punkten einer Geraden und weiterhin eines Kreises reden.

**) Vergleiche die bereits genannte Arbeit: Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie. Math. Annalen Bd. V.

***) [Die Ausdrucksweise des Textes ist ungenau. Den linearen Transformationen $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ (wo $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$) entsprechen nur diejenigen Operationen aus der Gruppe der reciproken Radien, bei denen keine Umlegung der Winkel stattfindet (bei denen die beiden Kreispunkte der Ebene nicht mit einander vertauscht werden.) Will man die Gesammtgruppe der reci-

Veränderlichen, die beliebigen linearen Transformationen unterworfen gedacht ist, ist aber nichts Anderes, als was bei einer etwas abgeänderten Darstellungsweise Theorie der binären Formen genannt wird. Also:

Die Theorie der binären Formen findet ihre Darstellung durch die Geometrie der reciproken Radien in der reellen Ebene, so zwar, dass auch die complexen Werthe der Variabeln repräsentirt werden.

Von der Ebene mögen wir, um in den gewohnteren Vorstellungskreis der projectivischen Umformungen zu gelangen, zur Fläche zweiten Grades aufsteigen. Da wir nur reelle Elemente der Ebene betrachteten, ist es nicht mehr gleichgültig, wie man die Fläche wählt; sie ist ersichtlich nicht geradlinig zu nehmen. Insbesondere können wir uns dieselbe — wie man das zur Interpretation einer complexen Veränderlichen auch sonst thut — als Kugelfläche denken und erhalten so den Satz:

Die Theorie der binären Formen complexer Variabeln findet ihre Repräsentation in der projectivischen Geometrie der reellen Kugelfläche.

Ich habe mir nicht versagen mögen, in einer Note*) noch auseinanderzusetzen, wie schön dieses Bild die Theorie der binären cubischen und biquadratischen Formen erläutert.

§ 7.

Erweiterung des Vorangehenden. Lie's Kugelgeometrie.

An die Theorie der binären Formen, die Geometrie der reciproken Radien und die Liniengeometrie, welche im Vorstehenden coordinirt und nur durch die Zahl der Veränderlichen unterschieden scheinen, lassen sich gewisse Erweiterungen knüpfen, die nun auseinandergesetzt werden mögen. Dieselben sollen einmal dazu beitragen, den Gedanken, dass die Gruppe, welche die Behandlungsweise gegebener Gebiete bestimmt, beliebig erweitert werden kann, an neuen Beispielen zu erläutern; dann aber ist namentlich die Absicht gewesen, Betrachtungen, welche Lie in einer neueren Abhandlung niedergelegt hat**), in ihrer Beziehung zu den hier vorgetragenen Ueberlegungen darzulegen. Der Weg, auf welchem wir zu Lie's Kugelgeometrie gelangen, weicht insofern von dem von Lie eingeschlagenen ab, als Lie an liniengeometrische Vorstellungen anknüpft, während wir, um uns mehr der

---

proken Radien umspannen, so hat man den genannten Transformationen noch die anderen (nicht minder wichtigen) hinzuzufügen: $s' = \frac{\alpha\bar{s} + \beta}{\gamma\bar{s} + \delta}$, wo s' wieder $= x' + iy'$, $\bar{s}$ aber $= x - iy$.]

*) Vergl. Note VII.

**) Partielle Differentialgleichungen und Complexe. Math. Ann. Bd. V.

gewöhnlichen geometrischen Anschauung anzuschliessen und im Zusammenhang mit dem Vorhergehenden zu bleiben, bei den bez. Auseinandersetzungen eine geringere Zahl von Veränderlichen voraussetzen. Die Betrachtungen sind, wie bereits Lie selbst hervorgehoben hat (Göttinger Nachrichten 1871, Nr. 7, 22) von der Zahl der Variabeln unabhängig. Sie gehören dem grossen Kreise von Untersuchungen an, welche sich mit der projectivischen Untersuchung quadratischer Gleichungen zwischen beliebig vielen Veränderlichen beschäftigen, Untersuchungen, die wir bereits öfter berührt haben und die uns noch wiederholt begegnen werden (vergl. § 10 u. a.).

Ich knüpfe an den Zusammenhang an, der zwischen der reellen Ebene und der Kugelfläche durch stereographische Projection hergestellt wird. Wir setzten bereits in § 5 die Geometrie der Ebene mit der Geometrie auf einem Kegelschnitte in Verbindung, indem wir der Geraden der Ebene das Punktepaar zuordneten, in welchem sie den Kegelschnitt trifft. Entsprechend können wir einen Zusammenhang zwischen der Raumgeometrie und der Geometrie auf der Kugel aufstellen, indem wir jeder Ebene des Raumes den Kreis zuordnen, in welchem sie die Kugel schneidet. Uebertragen wir dann durch stereographische Projection die Geometrie auf der Kugel von derselben auf die Ebene, wobei jeder Kreis in einen Kreis übergeht, so entsprechen einander also:

die Raumgeometrie, welche als Element die Ebene, als Gruppe diejenigen linearen Transformationen benutzt, welche eine Kugel in sich überführen;

die ebene Geometrie, deren Element der Kreis, deren Gruppe die Gruppe der reciproken Radien ist.

Die erstere Geometrie wollen wir nun nach zwei Seiten verallgemeinern, indem wir statt ihrer Gruppe eine umfassendere setzen. Die resultirende Erweiterung überträgt sich dann durch die Abbildung ohne Weiteres auf ebene Geometrie.

Statt der linearen Transformationen des aus Ebenen bestehenden Raumes, welche die Kugel in sich überführen, liegt es nahe, entweder die Gesammtheit der linearen Transformationen des Raumes, oder die Gesammtheit der Ebenentransformationen des Raumes zu wählen, welche [in einem noch erst anzugebenden Sinne] die Kugel ungeändert lassen, indem wir das eine Mal von der Kugel, das andere Mal von dem linearen Charakter der anzuwendenden Transformationen absehen. Die erste Verallgemeinerung ist ohne Weiteres verständlich und wir mögen sie also zuerst betrachten und in ihrer Bedeutung für ebene Geometrie verfolgen; auf die zweite kommen wir hernach zurück, wobei es sich denn zunächst darum handelt, die allgemeinste betreffende Transformation zu bestimmen.

Die linearen Transformationen des Raumes haben die Eigenschaft gemein, Ebenenbüschel und Ebenenbündel wieder in solche überzuführen. Aber auf die Kugel übertragen ergibt das Ebenenbüschel ein Kreisbüschel, d. h. eine einfach unendliche Reihe von Kreisen mit gemeinsamen Schnittpunkten; das Ebenenbündel ergibt ein Kreisbündel, d. h. eine zweifach unendliche Schaar von Kreisen, die auf einem festen Kreise senkrecht stehen (dem Kreise, dessen Ebene die Polarebene des den Ebenen des geg. Bündels gemeinsamen Punktes ist). Den linearen Transformationen des Raumes entsprechen also auf der Kugel und weiterhin in der Ebene Kreistransformationen von der charakteristischen Eigenschaft, Kreisbüschel und Kreisbündel in ebensolche überzuführen*). *Die ebene Geometrie welche die Gruppe der so gewonnenen Transformationen benutzt, ist das Bild der gewöhnlichen projectivischen Raumgeometrie.* Als Element der Ebene wird man in dieser Geometrie nicht den Punkt benutzen können, da die Punkte für die gewählte Transformationsgruppe keinen Körper bilden (§ 5), sondern man wird die Kreise als Elemente wählen.

Bei der zweiten Erweiterung, die wir nannten, gilt es zunächst die Frage nach der Art der bez. Transformationsgruppe zu erledigen. Es handelt sich darum, Ebenentransformationen zu finden, die aus jedem [Ebenenbüschel, dessen Axe die Kugel berührt, wieder ein solches Büschel] machen. Wir mögen der kürzeren Ausdrucksweise wegen zunächst die Frage dualistisch umkehren und überdies einen Schritt in der Zahl der Dimensionen hinab gehen; wir wollen also nach Punkttransformationen der Ebene fragen, welche aus jeder Tangente eines gegebenen Kegelschnittes wiederum eine Tangente erzeugen. Zu dem Zwecke betrachten wir die Ebene mit ihrem Kegelschnitte als Bild einer Fläche zweiten Grades, die man von einem nicht auf ihr befindlichen Raumpunkte aus so auf die Ebene projicirt hat, dass der bez. Kegelschnitt die Uebergangscurve vorstellt. Den Tangenten des Kegelschnitts entsprechen die Erzeugenden der Fläche, und die Frage ist auf die andere zurückgeführt nach der Gesammtheit der Punkttransformationen der Fläche in sich selbst, bei denen die Erzeugenden Erzeugende bleiben.

Solcher Transformationen gibt es nun zwar beliebig unendlich viele: denn man braucht nur den Punkt der Fläche als Durchschnitt der Erzeugenden zweierlei Art zu betrachten und jedes der Geradensysteme beliebig in sich zu transformiren. Aber unter den Transformationen sind insbesondere die linearen. Nur auf diese wollen wir achten. Hätten wir nämlich nicht mit einer Fläche, sondern mit einer

*) Diese Transformationen werden gelegentlich in Grassmann's Ausdehnungslehre betrachtet (in der Auflage von 1862, p. 278).

mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu thun, die durch eine quadratische Gleichung repräsentirt wird, so blieben nur die linearen Transformationen, die anderen kämen in Wegfall*).

Diese linearen Transformationen der Fläche in sich selbst ergeben, durch (nicht stereographische) Projection auf die Ebene übertragen, zweideutige Punkttransformationen, vermöge deren aus jeder Tangente des Kegelschnittes, der die Uebergangscurve bildet, allerdings wieder eine Tangente wird, aus jeder anderen Geraden aber im Allgemeinen ein Kegelschnitt, der die Uebergangscurve doppelt berührt. Es lässt sich diese Transformationsgruppe passend charakterisiren, wenn man auf den Kegelschnitt, der die Uebergangscurve bildet, eine projectivische Massbestimmung gründet. Die Transformationen haben dann die Eigenschaft, Punkte, welche im Sinne der Massbestimmung von einander eine Entfernung gleich Null haben, sowie Punkte, welche von einem anderen Punkte eine constante Entfernung haben, wieder in solche Punkte zu verwandeln.

Alle diese Betrachtungen lassen sich auf beliebig viele Variabeln übertragen, insbesondere also für die ursprüngliche Fragestellung, die sich auf die Kugel und die Ebene als Element bezog, verwerthen. Man kann dem Resultate dabei eine besonders anschauliche Form geben, weil der Winkel, den zwei Ebenen im Sinne der auf eine Kugel gegründeten projectivischen Massbestimmung mit einander bilden, mit dem Winkel gleich ist, den ihre Durchschnittskreise mit der Kugel im gewöhnlichen Sinne mit einander bilden.

Wir erhalten also auf der Kugel und weiterhin auf der Ebene eine Gruppe von Kreistransformationen, welche die Eigenschaft haben, *Kreise, die einander berühren (einen Winkel gleich Null einschliessen), sowie Kreise, die einen anderen Kreis unter gleichem Winkel schneiden, in eben solche Kreise überzuführen.* In der Gruppe dieser Transformationen sind auf der Kugel die bez. linearen, in der Ebene die Transformationen der Gruppe der reciproken Radien enthalten**).

---

*) Projicirt man die Mannigfaltigkeit stereographisch, so erhält man den bekannten Satz: In mehrfach ausgedehnten Gebieten (schon im Raume) gibt es ausser den Transformationen, die sich in der Gruppe der reciproken Radien befinden, keine conformen Punkttransformationen. In der Ebene giebt es dagegen beliebig viele andere. Vergl. auch die citirten Arbeiten von Lie.

**) [Die Betrachtungen des Textes dürften durch Zufügung einiger weniger analytischer Formen wesentlich klarer werden. Sei die Gleichung der Kugel, die wir stereographisch auf unsere Ebene beziehen, in gewöhnlichen Tetraedercoordinaten:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0;$$

die an diese Bedingungsgleichung gebundenen x erhalten dann bei uns die Bedeutung ebener tetracyklischer Punktcoordinaten,

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

Die auf diese Gruppe zu gründende Kreisgeometrie ist nun das Analogon zu der *Kugelgeometrie*, wie sie Lie für den Raum entworfen hat, und wie sie bei Untersuchungen über Krümmung der Flächen von ausgezeichneter Bedeutung scheint. Sie schliesst die Geometrie der reciproken Radien in demselben Sinne in sich, wie letztere wieder die elementare Geometrie. —

Die nunmehr gewonnenen Kreis- (Kugel-)Transformationen haben insbesondere die Eigenschaft, sich berührende Kreise (Kugeln) in eben solche überzuführen. Betrachtet man alle Curven (Flächen) als Umhüllungsgebilde von Kreisen (Kugeln), so werden in Folge dessen Curven (Flächen), die sich berühren, immer wieder in solche übergehen. Die fraglichen Transformationen gehören also in die Classe der später allgemein zu betrachtenden *Berührungstransformationen*, d. h. solcher Umformungen, bei denen Berührung von Punktgebilden eine invariante Beziehung ist. Die im vorliegenden Paragraphen zuerst erwähnten Kreistransformationen, denen man analoge Kugeltransformationen an die Seite stellen kann, sind keine Berührungstransformationen. —

Wurden vorstehend die zweierlei Erweiterungen nur an die Geometrie der reciproken Radien angeknüpft, so gelten dieselben in entsprechender Weise für Liniengeometrie, überhaupt für die projectivische Untersuchung einer durch eine quadratische Gleichung ausgeschiedenen Mannigfaltigkeit, wie bereits angedeutet wurde, hier aber nicht weiter ausgeführt werden soll.

---

wird die allgemeine Kreisgleichung der Ebene. Berechnet man den Radius des solcherweise dargestellten Kreises, so kommt man dabei auf die Quadratwurzel

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2},$$

die wir mit iu_5 bezeichnen mögen. Wir können jetzt die Kreise als Elemente der Ebene betrachten. Die Gruppe der reciproken Radien stellt sich dann durch die Gesammtheit der homogenen linearen Umsetzungen der $u_1\, u_2\, u_3\, u_4$ dar, bei denen

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

in ein Multiplum seiner selbst übergeht. Die erweiterte Gruppe aber derjenigen Kreisgeometrie, welche der Lie'schen Kugel geometrie entspricht, besteht aus den homogenen linearen Umsetzungen der *fünf* Variabelen $u_1\, u_2\, u_3\, u_4\, u_5$, welche

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2$$

in ein Multiplum seiner selbst verwandeln.]

§ 8.

Aufzählung weiterer Methoden, denen eine Gruppe von Punkttransformationen zu Grunde liegt.

Elementare Geometrie, Geometrie der reciproken Radien und auch projectivische Geometrie, sofern man von den mit Wechsel des Raumelements verknüpften dualistischen Umformungen absieht, subsumiren sich als einzelne Glieder unter die grosse Menge von denkbaren Betrachtungsweisen, welche überhaupt Gruppen von Punkttransformationen zu Grunde legen. Wir mögen hier nur die folgenden drei Methoden, die hierin mit den genannten übereinstimmen, hervorheben. Sind diese Methoden auch lange nicht in dem Masse, wie die projectivische Geometrie, zu selbständigen Disciplinen entwickelt, so treten sie doch deutlich erkennbar in den neueren Untersuchungen auf*).

1. Die Gruppe der rationalen Umformungen.

Bei rationalen Umformungen muss wohl unterschieden werden, ob dieselben für *alle* Punkte des Gebietes, in welchem man operirt, also des Raumes oder der Ebene etc., rational sind, oder nur für die Punkte einer in dem Gebiete enthaltenen Mannigfaltigkeit, einer Fläche, einer Curve. Nur die ersteren sind zu verwenden, wenn es gilt, im bisherigen Sinne eine Geometrie des Raumes, der Ebene zu entwerfen; die letzteren gewinnen von dem hier gegebenen Standpunkte aus erst Bedeutung, wenn Geometrie auf einer gegebenen Fläche, Curve studirt werden soll. Dieselbe Unterscheidung gilt bei der sogleich anzuführenden Analysis situs.

Die seitherigen Untersuchungen, hier wie dort, haben sich aber wesentlich mit Transformationen der zweiten Art beschäftigt. Insofern dabei nicht die Frage nach der Geometrie auf der Fläche, der Curve war, es sich vielmehr darum handelte, Criterien zu finden, damit zwei Flächen, Curven in einander transformirt werden können, treten diese Untersuchungen aus dem Kreise der hier zu betrachtenden heraus**).

---

*) [Während es sich bei den bis jetzt behandelten Beispielen um Gruppen mit endlicher Parameterzahl handelte, kommen nunmehr im Texte sogenannte unendliche Gruppen in Betracht.]

**) [Von einer anderen Seite ordnen sie sich wieder, was mir 1872 noch nicht bekannt war, auf's Beste in die Betrachtungen des Textes ein. Ist irgend ein algebraisches Gebilde (Curve, oder Fläche, ...) vorgelegt, so übertrage man dasselbe in einen höheren Raum, indem man die Verhältnisse

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \cdots : \varphi_p$$

der zugehörigen Integranden erster Gattung als homogene Coordinaten einführt.

Der hier aufgestellte allgemeine Schematismus umspannt eben nicht die Gesammtheit mathematischer Forschung überhaupt, sondern er bringt nur gewisse Richtungen unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt.

Für eine Geometrie der rationalen Umformungen, wie sie sich unter Zugrundelegung der Transformationen der ersten Art ergeben muss, sind bis jetzt erst die Anfänge vorhanden. Im Gebiete erster Stufe, auf der geraden Linie, sind die rationalen Umformungen mit den linearen identisch und liefern also nichts Neues. In der Ebene kennt man freilich die Gesammtheit der rationalen Umformungen (der Cremona'schen Transformationen), man weiss, dass sie sich durch Zusammensetzung quadratischer erzeugen lassen. Man kennt auch invariante Charaktere der ebenen Curven: ihr Geschlecht, die Existenz der Moduln; aber eigentlich zu einer Geometrie der Ebene in dem hier gemeinten Sinne entwickelt sind diese Betrachtungen noch nicht. Im Raume ist die ganze Theorie noch erst im Entstehen begriffen. Von den rationalen Umformungen kennt man bis jetzt nur wenige und benutzt dieselben, um bekannte Flächen mit unbekannten durch Abbildung in Verbindung zu setzen. —

2. Die Analysis situs.

In der sog. Analysis situs sucht man das Bleibende gegenüber solchen Umformungen, die aus unendlich kleinen Verzerrungen durch Zusammensetzung entstehen. Auch hier muss man, wie bereits gesagt, unterscheiden, ob das ganze Gebiet, also etwa der Raum, als Object der Transformationen gedacht werden soll, oder nur eine aus ihm ausgesonderte Mannigfaltigkeit, eine Fläche. Die Transformationen der ersten Art sind es, die man einer Raumgeometrie würde zu Grunde legen können. Ihre Gruppe wäre wesentlich anders constituirt, als die bisher betrachteten es waren. Indem sie alle Transformationen umfasst, die sich aus reell gedachten unendlich kleinen Punkttransformationen zusammensetzen, trägt sie die principielle Beschränkung auf reelle Raumelemente in sich, und bewegt sich auf dem Gebiete der willkürlichen Function. Man kann diese Transformationsgruppe nicht ungeschickt erweitern, indem man sie noch mit den reellen Collineationen, die auch das unendlich Ferne modificiren, verbindet. —

In diesem Raume hat man dann einfach der weiteren Betrachtung die Gruppe der homogenen linearen Umsetzungen der φ zu Grunde zu legen. Vergl. verschiedene Arbeiten der Herren Brill, Nöther und Weber, sowie z. B. meine eigene Abhandlung: „Zur Theorie der Abel'schen Functionen" in Bd. 36 der mathematischen Annalen.]

3. Die Gruppe aller Punkttransformationen.

Wenn gegenüber dieser Gruppe keine Fläche mehr individuelle Eigenschaften besitzt, da jede in jede andere durch Transformationen der Gruppe übergeführt werden kann, so sind es höhere Gebilde, bei deren Untersuchung die Gruppe mit Vortheil Anwendung findet. Bei der Auffassung der Geometrie, wie sie hier zu Grunde gelegt ist, kann es gleichgültig sein, wenn diese Gebilde seither nicht sowohl als geometrische sondern nur als analytische betrachtet wurden, die gelegentlich geometrische Anwendung fanden, und wenn man bei ihrer Untersuchung Processe anwandte (wie eben beliebige Punkttransformationen), die man erst in neuerer Zeit bewusst als geometrische Umformungen aufzufassen begonnen hat. Unter diese analytischen Gebilde gehören vor allen die homogenen Differentialausdrücke, sodann auch die partiellen Differentialgleichungen. Bei der allgemeinen Discussion der letzteren scheint aber, wie in dem folgenden Paragraphen ausgeführt wird, die umfassendere Gruppe aller Berührungstransformationen noch vortheilhafter.

Der Hauptsatz, der in der Geometrie, welche die Gruppe aller Punkttransformationen zu Grunde legt, in Geltung ist, ist der, *dass eine Punkttransformation für eine unendlich kleine Partie des Raumes immer den Werth einer linearen Transformation hat.* Die Entwickelungen der projectivischen Geometrie haben also nun ihren Werth für das Unendlichkleine, und hierin liegt, mag sonst die Wahl der Gruppe bei Behandlung von Mannigfaltigkeiten willkürlich sein — *hierin liegt ein auszeichnender Charakter für die projectivische Anschauungsweise.*

Nachdem nun schon lange von dem Verhältnisse der Betrachtungsweisen, die einander einschliessende Gruppen zu Grunde legen, nicht mehr die Rede war, mag hier noch einmal ein Beispiel für die allgemeine Theorie des § 2 gegeben werden. Wir mögen uns die Frage vorlegen, wie denn vom Standpunkte „aller Punkttransformationen" projectivische Eigenschaften aufzufassen sind, wobei von den dualistischen Umformungen, die eigentlich mit zur Gruppe der projectivischen Geometrie gehören, abgesehen werden mag. Die Frage deckt sich dann mit der andern: durch welche Bedingung aus der Gesammtheit der Punkttransformationen die Gruppe der linearen ausgeschieden wird. Das Charakteristische der letzteren ist, dass sie jeder Ebene eine Ebene zuordnen: sie sind diejenigen Punkttransformationen, vermöge deren die Mannigfaltigkeit der Ebenen (oder, was auf dasselbe hinaus kommt, der geraden Linien) erhalten bleibt. *Die projectivische Geometrie ist aus der Geometrie aller Punkttransformationen ebenso durch Adjunction der Mannigfaltigkeit der Ebenen zu gewinnen, wie die elementare Geometrie aus der projectivischen durch Adjunction des unendlich fernen Kugelkreises.* Insbesondere haben wir z. B. vom Standpunkte aller

Punkttransformationen die Bezeichnung einer Fläche als einer algebraischen von einer gewissen Ordnung als eine invariante Beziehung zur Mannigfaltigkeit der Ebenen aufzufassen. Es wird dies recht deutlich, wenn man, mit Grassmann, die Erzeugung der algebraischen Gebilde an ihre lineale Construction knüpft.

§ 9.

Von der Gruppe aller Berührungstransformationen.

Berührungstransformationen sind zwar in einzelnen Fällen schon lange betrachtet; auch hat Jacobi bei analytischen Untersuchungen bereits von den allgemeinsten Berührungstransformationen Gebrauch gemacht; aber in die lebendige geometrische Anschauung wurden sie erst durch neuere Arbeiten von Lie eingeführt*). Es ist daher wohl nicht überflüssig, hier ausdrücklich auseinanderzusetzen, was eine Berührungstransformation ist, wobei wir uns, wie immer, auf den Punktraum mit seinen drei Dimensionen beschränken.

Unter einer Berührungstransformation hat man, analytisch zu reden, jede Substitution zu verstehen, welche die Variabelwerthe x, y, z und ihre partiellen Differentialquotienten $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$ durch neue x', y', z', p', q' ausdrückt. Dabei gehen, wie ersichtlich, sich berührende Flächen im Allgemeinen wieder in sich berührende Flächen über, was den Namen Berührungstransformation begründet. Die Berührungstransformationen zerfallen, wenn man vom Punkte als Raumelement ausgeht, in drei Classen: solche, die den dreifach unendlich vielen Punkten wieder Punkte zuordnen — das sind die eben betrachteten Punkttransformationen —, solche, die sie in Curven, endlich solche, die sie in Flächen überführen. Diese Eintheilung hat man insofern nicht als eine wesentliche zu betrachten, als bei Benutzung anderer dreifach unendlich vieler Raumelemente, etwa der Ebenen, allerdings wieder eine Theilung in drei Gruppen eintritt, die aber mit der Theilung, die unter Zugrundelegung der Punkte stattfand, nicht coincidirt.

Wenden wir auf einen Punkt alle Berührungstransformationen an, so geht er in die Gesammtheit aller Punkte, Curven und Flächen über. In ihrer Gesammtheit erst bilden also Punkte, Curven und Flächen einen *Körper* unserer Gruppe. Man mag daraus die allgemeine Regel

*) Vergl. bes. die bereits citirte Arbeit: Ueber partielle Differentialgleichungen und Complexe. Math. Ann. V. Die im Texte gegebenen Ausführungen betr. partielle Differentialgleichungen habe ich wesentlich mündlichen Mittheilungen von Lie entnommen; vergl. dessen Note: Zur Theorie partieller Differentialgleichungen. Göttinger Nachrichten. Oct. 1872.

abnehmen, dass die formale Behandlung eines Problems im Sinne aller Berührungstransformationen (also etwa die sogleich vorzutragende Theorie der partiellen Differentialgleichungen) eine unvollkommene werden muss, sowie man mit Punkt- (oder Ebenen-) Coordinaten operirt, da die zu Grunde gelegten Raumelemente eben keinen Körper bilden.

Alle in dem gen. Körper enthaltene Individuen als Raumelemente einzuführen, geht aber, will man in Verbindung mit den gewöhnlichen Methoden bleiben, nicht an, da deren Zahl unendlichfach unendlich ist. Hierin liegt die Nothwendigkeit, bei diesen Betrachtungen nicht den Punkt, nicht die Curve oder die Fläche, sondern das *Flächenelement*, d. h. das Werthsystem x, y, z, p, q als *Raumelement* einzuführen. Bei jeder Berührungstransformation wird aus jedem Flächenelemente ein neues; die fünffach unendlich vielen Flächenelemente bilden also einen Körper.

Bei diesem Standpunkte muss man Punkt, Curve, Fläche gleichmässig als Aggregate von Flächenelementen auffassen, und zwar von zweifach unendlich vielen. Denn die Fläche wird von ∞^2 Elementen bedeckt, die Curve von ebenso vielen berührt, durch den Punkt gehen ∞^2 hindurch. Aber diese zweifach unendlichen Aggregate von Elementen haben noch eine charakteristische Eigenschaft gemein. Man bezeichne als *vereinigte Lage* zweier consecutiven Flächenelemente x, y, z, p, q und $x + dx, y + dy, z + dz, p + dp, q + dq$ die Beziehung, welche durch

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

dargestellt wird. So sind Punkt, Curve, Fläche übereinstimmend *zweifach unendliche Mannigfaltigkeiten von Elementen, deren jedes mit den einfach unendlich vielen ihm benachbarten vereinigt liegt.* Dadurch sind Punkt, Curve, Fläche gemeinsam charakterisirt, und so müssen sie auch, wenn man die Gruppe der Berührungstransformationen zu Grunde legen will, analytisch repräsentirt werden.

Die vereinigte Lage consecutiver Elemente ist eine bei beliebiger Berührungstransformation invariante Beziehung. Aber auch umgekehrt können die Berührungstransformationen definirt werden *als diejenigen Substitutionen der fünf Veränderlichen x, y, z, p, q, vermöge deren die Relation $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ in sich selbst übergeführt wird.* Der Raum ist also bei diesen Untersuchungen als eine Mannigfaltigkeit von fünf Dimensionen anzusehen und diese Mannigfaltigkeit hat man zu behandeln, indem man als Gruppe die Gesammtheit aller Transformationen der Variabeln zu Grunde legt, welche eine bestimmte Relation zwischen den Differentialen ungeändert lassen.

Gegenstand der Untersuchung werden in erster Linie diejenigen Mannigfaltigkeiten, welche durch eine oder mehrere Gleichungen

zwischen den Variabeln dargestellt werden, d. h. *die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und ihre Systeme.* Eine Hauptfrage wird, wie sich aus den Mannigfaltigkeiten von Elementen, die gegebenen Gleichungen genügen, einfach, zweifach unendliche Reihen von Elementen ausscheiden lassen, deren jedes mit einem benachbarten vereinigt liegt. Auf eine solche Frage läuft z. B. die Aufgabe der Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung hinaus. Man soll — so kann man sie formuliren — aus den vierfach unendlich vielen Elementen, die der Gleichung genügen, alle zweifach unendlichen Mannigfaltigkeiten der bewussten Art ausscheiden. Insbesondere die Aufgabe der vollständigen Lösung nimmt jetzt die präcise Form an: man soll die vierfach unendlich vielen Elemente, die der Gleichung genügen, auf eine Weise in zweifach unendlich viele derartige Mannigfaltigkeiten zerlegen.

Ein Verfolg dieser Betrachtung über partielle Differentialgleichungen kann hier nicht in der Absicht liegen; ich verweise in Bezug hierauf auf die citirten Lie'schen Arbeiten. Es sei nur noch hervorgehoben, dass für den Standpunkt der Berührungstransformationen eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung keine Invariante hat, dass jede in jede andere übergeführt werden kann, dass also namentlich die linearen Gleichungen nicht weiter ausgezeichnet sind. Unterscheidungen treten erst ein, wenn man zu dem Standpunkte der Punkttransformationen zurückgeht.

Die Gruppen der Berührungstransformationen, der Punkttransformationen, endlich der projectivischen Umformungen lassen sich in einer einheitlichen Weise charakterisiren, die ich nicht unterdrücken mag*). Berührungstransformationen wurden bereits definirt als diejenigen Umformungen, bei denen die vereinigte Lage consecutiver Flächenelemente erhalten bleibt. Die Punkttransformationen haben dagegen die charakteristische Eigenschaft, vereinigt gelegene consecutive Linienelemente in eben solche zu verwandeln: die linearen und dualistischen Transformationen endlich bewahren die vereinigte Lage consecutiver Connexelemente. Unter einem Connexelemente verstehe ich die Vereinigung eines Flächenelementes mit einem in ihm enthaltenen Linienelemente; consecutive Connexelemente heissen vereinigt gelegen, wenn nicht nur der Punkt sondern auch das Linienelement des einen in dem Flächenelemente des anderen enthalten ist. Die (übrigens vorläufige) Bezeichnung: Connexelement bezieht sich auf die von Clebsch neuerdings**) in die Geometrie eingeführten Gebilde,

*) Ich verdanke diese Definitionen einer Bemerkung von Lie.

**) Gött. Abhandlungen. 1872. (Bd. 17): Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, sowie namentlich Gött. Nachrichten 1872. Nr. 22: Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene.

welche durch eine Gleichung dargestellt werden, die gleichzeitig eine Reihe Punkt-, eine Reihe Ebenen- und eine Reihe Liniencoordinaten enthalten, und deren Analoga in der Ebene Clebsch als Connexe bezeichnet.

§ 10.

Ueber beliebig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten.

Es wurde bereits wiederholt hervorgehoben, wie bei der Anknüpfung der bisherigen Auseinandersetzungen an die räumliche Vorstellung nur der Wunsch massgebend war, die abstracten Begriffe durch Anlehnung an anschauliche Beispiele leichter entwickeln zu können. An und für sich sind diese Betrachtungen von dem sinnlichen Bilde unabhängig und gehören dem allgemeinen Gebiete mathematischer Forschung an, das man als die Lehre von den ausgedehnten Mannigfaltigkeiten oder (nach Grassmann) kurz als *Ausdehnungslehre* bezeichnet. Wie man die Uebertragung des Vorhergehenden vom Raume auf den blossen Mannigfaltigkeitsbegriff zu bewerkstelligen hat, ist ersichtlich. Es sei dabei nur noch einmal bemerkt, dass wir bei der abstracten Untersuchung, der Geometrie gegenüber, den Vortheil haben, die Gruppe von Transformationen, welche wir zu Grunde legen wollen, ganz willkürlich wählen zu können, während in der Geometrie eine kleinste Gruppe, die Hauptgruppe, von Vornherein gegeben war.

Wir mögen hier nur die folgenden drei Behandlungsweisen, und auch diese ganz kurz berühren.

1. *Die projectivische Behandlungsweise oder die moderne Algebra (Invariantentheorie).*

Ihre Gruppe besteht in der Gesammtheit der linearen und dualistischen Transformationen der zur Darstellung des Einzelnen in der Mannigfaltigkeit verwendeten Veränderlichen; sie ist die Verallgemeinerung der projectivischen Geometrie. Es wurde bereits hervorgehoben, wie diese Behandlungsweise bei der Discussion des unendlich Kleinen in einer um eine Dimension mehr ausgedehnten Mannigfaltigkeit zur Verwendung kommt. Sie schliesst die beiden noch zu nennenden Behandlungsweisen in dem Sinne ein, als ihre Gruppe die bei jenen zu Grunde zu legende Gruppe umfasst.

2. *Die Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse.*

Die Vorstellung einer solchen erwuchs bei Riemann aus der allgemeineren einer Mannigfaltigkeit, in der ein Differentialausdruck der Veränderlichen gegeben ist. Die Gruppe besteht bei ihm aus der Gesammtheit der Transformationen der Variabeln, welche den gegebenen Ausdruck ungeändert lassen. Von einer andern Seite kommt man zur Vorstellung einer Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung,

wenn man im projectivischen Sinne auf eine zwischen den Veränderlichen gegebene quadratische Gleichung eine Massbestimmung gründet. Bei dieser Weise tritt gegenüber der Riemann'schen die Erweiterung ein, dass die Variabeln als complex gedacht werden; man mag hinterher die Veränderlichkeit auf das reelle Gebiet beschränken. Hierher gehören die grosse Reihe von Untersuchungen, die wir in §§ 5, 6, 7 berührt haben.

3. *Die ebene Mannigfaltigkeit.*

Als ebene Mannigfaltigkeit bezeichnet Riemann die Mannigfaltigkeit von constantem verschwindenden Krümmungsmasse. Ihre Theorie ist die unmittelbare Verallgemeinerung der elementaren Geometrie. Ihre Gruppe kann — wie die Hauptgruppe der Geometrie — aus der Gruppe der projectivischen dadurch ausgeschieden werden, dass man ein Gebilde fest hält, welches durch zwei Gleichungen, eine lineare und eine quadratische, dargestellt wird. Dabei hat man zwischen Reellem und Imaginärem zu unterscheiden, wenn man sich der Form, unter der die Theorie gewöhnlich dargestellt wird, anschliessen will. Hierher zu rechnen sind vor Allem die elementare Geometrie selbst, dann z. B. die in neuerer Zeit entwickelten Verallgemeinerungen der gewöhnlichen Krümmungstheorie u. s. w.

Schlussbemerkungen.

Zum Schlusse mögen noch zwei Bemerkungen ihre Stelle finden, die mit dem bisher Vorgetragenen in enger Beziehung stehen; die eine betrifft den Formalismus, durch welche man die begrifflichen Entwickelungen des Vorangehenden repräsentiren will, die andere soll einige Probleme kennzeichnen, deren Inangriffnahme nach den hier gegebenen Auseinandersetzungen als wichtig und lohnend erscheint.

Man hat der analytischen Geometrie häufig den Vorwurf gemacht, durch Einführung des Coordinatensystems willkürliche Elemente zu bevorzugen, und dieser Vorwurf trifft gleichmässig jede Behandlungsweise ausgedehnter Mannigfaltigkeiten, welche das Einzelne durch die Werthe von Veränderlichen charakterisirt. War dieser Vorwurf bei der mangelhaften Art, mit der man namentlich früher die Coordinatenmethode handhabte, nur zu oft gerechtfertigt, so verschwindet er bei einer rationellen Behandlung der Methode. Die analytischen Ausdrücke, welche bei der Untersuchung einer Mannigfaltigkeit im Sinne einer Gruppe entstehen können, müssen, ihrer Bedeutung nach, von dem Coordinatensysteme, insofern es zufällig gewählt ist, unabhängig sein, und es gilt nun, diese Unabhängigkeit auch *formal* in Evidenz zu setzen. Dass dies möglich ist und wie es zu geschehen hat, zeigt die moderne Algebra, in der der formale Invariantenbegriff, um den es sich hier handelt, am deutlichsten ausgeprägt ist. Sie besitzt ein allgemeines

und erschöpfendes Bildungsgesetz für invariante Ausdrücke und operirt principiell nur mit solchen. Die gleiche Forderung soll man an die formale Behandlung stellen, auch wenn andere Gruppen, als die projectivische, zu Grunde gelegt sind*). Denn der Formalismus soll sich doch mit der Begriffsbildung decken, mag man nun den Formalismus nur als präcisen und durchsichtigen Ausdruck der Begriffsbildung verwerthen, oder will man ihn benutzen, um an seiner Hand in noch unerforschte Gebiete einzudringen. —

Die Problemstellung, deren wir noch erwähnen wollten, erwächst durch einen Vergleich der vorgetragenen Anschauungen mit der sog. Galois'schen Theorie der Gleichungen.

In der Galois'schen Theorie, wie hier, concentrirt sich das Interesse auf *Gruppen* von Aenderungen. Die Objecte, auf welche sich die Aenderungen beziehen, sind allerdings verschieden; man hat es dort mit einer endlichen Zahl discreter Elemente, hier mit der unendlichen Zahl von Elementen einer stetigen Mannigfaltigkeit zu thun. Aber der Vergleich lässt sich bei der Identität des Gruppenbegriffes doch weiter verfolgen**), und es mag dies hier um so lieber angedeutet werden, als dadurch die Stellung charakterisirt wird, die man gewissen von Lie und mir begonnenen Untersuchungen***) im Sinne der hier entwickelten Anschauungen zuzuweisen hat.

In der Galois'schen Theorie, wie sie z. B. in Serret's Traité d'Algèbre supérieure oder in C. Jordan's Traité des substitutions dargestellt wird, ist der eigentliche Untersuchungsgegenstand die Gruppen- oder Substitutionstheorie selbst, die Gleichungstheorie fliesst aus ihr als eine Anwendung. Entsprechend verlangen wir eine *Transformationstheorie*, eine Lehre von den Gruppen, welche von Transformationen gegebener Beschaffenheit erzeugt werden können. Die Begriffe der Vertauschbarkeit, der Aehnlichkeit u. s. w. kommen, wie in der Substitutionstheorie, zur Verwendung. Als eine Anwendung der Transformationstheorie erscheint die aus der Zugrundelegung der Transformationsgruppen fliessende Behandlung der Mannigfaltigkeit.

In der Gleichungstheorie sind es zunächst die symmetrischen Functionen der Coefficienten, die das Interesse auf sich ziehen, sodann aber diejenigen Ausdrücke, welche, wenn nicht bei allen, so durch

---

*) [Beispielsweise stellen für die Gruppe der Drehungen des dreidimensionalen Raumes um einen festen Punkt die Quaternionen einen solchen Formalismus dar.]

**) Ich erinnere hier daran, dass Grassmann bereits in der Einleitung zur ersten Auflage seiner Ausdehnungslehre (1844) die Combinatorik und die Ausdehnungslehre parallelisirt.

***) Vergleiche den gemeinsamen Aufsatz: Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Math. Annalen Bd. IV.

eine grössere Reihe von Vertauschungen der Wurzeln ungeändert bleiben. Bei der Behandlung einer Mannigfaltigkeit unter Zugrundelegung einer Gruppe fragen wir entsprechend zunächst nach den Körpern (§ 5), nach den Gebilden, die durch alle Transformationen der Gruppe ungeändert bleiben. Aber es gibt Gebilde, welche nicht alle aber einige Transformationen der Gruppe zulassen, und diese sind dann im Sinne der auf die Gruppe gegründeten Behandlung besonders interessant, sie haben ausgezeichnete Eigenschaften. Es kommt das also darauf hinaus, im Sinne der gewöhnlichen Geometrie symmetrische, reguläre Körper, Rotations- und Schraubenflächen auszuzeichnen. Stellt man sich auf den Standpunkt der projectivischen Geometrie und verlangt insbesondere, dass die Transformationen, durch welche die Gebilde in sich übergehen, vertauschbar sein sollen, so kommt man auf die von Lie und mir in dem citirten Aufsatze betrachteten Gebilde und auf das in § 6 desselben gestellte allgemeine Problem. Die dort in §§ 1, 3 gegebene Bestimmung aller Gruppen unendlich vieler vertauschbarer linearer Transformationen in der Ebene gehört als ein Theil in die soeben genannte allgemeine Transformationstheorie*).

Noten.

1. *Ueber den Gegensatz der synthetischen und analytischen Richtung in der neueren Geometrie.*

Den Unterschied zwischen neuerer Synthese und neuerer analytischer Geometrie hat man zur Zeit nicht mehr als einen wesentlichen zu betrachten, da der gedankliche Inhalt sowohl als die Schlussweise sich auf beiden Seiten allmählich ganz ähnlich gestaltet haben. Daher wählen wir im Texte zur gemeinsamen Bezeichnung beider das Wort „projectivische Geometrie". Wenn die synthetische Methode mehr mit räumlicher Anschauung arbeitet und ihren ersten, einfachen Entwickelungen dadurch einen ungemeinen Reiz ertheilt, so ist das Gebiet räumlicher Anschauung der analytischen Methode nicht verschlossen, und man kann die Formeln der analytischen Geometrie als einen präcisen und durchsichtigen Ausdruck der geometrischen Beziehungen auffassen. Man hat auf der anderen Seite den Vortheil nicht zu unter-

*) Ich muss mir versagen, im Texte auf die Fruchtbarkeit hinzuweisen, welche die Betrachtung unendlich kleiner Transformationen in der Theorie der Differentialgleichungen hat. In § 7 der citirten Arbeit haben Lie und ich gezeigt: Gewöhnliche Differentialgleichungen, welche gleiche unendlich kleine Transformationen zugeben, bieten gleiche Integrationsschwierigkeiten. Wie die Betrachtungen für partielle Differentialgleichungen zu verwerthen seien, hat Lie an verschiedenen Orten, so bes. in dem früher genannten Aufsatze (Math. Ann. V), an verschiedenen Beispielen auseinandergesetzt, (vergl. namentlich auch Mittheilungen der Academie zu Christiania. Mai 1872).

schätzen, den ein gut angelegter Formalismus der Weiterforschung dadurch leistet, dass er gewissermassen dem Gedanken vorauseilt. Es ist zwar immer an der Forderung festzuhalten, dass man einen mathematischen Gegenstand noch nicht als erledigt betrachten soll, so lange er nicht begrifflich evident geworden ist, und es ist das Vordringen an der Hand des Formalismus eben nur ein erster aber schon sehr wichtiger Schritt.

II. *Trennung der heutigen Geometrie in Disciplinen.*

Wenn man z. B. beachtet, wie der mathematische Physiker sich durchgängig der Vortheile entschlägt, die ihm eine nur einigermassen ausgebildete projectivische Anschauung in vielen Fällen gewähren kann, wie auf der anderen Seite der Projectiviker die reiche Fundgrube mathematischer Wahrheiten unberührt lässt, welche die Theorie der Krümmung der Flächen aufgedeckt hat, so muss man den gegenwärtigen Zustand des geometrischen Wissens als recht unvollkommen und als hoffentlich vorübergehend betrachten.

III. *Ueber den Werth räumlicher Anschauung.*

Wenn wir im Texte die räumliche Anschauung als etwas Beiläufiges bezeichnen, so ist dies mit Bezug auf den rein mathematischen Inhalt der zu formulirenden Betrachtungen gemeint. Die Anschauung hat für ihn nur den Werth der Veranschaulichung, der allerdings in pädagogischer Beziehung sehr hoch anzuschlagen ist. Ein geometrisches Modell z. B. ist auf diesem Standpunkte sehr lehrreich und interessant.

Ganz anders stellt sich aber die Frage nach dem Werthe der räumlichen Anschauung überhaupt. Ich stelle denselben als etwas selbständiges hin. Es gibt eine eigentliche Geometrie, die nicht, wie die im Texte besprochenen Untersuchungen, nur eine veranschaulichte Form abstracterer Untersuchungen sein will. In ihr gilt es, die räumlichen Figuren nach ihrer vollen gestaltlichen Wirklichkeit aufzufassen und (was die mathematische Seite ist) die für sie geltenden Beziehungen als evidente Folgen der Grundsätze räumlicher Anschauung zu verstehen. Ein Modell — mag es nun ausgeführt und angeschaut oder nur lebhaft vorgestellt sein — ist für diese Geometrie nicht ein Mittel zum Zwecke sondern die Sache selbst.

Wenn wir so, neben und unabhängig von der reinen Mathematik, Geometrie als etwas Selbständiges hinstellen, so ist das an und für sich gewiss nichts Neues. Es ist aber wünschenswerth, diesen Gesichtspunkt ausdrücklich einmal wieder hervorzuheben, da die neuere Forschung ihn fast ganz übergeht. Hiermit hängt zusammen, dass umgekehrt die neuere Forschung selten dazu verwendet wurde, wenn es galt, gestaltliche Verhältnisse räumlicher Erzeugnisse zu beherrschen, und doch scheint sie gerade in dieser Richtung sehr fruchtbar.

IV. *Ueber Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen.*

Dass der Raum, als Ort für Punkte aufgefasst, nur drei Dimensionen hat, braucht vom mathematischen Standpunkte aus nicht discutirt zu werden; ebenso wenig kann man aber vom mathematischen Standpunkte aus Jemanden hindern, zu behaupten, der Raum habe eigentlich vier, oder unbegränzt viele Dimensionen, wir seien aber nur im Stande, drei wahrzunehmen. Die Theorie der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, wie sie je länger je mehr in den Vordergrund neuerer mathematischer Forschung tritt, ist, ihrem Wesen nach, von einer solchen Behauptung vollkommen unabhängig. Es hat sich in ihr aber eine Redeweise eingebürgert, die allerdings dieser Vorstellung entflossen ist. Man spricht, statt von den Individuen einer Mannigfaltigkeit, von den Punkten eines höheren Raumes etc. An und für sich hat diese Redeweise manches Gute, insofern sie durch Erinnern an die geometrischen Anschauungen das Verständniss erleichtert. Sie hat aber die nachtheilige Folge gehabt, dass in ausgedehnten Kreisen die Untersuchungen über Mannigfaltigkeiten mit beliebig vielen Dimensionen als solidarisch erachtet werden mit der erwähnten Vorstellung von der Beschaffenheit des Raumes. Nichts ist grundloser als diese Auffassung. Die betr. mathematischen Untersuchungen würden allerdings sofort geometrische Verwendung finden, wenn die Vorstellung richtig wäre, — aber ihr Werth und ihre Absicht ruht, gänzlich unabhängig von dieser Vorstellung, in ihrem eigenen mathematischen Inhalte.

Etwas ganz anderes ist es, wenn Plücker gelehrt hat, den wirklichen Raum als eine Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen aufzufassen, indem man als Element des Raumes ein von beliebig vielen Parametern abhängendes Gebilde (Curve, Fläche etc.) einführt (vergl. § 5 des Textes).

Die Vorstellungsweise, welche das Element der beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit als ein Analogon zum Punkte des Raumes betrachtet, ist wohl zuerst von Grassmann in seiner Ausdehnungslehre (1844) entwickelt worden. Bei ihm ist der Gedanke völlig frei von der erwähnten Vorstellung von der Natur des Raumes; letztere geht auf gelegentliche Bemerkungen von Gauss zurück und wurde durch Riemann's Untersuchungen über mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, in welche sie mit eingeflochten ist, in weiteren Kreisen bekannt.

Beide Auffassungsweisen — die Grassmann'sche wie die Plücker'sche — haben ihre eigenthümlichen Vorzüge; man verwendet sie beide, zwischen ihnen abwechselnd, mit Vortheil.

V. *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.*

Die im Texte gemeinte projectivische Massgeometrie coïncidirt, wie neuere Untersuchungen gelehrt haben, dem Wesen nach mit der

Massgeometrie, welche unter Nichtannahme des Parallelenaxioms entworfen werden kann und die zur Zeit unter dem Namen der Nicht-Euklidischen Geometrie vielfach besprochen und discutirt wird. Wenn wir im Texte diesen Namen überhaupt nicht berührt haben, so geschah es aus einem Grunde, der mit den in der vorstehenden Note gegebenen Auseinandersetzungen verwandt ist. Man verknüpft mit dem Namen Nicht-Euklidische Geometrie eine Menge unmathematischer Vorstellungen, die auf der einen Seite mit eben so viel Eifer gepflegt als auf der anderen perhorrescirt werden, mit denen aber unsere rein mathematischen Betrachtungen gar Nichts zu schaffen haben. Der Wunsch, in dieser Richtung etwas zur Klärung der Begriffe beizutragen, mag die folgenden Auseinandersetzungen motiviren.

Die gemeinten Untersuchungen über Parallelentheorie haben mit ihren Weiterbildungen mathematisch nach zwei Seiten einen bestimmten Werth.

Sie zeigen einmal — und dieses ihr Geschäft kann man als ein einmaliges, abgeschlossenes betrachten —, dass das Parallelenaxiom keine mathematische Folge der gewöhnlich vorangestellten Axiome ist, sondern dass ein wesentlich neues Anschauungselement, welches in den vorhergehenden Untersuchungen nicht berührt wurde, in ihm zum Ausdruck gelangt. Aehnliche Untersuchungen könnte man und sollte man mit Bezug auf jedes Axiom nicht nur der Geometrie durchführen; man würde dadurch an Einsicht in die gegenseitige Stellung der Axiome gewinnen.

Dann aber haben uns diese Untersuchungen mit einem werthvollen mathematischen Begriffe beschenkt: dem Begriffe einer Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung. Er hängt, wie bereits bemerkt und wie in § 10 des Textes noch weiter ausgeführt ist, mit der unabhängig von aller Parallelentheorie erwachsenen projectivischen Massbestimmung auf das Innigste zusammen. Wenn das Studium dieser Massbestimmung an und für sich hohes mathematisches Interesse bietet und zahlreiche Anwendungen gestattet, so kommt hinzu, dass sie die in der Geometrie gegebene Massbestimmung als speciellen Fall (Gränzfall) umfasst und uns lehrt, dieselbe von einem erhöhten Standpunkte aufzufassen.

Völlig unabhängig von den entwickelten Gesichtspunkten steht die Frage, welche Gründe das Parallelenaxiom stützen, ob wir dasselbe als absolut gegeben — wie die Einen wollen — oder als durch Erfahrung nur approximativ erwiesen — wie die Anderen sagen — betrachten wollen. Sollten Gründe sein, das letztere anzunehmen, so geben uns die fragl. mathematischen Untersuchungen an die Hand, wie man dann eine exactere Geometrie zu construiren habe. Aber die Fragestellung ist offenbar eine philosophische, welche die allgemeinsten Grundlagen unserer Erkenntniss betrifft. Den Mathematiker *als solchen*

interessirt die Fragestellung nicht, und er wünscht, dass seine Untersuchungen nicht als abhängig betrachtet werden von der Antwort, die man von der einen oder der anderen Seite auf die Frage geben mag.

VI. *Liniengeometrie als Untersuchung einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse.*

Wenn wir Liniengeometrie mit der projectivischen Massbestimmung in einer fünffach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in Verbindung setzen, müssen wir beachten, dass wir in den geraden Linien nur die (im Sinne der Massbestimmung) unendlich fernen Elemente der Mannigfaltigkeit vor uns haben. Es wird daher nöthig, zu überlegen, welchen Werth eine projectivische Massbestimmung für ihre unendlich fernen Elemente hat, und das mag hier etwas auseinandergesetzt werden, um Schwierigkeiten, die sich sonst der Auffassung der Liniengeometrie als einer Massgeometrie entgegen stellen, zu entfernen. Wir knüpfen diese Auseinandersetzungen an das anschauliche Beispiel, welches die auf eine Fläche zweiten Grades gegründete projectivische Massbestimmung ergibt.

Zwei beliebig angenommene Punkte des Raumes haben in Bezug auf die Fläche eine absolute Invariante: ihr Doppelverhältniss zu den beiden Durchschnittspunkten ihrer Verbindungsgeraden mit der Fläche. Rücken aber die beiden Punkte auf die Fläche, so wird dies Doppelverhältniss unabhängig von der Lage der Punkte gleich Null, ausser in dem Falle, dass die beiden Punkte auf eine Erzeugende zu liegen kommen, wo es unbestimmt wird. Dies ist die einzige Particularisation, die in ihrer Beziehung eintreten kann, wenn sie nicht zusammenfallen, und wir haben also den Satz:

Die projectivische Massbestimmung, welche man im Raume auf eine Fläche zweiten Grades gründen kann, ergibt für die Geometrie auf der Fläche noch keine Massbestimmung.

Hiermit hängt zusammen, dass man durch lineare Transformationen der Fläche in sich selbst drei beliebige Punkte derselben mit drei anderen zusammenfallen lassen kann*).

Will man auf der Fläche selbst eine Massbestimmung haben, so muss man die Gruppe der Transformationen beschränken, und dies erreicht man, indem man einen beliebigen Raumpunkt (oder seine Polarebene) festhält. Der Raumpunkt sei zunächst nicht auf der Fläche

*) Diese Verhältnisse ändern sich bei der gew. Massgeometrie; zwei unendlich ferne Punkte haben für sie freilich eine absolute Invariante. Der Widerspruch, den man in der Abzählung der linearen Transformationen der unendlich fernen Fläche in sich selbst hiermit finden könnte, erledigt sich dadurch, dass die unter ihnen befindlichen Translationen und Aehnlichkeitstransformationen das Unendlichferne überhaupt nicht ändern.

gelegen. So projicire man die Fläche von dem Punkte auf eine Ebene, wobei ein Kegelschnitt als Uebergangscurve auftritt. Auf diesen Kegelschnitt gründe man in der Ebene eine projectivische Massbestimmung, die man dann rückwärts auf die Fläche überträgt*). Dies ist eine eigentliche Massbestimmung von constanter Krümmung und man hat also den Satz:

Auf der Fläche erhält man eine solche Massbestimmung, sowie man einen ausserhalb der Fläche gelegenen Punkt festhält.

Entsprechend findet man**):

Eine Massbestimmung von verschwindender Krümmung erhält man auf der Fläche, wenn man für den festen Punkt einen Punkt der Fläche selbst wählt.

Für alle diese Massbestimmungen auf der Fläche sind die Erzeugenden der Fläche Linien von verschwindender Länge. Der Ausdruck für das Bogenelement auf der Fläche ist also für die verschiedenen Bestimmungen nur um einen Factor verschieden. Ein absolutes Bogenelement auf der Fläche gibt es nicht. Wohl aber kann man von dem Winkel sprechen, den Fortschreitungsrichtungen auf der Fläche mit einander bilden. —

Alle diese Sätze und Betrachtungen können nun ohne Weiteres für Liniengeometrie benutzt werden. Für den Linienraum selbst existirt zunächst keine eigentliche Massbestimmung. Eine solche erwächst erst, wenn wir einen linearen Complex fest halten, und zwar erhält sie constante oder verschwindende Krümmung, je nachdem der Complex ein allgemeiner oder ein specieller (eine Gerade) ist. An die Auszeichnung eines Complexes ist namentlich auch die Geltung eines absoluten Bogenelements geknüpft. Unabhängig davon sind die Fortschreitungsrichtungen zu benachbarten Geraden, welche die gegebene schneiden, von der Länge Null, und auch kann man von einem Winkel reden, den zwei beliebige Fortschreitungsrichtungen mit einander bilden***).

VII. *Zur Interpretation der binären Formen.*

Es mag hier der übersichtlichen Gestalt gedacht werden, welche, unter Zugrundelegung der Interpretation von $x + iy$ auf der Kugelfläche, dem Formensysteme der cubischen und der biquadratischen binären Form ertheilt werden kann.

Eine cubische binäre Form f hat eine cubische Covariante Q,

*) Vergl. § 7 des Textes.

**) Verg. § 4 des Textes.

***) Vergl. den Aufsatz: Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie. Math. Ann. Bd. V. p. 271.

eine quadratische Δ, und eine Invariante R*). Aus f und Q setzt sich eine ganze Reihe von Covarianten sechsten Grades

$$Q^2 + \lambda \cdot Rf^2$$

zusammen, unter denen auch Δ^3 enthalten ist. Man kann zeigen**), dass jede Covariante der cubischen Form in solche Gruppen von sechs Punkten zerfallen muss. Insofern λ complexe Werthe annehmen kann, gibt es zweifach unendlich viele derselben.

Das ganze so umgrenzte Formensystem kann auf der Kugel nun folgendermassen repräsentirt werden***). Durch geeignete lineare Transformation der Kugel in sich selbst bringe man die drei Punkte, welche f repräsentiren, in drei äquidistante Punkte eines grössten Kreises. Derselbe mag als Aequator bezeichnet sein; auf ihm haben die drei Punkte f die geographische Länge 0^0, 120^0, 240^0. So wird Q durch die Punkte des Aequators mit der Länge 60^0, 180^0, 300^0, Δ durch die beiden Pole vorgestellt. Jede Form $Q^2 + \lambda Rf^2$ ist durch 6 Punkte repräsentirt, deren geographische Breite und Länge, unter α und β beliebige Zahlen verstanden, in dem folgenden Schema enthalten ist:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \alpha & \alpha & \alpha & -\alpha & -\alpha & -\alpha \\ \beta & 120+\beta & 240+\beta & -\beta & 120-\beta & 240-\beta \end{array}.$$

Verfolgt man diese Punktsysteme auf der Kugel, so ist es interessant, zu sehen, wie f und Q doppelt, Δ dreifach zählend aus denselben entsteht.

Eine biquadratische Form f hat eine ebensolche Covariante H, eine Covariante sechsten Grades T, zwei Invarianten i und j. Besonders zu bemerken ist die Schaar biquadratischer Formen $iH + \lambda jf$, die alle zu dem nämlichen T gehören, und unter denen die drei quadratischen Factoren, in welche man T zerlegen kann, doppelt zählend enthalten sind. —

Man lege jetzt durch den Mittelpunkt der Kugel drei zu einander rechtwinklige Axen OX, OY, OZ. Ihre 6 Durchstosspunkte mit der Kugel bilden die Form T. Die 4 Punkte eines Quadrupels $iH + \lambda jf$ sind, unter x, y, z Coordinaten eines beliebigen Kugelpunktes verstanden, durch das Schema

---

*) Vergl. hiezu die betr. Abschnitte von Clebsch: Theorie der binären Formen.

**) Durch Betrachtung der linearen Transformationen von f in sich selbst, vergl. Math. Ann. IV, p. 352.

***) [Man vergl. auch Beltrami, Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche, Accademia di Bologna, Memorie, 1870].

$$\begin{array}{rrr} x, & y, & z, \\ x, & -y, & -z, \\ -x, & y, & -z, \\ -x, & -y, & z \end{array}$$

vorgestellt. Die vier Punkte bilden jedesmal die Ecken eines symmetrischen Tetraeders, dessen gegenüberstehende Seiten von den Axen des Coordinatensystems halbirt werden, wodurch die Rolle, welche T in der Theorie der biquadratischen Gleichungen als Resolvente von $H + \lambda jf$ spielt, gekennzeichnet ist.

Erlangen, im October 1872.

Sopra alcune classi di gruppi di sostituzioni lineari a coefficienti complessi.

di

Luigi Bianchi in Pisa.

In tre successivi lavori, pubblicati nei Volumi 38°, 40° e 41° di questi Annali, ho studiato i gruppi di sostituzioni lineari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

i cui coefficienti α, β, γ, δ percorrono tutti i numeri interi di un corpo quadratico immaginario che rendono il determinante della sostituzione eguale ad un' unità, e seguendo l'interpretazione geometrica del Sig^r Poincaré ho determinato, nei casi più semplici, il poliedro fondamentale del gruppo.

Nella prima parte del presente lavoro studio una classe di sottogruppi congruenziali dei gruppi ora ricordati. Una seconda parte viene poi dedicata alla ricerca di una classe di gruppi affatto distinta dalla precedente. Questi gruppi si presentano, nel campo dei numeri complessi, come naturale estensione dei gruppi studiati dal Sig^r Fricke nei Vol^i 38° e 39° di questi Annali e d'altra parte provengono dal gruppo aritmetico riproduttivo di una classe di forme quaternarie reali nel modo esaminato nell' ultimo dei miei lavori citati.*)

Delle corrispondenti applicazioni aritmetiche alla teoria delle forme quadratiche di Dirichlet e di Hermite è sembrato qui sufficiente dare un cenno soltanto, poichè le considerazioni stesse sviluppate nei precedenti lavori valgono ancora, appena fissato il poliedro generatore del gruppo, a stabilirne i principii fondamentali.

*) La memorie dei Vol^i 40°, 41° saranno citate in seguito, per brevità, rispettivamente con (B), (C).

Parte prima.

Sottogruppi congruenziali di $\Gamma^{(\omega)}$.

§ 1.

Definizione del gruppo $G_{(D,\nu)}$.

Le sostituzioni della forma

$$(S) \qquad \varepsilon' = \frac{\alpha\varepsilon + \beta}{\nu\gamma\varepsilon + \delta},$$

dove ν è un numero fisso che supporremo *razionale*, *intero* e *positivo* e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono tutti i numeri interi di un corpo quadratico immaginario Ω, che rendono il determinante della S eguale ad un' unità, formano un sottogruppo *congruenziale* di $\Gamma^{(\omega)}$.*) Il poliedro fondamentale di un tale sottogruppo, il cui indice è necessariamente *finito*, si potrebbe dedurre dal poliedro generatore di $\Gamma^{(\omega)}$, affatto similmente come dal triangolo fondamentale del gruppo modulare deducesi il poligono fondamentale di un suo sottogruppo. Però il necessario passaggio nell' interpretazione geometrica dal piano allo spazio complicherebbe singolarmente la ricerca; ma un' altra importante circostanza rende pereferibile la ricerca diretta. Il gruppo delle S è contenuto infatti quale sottogruppo eccezionale d'indice 2 in un gruppo più ampio, le cui nuove sostituzioni non appartengono più a $\Gamma^{(\omega)}$. E invero se alle S associamo le sostituzioni T della forma:

$$(T) \qquad \varepsilon' = \frac{\alpha\sqrt{\nu}\varepsilon + \frac{\beta}{\sqrt{\nu}}}{\gamma\sqrt{\nu}\varepsilon + \delta\sqrt{\nu}},$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono nuovamente gli interi di Ω, che rendono il determinante della T eguale ad un' unità, vediamo che il prodotto di una S per una T è una T, mentre il prodotto di due T è una S. Pertanto le S, T formano complessivamente un gruppo, pel quale adotteremo la notazione $G_{(D,\nu)}$; il gruppo delle S è evidentemente contenuto in $G_{(D,\nu)}$ come sottogruppo eccezionale d'indice 2.

Inoltre, essendo ν reale e positivo, il gruppo $G_{(D,\nu)}$ è permutabile colla riflessione

$$\varepsilon' = \varepsilon_0$$

e associando alle S, T le sostituzioni di 2ª specie

*) Per le notazioni cf. memoria (B).

$$(S_0)\quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\nu\gamma z_0 + \delta}, \qquad (T_0)\quad z' = \frac{\alpha\sqrt{\nu}\, z_0 + \frac{\beta}{\sqrt{\nu}}}{\gamma\sqrt{\nu}\, z_0 + \delta\sqrt{\nu}}$$

abbiamo un ulteriore gruppo che indicheremo con $\overline{G}_{(D,\nu)}$ in cui $G_{(D,\nu)}$ è alla sua volta contenuto come sottogruppo eccezionale d'indice 2.

§ 2.

Le riflessioni in $\overline{G}_{(D,\nu)}$.

Per la determinazione del poliedro fondamentale di $\overline{G}_{(D,\nu)}$ la prima e più importante ricerca è quella delle riflessioni contenute nel gruppo ((B) §§ 6, 7). Riferendoci alle particolareggiate discussioni dei lavori precedenti, possiamo qui limitarci a dare i risultati effettivi. E così osserveremo in primo luogo che: *il gruppo attuale ammette gli stessi piani di riflessione di* $\Gamma^{(\omega)}$. Le sfere di riflessione si classificano poi in quattro tipi, due dei quali provengono dalle sostituzioni della forma S_0 e due da quelle della forma T_0. Distinguendo i casi

$1^0\ D = 1, \qquad 2^0\ D \equiv 1, 2 \pmod 4, \qquad 3^0\ D \equiv 3 \pmod 4,$

otteniamo i risultati che si riassumono nei quadri seguenti.

1^0 *caso.* $D = 1$

Tipo I)

Sostituzione:

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + b_1}{\nu c_1 z_0 - (a_1 - i a_2)},$$

$$(A)\quad a_1^2 + a_2^2 + \nu b_1 c_1 = 1.$$

Sfera di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{a_1}{\nu c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2}{\nu c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{\nu^2 c_1^2}.$$

Tipo II)

Sostituzione:

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + (1 - i) b_1}{(1 - i)\nu c_1 z_0 + a_2 + i a_1},$$

$$(B)\quad a_1^2 + a_2^2 + 2\nu b_1 c_1 = 0.$$

Sfera di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{a_1 - a_2}{2\nu c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1 + a_2}{2\nu c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2\nu^2 c_1^2}.$$

Tipo III)

Sostituzione:

$$z' = \frac{\sqrt{\nu}(a_1 + i a_2) z_0 + \frac{b_1}{\sqrt{\nu}}}{c_1\sqrt{\nu}\, z_0 - \sqrt{\nu}(a_1 - i a_2)},$$

$$(C)\quad \nu(a_1^2 + a_2^2) + b_1 c_1 = 1.$$

Sfera di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2}{c_1}\right) + \zeta^2 = \frac{1}{\nu c_1^2}.$$

Tipo IV)

Sostituzione:

$$z' = \frac{\sqrt{\nu}\,(a_1 + i a_2) z_0 + (1-i)\,\frac{b_1}{\sqrt{\nu}}}{(1-i)\,c_1\sqrt{\nu}\,z_0 + \sqrt{\nu}\,(a_2 + i a_1)},$$

$$(D) \quad \nu(a_1^2 + c_1^2) + 2 b_1 c_1 = 1.$$

Sfera di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{a_1 - a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1 + a_2}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2\nu c_1^2}.$$

In questo, come nei quadri seguenti, a_1, a_2, b_1, c_1 indicano numeri razionali interi assoggettati soltanto alle rispettive equazioni segnate (A), (B), (C), (D).

2^0 *caso.* $D \equiv 1$ o $D \equiv 2$ (mod. 4).

Tipo I)

Sostituzione:

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2\sqrt{D})\, z_0 + b_1}{\nu c_1 z_0 - (a_1 - i a_2\sqrt{D})},$$

$$(A) \quad a_1^2 + D a_2^2 + \nu b_1 c_1 = 1.$$

Sfera di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{a_1}{\nu c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{\nu c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{\nu^2 c_1^2}.$$

Tipo II)

Sostituzione:

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2\sqrt{D})\, z_0 + i b_1\sqrt{D}}{i\nu c_1\sqrt{D}\, z_0 + (a_1 - i a_2\sqrt{D})},$$

$$(B) \quad a_1^2 + D a_2^2 + D\nu b_1 c_1 = 1.$$

Sfera di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{a_2}{\nu c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{\nu c_1\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{D\nu^2 c_1^2}.$$

Tipo III)

Sostituzione:

$$z' = \frac{\sqrt{\nu}\,(a_1 + i a_2\sqrt{D})\, z_0 + \frac{b_1}{\sqrt{\nu}}}{c_1\sqrt{\nu}\, z_0 - \sqrt{\nu}\,(a_1 - i a_2\sqrt{D})},$$

$$(C) \quad \nu(a_1^2 + D a_2^2) + b_1 c_1 = 1.$$

Sfera di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{\nu c_1^2}.$$

Tipo IV)
Sostituzione:
$$z' = \frac{\sqrt{\nu}\,(a_1 + i a_2\sqrt{D})\,z_0 + \frac{i b_1\sqrt{D}}{\sqrt{\nu}}}{i c_1\sqrt{D\nu}\,z_0 + \sqrt{\nu}\,(a_1 - i a_2\sqrt{D})},$$
$$(D)\quad \nu(a_1^2 + D a_2^2) + D b_1 c_1 = 1.$$
Sfera di riflessione:
$$\left(\xi - \frac{a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_1\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{D\nu c_1^2}.$$

Le riflessioni di quest' ultimo tipo esistono naturalmente soltanto quando ν è primo con D e ne è residuo quadratico.

3° *caso.* $D \equiv 3 \pmod 4$.

Posto $\omega = \frac{1 + i\sqrt{D}}{2}$, avremo in $\overline{G}_{(D,\nu)}$ le riflessioni seguenti:

Tipo I)
Sostituzione:
$$z' = \frac{(a_1 + a_2\omega)\,z_0 + b_1}{\nu c_1 z_0 - (a_1 + a_2\omega_0)},$$
$$(A)\quad (2a_1 + a_2)^2 + D a_2^2 + 4\nu b_1 c_1 = 4.$$
Sfera di riflessione:
$$\left(\xi - \frac{2a_1 + a_2}{2\nu c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{2\nu c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{\nu^2 c_1^2}.$$

Tipo II)
Sostituzione:
$$z' = \frac{(a_1 + a_2\omega)\,z_0 + i b_1\sqrt{D}}{i\nu c_1\sqrt{D}\,z_0 + (a_1 + a_2\omega_0)},$$
$$(B)\quad (2a_1 + a_2)^2 + D a_2^2 + 4D\nu b_1 c_1 = 4.$$
Sfera di riflessione:
$$\left(\xi - \frac{a_2}{2\nu c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{2a_1 + a_2}{2\nu c_1\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{D\nu^2 c_1^2}.$$

Tipo III)
Sostituzione:
$$z' = \frac{\sqrt{\nu}\,(a_1 + a_2\omega)\,z_0 + \frac{b_1}{\sqrt{\nu}}}{c_1\sqrt{\nu}\,z_0 - \sqrt{\nu}\,(a_1 + a_2\omega_0)},$$
$$(C)\quad \nu\{(2a_1 + a_2)^2 + D a_2^2\} + 4 b_1 c_1 = 4.$$
Sfera di riflessione:
$$\left(\xi - \frac{2a_1 + a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{\nu c_1^2}.$$

Tipo IV)

Sostituzione:

$$z' = \frac{\sqrt{\nu}(a_1 + a_2\omega)z_0 + \frac{ib_1\sqrt{D}}{\sqrt{\nu}}}{ic_1\sqrt{D\nu}\,z_0 + \sqrt{\nu}(a_1 + a_2\omega_0)},$$

(D) $\quad \nu\{(2a_1+a_2)^2 + Da_2^2\} + 4Db_1c_1 = 4.$

Sfera di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{2a_1+a_2}{2c_1\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{D\nu c_1^2}.$$

§ 3.

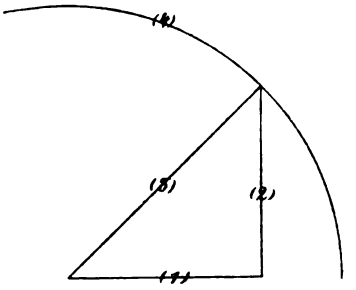
I poliedri fondamentali dei gruppi $G_{(1,2)}$, $\overline{G}_{(1,3)}$, $\overline{G}_{(1,5)}$.

1° Nel caso $D = 1$, $\nu = 2$, dal prisma triangolare racchiuso fra i tre piani di riflessione

$$(1)\ \ \eta = 0, \qquad (2)\ \ \xi = \frac{1}{2}, \qquad (3)\ \ \xi - \eta = 0$$

superiormente al piano $\zeta = 0$ togliamo la porzione interna alla sfera di riflessione

$$(4)\ \ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}. \quad \text{(Fig}^{a}\ 1^{a}\text{)}^{*})$$



Fig^{a} 1^{a}

Il poliedro P così definito coi quattro vertici

$$V_1 \equiv \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad V_2 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \quad V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$
$$V_\infty \equiv (0, 0, \infty),$$

dei quali due singolari V_3, V_∞, non è attraversato da alcuna sfera di riflessione, nè esiste in $\overline{G}_{(1,2)}$ alcuna sostituzione che lo trasformi in sè medesimo; esso è adunque il poliedro fondamentale del gruppo.

---

*) In questa come nelle figure seguenti si osservano le traccie sul piano $\xi\eta$ delle faccie del poliedro.

Fuori di $\overline{G}_{(1,2)}$ esiste un' unica sostituzione, che cangia P in sè stesso, e cioè la ellittica (a periodo 2)

$$s' = \frac{\alpha s + \frac{i-1}{2}\alpha}{\alpha(1-i)s - \alpha}, \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} e^{\frac{3\pi i}{8}},$$

con essa è pertanto permutabile il nostro gruppo.

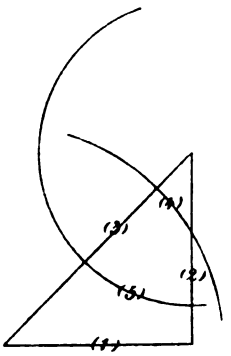
2° *Il gruppo* $\overline{G}_{(1,3)}$. Dal prisma triangolare racchiuso, come sopra dai piani

$$(1)\ \eta = 0, \quad (2)\ \xi = \tfrac{1}{2}, \quad (3)\ \xi - \eta = 0$$

togliamo le porzioni interne alle due sfere di riflessione

$$(4) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \tfrac{1}{3},$$

$$(5) \quad \left(\xi - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \tfrac{1}{6} \quad (\text{Fig}^{a}\ 2^{a}).$$



Fig^{a} 2^{a}

Definiamo così un poliedro P coi vertici

$V_1 \equiv \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ intersezione delle faccie (1) (3) (4),

$V_2 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ „ „ „ (1) (2) (4),

$V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$ „ „ „ (2) (4) (5),

$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ „ „ „ (2) (3) (5),

$V_5 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ „ „ „ (3) (4) (5),

$V_\infty \equiv (0, 0, \infty)$ „ „ „ (1) (2) (3);

esso non è attraversato da alcuna sfera di riflessione, nè esiste alcuna sostituzione nel gruppo o fuori del gruppo, che lo cangi in sè medesimo.

Questo è adunque il poliedro fondamentale di $\overline{G}_{(1,3)}$; un ampliamento del gruppo attuale è impossibile.

3° *Il gruppo* $\overline{G}_{(1,5)}$. Dal solito prisma racchiuso fra i piani

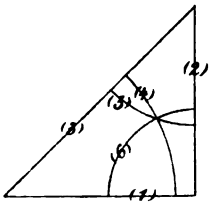
$$(1)\ \eta = 0, \qquad (2)\ \xi = \frac{1}{2}, \qquad (3)\ \xi - \eta = 0$$

togliamo le porzioni interne alle tre sfere

$$(4) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{5},$$

$$(5) \qquad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{10},$$

$$(6) \qquad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{20} \quad (\text{Fig}^{a}\ 3^{a}).$$



Fig^{a} 3°

Il poliedro P così definito coi vertici

$$V_1 \equiv \left(0,\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{intersezione delle faccie (1) (3) (5),}$$

$$V_2 \equiv \left(\frac{2}{5},\ 0,\ \frac{1}{5}\right) \quad \text{„ „ „ (1) (4) (6),}$$

$$V_3 \equiv \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) \quad \text{„ „ „ (1) (2) (6),}$$

$$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{10}\right) \quad \text{„ „ „ (2) (5) (6),}$$

$$V_5 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right) \quad \text{„ „ „ (2) (3) (5),}$$

$$V_6 \equiv \left(\frac{3}{10},\ \frac{3}{10},\ \frac{1}{5\sqrt{2}}\right) \quad \text{„ „ „ (3) (4) (5),}$$

$$V_7 \equiv \left(\frac{2}{5},\ \frac{1}{5},\ 0\right) \quad \text{„ „ „ (4) (5) (6),}$$

$$V_\infty \equiv (0,\ 0,\ \infty) \quad \text{„ „ „ (1) (2) (3)}$$

non è attraversato da alcuna sfera si riflessione. Osservando che vi sono i due vertici singolari V_7, V_∞ e fra gli angoli diedri quattro soltanto sono di 45°, cioè quelli agli spigoli

$$V_4 V_7,\ V_6 V_7,\ V_1 V_\infty,\ V_5 V_\infty,$$

mentre i rimanenti sono retti, troviamo facilmente che esiste una sola sostituzione riproduttrice di P e cioè la ellittica (periodo 2):

$$s' = \frac{\frac{2+i}{5}\gamma s - \frac{1+i}{5}\gamma}{\gamma s - \frac{2+i}{5}\gamma}, \qquad \gamma = \sqrt{5}\sqrt{2-i}.$$

Questa sostituzione è per altro fuori del gruppo $\overline{G}_{(1,5)}$, il cui poliedro fondamentale è adunque quello sopra definito.

§ 4.

I gruppi $\overline{G}_{(2,2)}$, $\overline{G}_{(2,3)}$.

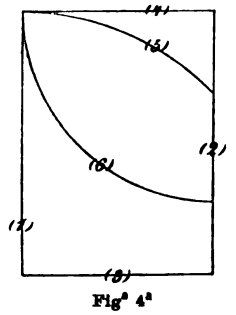
1° *Il gruppo* $\overline{G}_{(2,2)}$. — Dal prisma rettangolo compreso al di sopra del piano $\zeta = 0$ entro i quattro piani di riflessione

$$(1)\ \xi = 0, \quad (2)\ \xi = \frac{1}{2}, \quad (3)\ \eta = 0, \quad (4)\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

tolgansi le porzioni interne alle due sfere di riflessione

$$(5)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2},$$

$$(6)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}. \quad \text{(Fig}^{a}\ 4^{a}\text{)}.$$



Fig^{a} 4^{a}

Abbiamo così un poliedro P coi vertici

$V_1 \equiv \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ intersezione delle faccie (1) (3) (5),

$V_2 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ „ „ „ (2) (3) (5),

$V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ „ „ „ (2) (5) (6),

$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ „ „ „ (2) (4) (6),

$V_5 \equiv \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ „ „ „ (1) (4) (5) (6),

$V_\infty \equiv (0, 0, \infty)$ „ „ „ (1) (2) (3) (4),

che non è attraversato da alcuna sfera di riflessione ed è trasformato in sè stesso dalla sola sostituzione

$$z' = \frac{\frac{i}{\sqrt{2}}\gamma z + \frac{1-i\sqrt{2}}{2}\gamma}{\gamma z - \frac{i\gamma}{\sqrt{2}}}, \quad \gamma = \sqrt[4]{2}\, e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

Il gruppo $\overline{G}_{(2,3)}$ ammette dunque per poliedro fondamentale questo poliedro P ed è suscettibile di ampliamento.

2° *Il gruppo* $\overline{G}_{(2,3)}$. Dallo stesso prisma racchiuso fra i piani

$$(1)\ \xi = 0, \quad (2)\ \xi = \frac{1}{2}, \quad (3)\ \eta = 0, \quad (4)\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

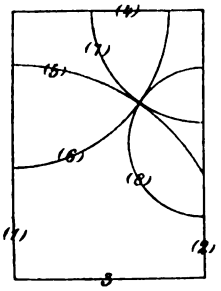
consideriamo la regione esterna alle quattro sfere di riflessione

$$(5) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3},$$

$$(6) \qquad \xi^2 + \left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{6},$$

$$(7) \qquad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{12},$$

$$(8) \qquad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{24}; \quad \text{(Fig}^{a}\ 5^{a}\text{)}$$



Fig^{a} 5^{a}

essa ci darà il poliedro fondamentale P di $\overline{G}_{(2,3)}$. E infatti P non è attraversato da alcuna sfera di riflessione ed è trasformato in sè medesimo dalla sola sostituzione

$$z' = \frac{\frac{1+i\sqrt{2}}{3}\gamma z - \frac{i\sqrt{2}}{3}\gamma}{\gamma z - \frac{1+i\sqrt{2}}{3}\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{3}\sqrt{1-i\sqrt{2}},$$

la quale è fuori del gruppo.

§ 5.

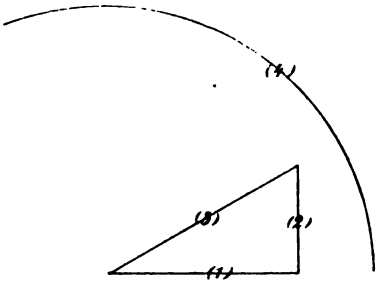
I gruppi $\overline{G}_{(3,2)}$, $\overline{G}_{(3,3)}$, $\overline{G}_{(3,5)}$.

Si consideri il prisma triangolare compreso al di sopra del piano $\zeta = 0$ dai tre piani di riflessione

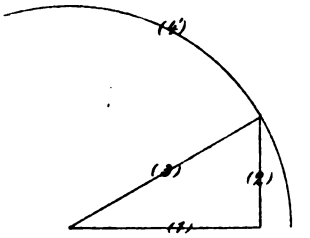
$$(1)\ \eta = 0, \quad (2)\ \xi = \frac{1}{2}, \quad (3)\ \xi = \eta\sqrt{3}$$

e se ne tolga *nel caso* $\nu = 2$ la porzione interna alla sfera di riflessione

$$(4)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2} \quad (\text{Fig}^a\ 6^a),$$



Fig^a 6^a



Fig^a 7^a

nel caso $\nu = 3$ quella interna alla sfera

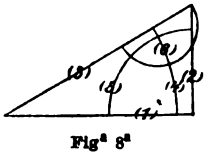
$$(4')\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3} \quad (\text{Fig}^a\ 7^a)$$

e in fine *nel caso* $\nu = 5$ le porzioni interne alle tre sfere

$$(4'')\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{5},$$

$$(5)\qquad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{20},$$

$$(6)\quad \left(\xi - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{5\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{75}. \quad (\text{Fig}^a\ 8^a).$$



Fig^a 8^a

I poliedri così definiti sono i rispettivi poliedri fondamentali di $\overline{G}_{(3,2)}$, $\overline{G}_{(3,3)}$, $\overline{G}_{(3,5)}$. E invero si verifica, calcolandone le coordinate dei vertici, che nessuna sfera di riflessione li attraversa e nessuna sostituzione del gruppo corrispondente li trasforma in sè medesimi.

§ 6.

I gruppi $\overline{G}_{(5,2)}$ $\overline{G}_{(7,2)}$.

1° *Il gruppo* $\overline{G}_{(5,2)}$. Dal prisma compreso fra i quattro piani di riflessione

$$(1)\ \xi = 0, \quad (2)\ \xi = \frac{1}{2}, \quad (3)\ \eta = 0, \quad (4)\ \eta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

si tolgano le regioni interne alle cinque sfere di riflessione

$$(5) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2},$$

$$(6) \qquad \xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{5}}{7}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4},$$

$$(7) \qquad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{16},$$

$$(8) \qquad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{20},$$

$$(9) \qquad \left(\xi - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\eta - \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{80}. \quad \text{(Figg. 9a).}$$

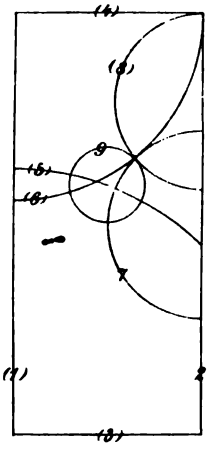


Fig. 9a

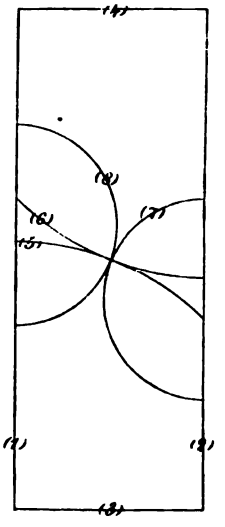


Fig. 10a

Il poliedro P così definito, coi tre vertici singolari

$$\frac{1+i\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1+i\sqrt{5}}{3}, \quad \infty,$$

è il poliedro fondamentale di $\overline{G}_{(5,2)}$.

2° *Il gruppo* $\overline{G}_{(7,2)}$. Del prisma contenuto fra i quattro piani di riflessione

$$(1)\ \xi = 0, \quad (2)\ \xi = \frac{1}{2}, \quad (3)\ \eta = 0, \quad (4)\ \eta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

consideriamo la regione esterna alle quattro sfere

$$(5) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2},$$

$$(6) \qquad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^3 + \left(\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2},$$

$$(7) \qquad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{3\sqrt{7}}{14}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{14},$$

$$(8) \qquad \xi^2 + \left(\eta - \frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{14} \quad (\text{Fig}^{\text{a}}\ 10^{\text{a}}).$$

Il poliedro P risultante non è attraversato da alcuna sfera di riflessione e fra le sostituzioni del gruppo vi ha soltanto la sostituzione

$$s' = -s + \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}$$

che lo cangi in sè stesso. Dividendo adunque P in due parti equivalenti col piano

$$\xi\sqrt{7} - \eta = 0;$$

una ad arbitrio di esse potrà assumersi a poliedro generatore di $\overline{G}_{(7,2)}$.

Come si vede, di tutti i gruppi fin qui considerati $\overline{G}_{(7,2)}$ è l'unico che non si generi con pure riflessioni.

§ 7.

Le forme di Dirichlet e di Hermite associate ai gruppi $\overline{G}_{(D,\nu)}$.

Consideriamo una forma quadratica (di Dirichlet) del tipo

$$F = \nu a x^2 + 2bxy + cy^2,$$

dove a, b, c sono interi qualunque del corpo Ω e sulle variabili x, y, corrispondentemente alle sostituzioni S, T del gruppo $G_{(D,\nu)}$ eseguiamo la sosituzione

$$s) \quad \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y', \\ y = \nu\gamma x' + \delta y' \end{cases}$$

o l'altra

$$t) \quad \begin{cases} x = \alpha\sqrt{\nu}\, x + \dfrac{\beta}{\sqrt{\nu}}\, y', \\ y = \gamma\sqrt{\nu}\, x' + \delta\sqrt{\nu}\, y'. \end{cases}$$

La F si trasformerà in una forma F'

$$F' = \nu a' x'^2 + 2b' x' y' + c' y'^2$$

della stessa natura nella quale sarà inoltre

$$b' \equiv b \quad \text{o} \quad b' \equiv -b \pmod{\nu}$$

secondo che la sostituzione eseguita appartiene al tipo *s*) o al tipo t).

Possiamo così stabilire il concetto di *equivalenza* di due tali forme f, f' rispetto al gruppo $G_{(D,\nu)}$ e colla determinazione del poliedro generatore del gruppo risolvere i problemi della teoria dell' equivalenza (cf. (B)).

Più importante è la considerazione delle forme di Hermite a indeterminate coniugate

$$F = \nu A x x_0 + B x y_0 + B_0 x_0 y + C y y_0,$$

dove A, C sono razionali interi e B un intero del corpo Ω. Per le sostituzioni *s*) o *t*), ove contemperaneamente sulle variabili coniugate si eseguisca la sostituzione coniugata, le forme F si cangiano in forme della medesima specie. Di queste forme F possiamo adunque costruire una teoria aritmetica dell' equivalenza, i cui problemi fondamentali si risolvono colla rappresentazione geometrica del gruppo $G_{(D,\nu)}$.

Parte seconda.

Gruppi poliedrici provenienti dalle forme reali quaternarie $\nu(x_1^2+x_2^2) + D x_3^2 - x_4^2$.

§ 8.

Definizione dei gruppi $K_{(D,\nu)}$

I gruppi di cui ci occuperemo in questa seconda parte possono definirsi aritmeticamente, e in modo diretto, come estensione al campo complesso dei gruppi studiati dal Sig^r^ Fricke nel Vol^e^ XXXVIII di questi Annali.

Essendo ν un numero fisso razionale, intero e positivo, consideriamo tutte le sostituzioni della forma

$$S) \quad z' = \frac{(a+b\sqrt{\nu})z + (c+d\sqrt{\nu})}{(-c+d\sqrt{\nu})z + (a-b\sqrt{\nu})},$$

dove a, b, c, d percorrono tutti i numeri interi del corpo quadratico $\Omega = (1, i\sqrt{D})$, che rendono

$$a^2 + c^2 - \nu(b^2+d^2) = \pm 1.$$

Le sostituzioni S formano, come subito si vede, un gruppo.

Alle S associamo poi le sostituzioni T della forma

$$T) \quad z' = \frac{(a+b\sqrt{\nu})z + (c+d\sqrt{\nu})}{(c-d\sqrt{\nu})z + (-a+b\sqrt{\nu})},$$

il cui determinante

$$-(a^2+c^2)+\nu(b^2+d^2)$$

è nuovamente l'unità positiva o negativa. Si verifica che il prodotto di una S per una T è una T mentre il prodotto di due T è una S. Per ciò le S, T formano complessivamente un gruppo, che indicheremo con $K_{(D,\nu)}$, nel quale il gruppo delle S è eccezionale d'indice 2.*)

Ai gruppi $K_{(D,\nu)}$ possiamo subito coordinare una classe di forme quadratiche di Hermite. E infatti essendo $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4$ quattro quantità reali, che dapprima supponiamo costanti, consideriamo le forme di Hermite a variabili x, y; x_0, y_0 coniugate:

$$F=(\varepsilon_4+\varepsilon_1\sqrt{\nu})xx_0+(\varepsilon_2\sqrt{\nu}+i\varepsilon_3\sqrt{D})\,xy_0+(\varepsilon_2\sqrt{\nu}-i\varepsilon_3\sqrt{D})\,x_0y$$
$$+(\varepsilon_4-\varepsilon_1\sqrt{\nu})yy_0$$

ed applichiamovi la sostituzione

$$\begin{cases} x=\alpha x'+\beta y', \\ y=\gamma x'+\delta y', \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0=\alpha_0 x_0'+\beta_0 y_0', \\ y_0=\gamma_0 x_0'+\delta_0 y_0', \end{cases}$$

essendo α, β, γ, δ i coefficienti di una sostituzione qualunque S o T del gruppo $K_{(D,\nu)}$. Otteniamo così una forma F' della stessa specie

$$F'=(\varepsilon_4'+\varepsilon_1'\sqrt{\nu})x'x_0'+(\varepsilon_2'\sqrt{\nu}+i\varepsilon_3'\sqrt{D})x'y_0'$$
$$+(\varepsilon_2'\sqrt{\nu}-i\varepsilon_3'\sqrt{D})\,x_0'y'+(\varepsilon_4'-\varepsilon_1'\sqrt{\nu})y'y_0',$$

e i nuovi valori delle ε' risultano legati agli antichi da una sostituzione lineare *a coefficienti razionali interi*. E invero se la sostituzione eseguita appartiene alle S troviamo:

$$S)\quad \begin{cases} \varepsilon_1' = & \{aa_0+\nu bb_0-cc_0-\nu dd_0\}\varepsilon_1 \\ + & \{\nu(bd_0+b_0d)-(ac_0+a_0c)\}\varepsilon_2 \\ + i\sqrt{D} & \{ad_0-a_0d+b_0c-bc_0\}\varepsilon_3 \\ + & \{ab_0+a_0b-cd_0-c_0d\}\varepsilon_4, \end{cases}$$

*) Una immediata generalizzazione di questi gruppi si ottiene considerando le sostituzioni della forma

$$S')\quad \varepsilon'=\frac{(a+b\sqrt{\nu})\varepsilon+(c+d\sqrt{\nu})}{\mu(-c+d\sqrt{\nu})\varepsilon+(a-b\sqrt{\nu})},$$

$$T')\quad \varepsilon'=\frac{(a+b\sqrt{\nu})\varepsilon+(c+d\sqrt{\nu})}{\mu(c-d\sqrt{\nu})\varepsilon+(-a+b\sqrt{\nu})},$$

dove μ è un intero fisso nel corpo quadratico Ω. In particolare se μ è reale le considerazioni, che seguono nel testo, relative al caso $\mu=1$, rimangono ancora applicabili.

$$s)\quad \begin{cases} z_2' = & \{ac_0 + a_0c + vbd_0 + vb_0d\}z_1 \\ & + \{aa_0 - vbb_0 - cc_0 + vdd_0\}z_2 \\ & + i\sqrt{D}\{a_0b - ab_0 + cd_0 - c_0d\}z_3 \\ & + \{ad_0 + a_0d + bc_0 + b_0c\}z_4, \\ z_3' = & \frac{v}{i\sqrt{D}}\{bc_0 - b_0c + ad_0 - a_0d\}z_1 \\ & + \frac{v}{i\sqrt{D}}\{a_0b - ab_0 + c_0d - cd_0\}z_2 \\ & + \{aa_0 - vbb_0 + cc_0 - vdd_0\}z_3 \\ & + \frac{1}{i\sqrt{D}}\{ac_0 - a_0c + vbd_0 - vb_0d\}z_4, \\ z_4' = & v\{ab_0 + a_0b + cd_0 + c_0d\}z_1 \\ & + v\{ad_0 + a_0d - bc_0 - b_0c\}z_2 \\ & + i\sqrt{D}\{a_0c - ac_0 + bd_0 - b_0d\}z_3 \\ & + \{aa_0 + vbb_0 + cc_0 + vdd_0\}z_4; \end{cases}$$

se appartiene in vece alle T si ottiene per la formola corrispondente:

$$t)\quad \begin{cases} z_1' = & \{aa_0 + vbb_0 - cc_0 - vdd_0\}z_1 \\ & + \{ac_0 + a_0c - vbd_0 - vb_0d\}z_2 \\ & + i\sqrt{D}\{bc_0 - b_0c + a_0d - ad_0\}z_3 \\ & + \{ab_0 + a_0b - cd_0 - c_0d\}z_4, \\ z_2' = & \{ac_0 + a_0c + vbd_0 + vb_0d\}z_1 \\ & + \{-aa_0 + vbb_0 + cc_0 - vdd_0\}z_2 \\ & + i\sqrt{D}\{ab_0 - a_0b + c_0d - cd_0\}z_3 \\ & + \{ad_0 + a_0d + bc_0 + b_0c\}z_4, \\ z_3' = & \frac{v}{i\sqrt{D}}\{ad_0 - a_0d + bc_0 - b_0c\}z_1 \\ & + \frac{v}{i\sqrt{D}}\{ab_0 - a_0b + cd_0 - c_0d\}z_2 \\ & + \{-aa_0 + vbb_0 - cc_0 + vdd_0\}z_3 \\ & + \frac{1}{i\sqrt{D}}\{ac_0 - a_0c + vbd_0 - vb_0d\}z_4, \\ z_4' = & v\{ab_0 + a_0b + cd_0 + c_0d\}z_1 \\ & + v\{bc_0 + b_0c - ad_0 - a_0d\}z_2 \\ & + i\sqrt{D}\{ac_0 - a_0c + vb_0d - vbd_0\}z_3 \\ & + \{aa_0 + vbb_0 + cc_0 + vdd_0\}z_4. \end{cases}$$

Facilmente si vede che tanto le sostituzioni quaternarie *s*) quanto le *t*) sono a determinante $+1$ e del resto le *t*) si ottengono semplicemente dalle *s*) cangiando i segni dei coefficienti di z_2, z_3. Inoltre in ambedue le specie di sostituzioni i coefficienti della diagonale principale sono dispari e gli altri tutti pari, ossia, per usare una nota locuzione, *le s*), *t*) *sono congrue coll' identità* (*mod.* 2).

I determinanti delle due forme F, F' sono eguali; si ha cioè:

$$v(z_1^2+z_2^2) + Dz_3^2 + z_4^2 = v(z_1'^2+z_2'^2) + Dz_3'^2 - z_4'^2.$$

Ora se riguardiamo z_1, z_2, z_3, z_4 non più come costanti ma come *variabili reali*, vediamo che le *s*) *t*) formano un gruppo di sostituzioni quaternarie a coefficienti razionali interi, isomorfo con $K_{(D,v)}$, che trasforma in sè medesima la forma reale quaternaria (Cf. (*C*) P° 2ª)

$$\Phi = v(z_1^2+z_2^2) + Dz_3^2 - z_4^2.$$

I gruppi $K_{(D,v)}$ differiscono in generale essenzialmente dai gruppi $\Gamma^{(\omega)}$ studiati nei precedenti lavori e dai loro sottogruppi. Per accertarsene basta considerare il caso in cui, D essendo primo con v, siano contemporaneamente -1 e D *non residui quadratici di* v. Allora la forma Φ non può rappresentare lo zero (non può annullarsi per valori razionali interi delle z) e, come facilmente si vede: *il gruppo corrispondente* $K_{(D,v)}$ *non contiene sostituzioni paraboliche.* I gruppi che si ottengono trasformando $K_{(D,v)}$ con sostituzioni arbitrarie sono quindi sempre *incommensurabili* coi gruppi $\Gamma^{(\omega)}$ e coi loro sottogruppi.

§ 9.

I gruppi $\overline{H}_{(D,v)}$.

Le sostituzioni *s*), *t*) corrispondenti alle S, T non esauriscono il gruppo aritmetico riproduttivo della forma quaternaria Φ. Riserbando per un altro lavoro l'esame della questione come dal sottogruppo delle *s*), *t*) si possa risalire al gruppo totale ora citato, ci limiteremo qui alla osservazione seguente, molto importante per il seguito. Fra le sostituzioni che riproducono la forma Φ vi è evidentemente la seguente

$$z_1' = -z_2, \quad z_2' = z_1, \quad z_3' = z_3, \quad z_4' = z_4,$$

che si otterrebbe dalla *s*) facendovi

$$a = c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = d = 0.$$

La corrispondente sostituzione

$$\tau) \quad z' = \frac{\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

non appartiene al gruppo $K_{(D,\nu)}$, ma il risultato precedente conduce naturalmente ad ampliare quest' ultimo gruppo coll' aggiunta della sostituzione τ. E invero si constata subito che la τ è permutabile col gruppo $K_{(D,\nu)}$ e precisamente trasforma una S in un' altra S, una T di nuovo in una T.

Nel gruppo così ampliato, che si indicherà con $H_{(D,\nu)}$, il sottogruppo $K_{(D,\nu)}$ è eccezionale d'indice 2. Le *nuove* sostituzioni di $H_{(D,\nu)}$ sono delle due forme seguenti

$$U) \quad s' = \frac{\frac{a+b\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}\, s + \frac{c+d\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}}{\frac{-c+d\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}\, s + \frac{a-b\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}},$$

$$V) \quad s' = \frac{\frac{a+b\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}\, s + \frac{c+d\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}}{\frac{c-d\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}\, s + \frac{-a+b\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}},$$

i numeri a, b, c, d del corpo quadratico Ω soddisfacendo alla equazione

$$a^2 + c^2 - \nu(b^2+d^2) = \pm 2$$

e inoltre alle congruenze

$$a \equiv c, \quad b \equiv d \pmod 2.$$

Viceversa ogni sostituzione U), V) in cui le condizioni precedenti siano soddisfatte appartiene al gruppo ampliato $H_{(D,\nu)}$.

Osserviamo ora che tanto il gruppo $K_{(D,\nu)}$ come il gruppo più ampio $H_{(D,\nu)}$ sono permutabili colla riflessione $s' = s_0$ poichè, insieme ad ogni loro sostituzione, contengono anche quella che si ottiene cangiandone i coefficienti nei coniugati. Ampliando $K_{(D,\nu)}$, $H_{(D,\nu)}$ colla riflessione $s' = s_0$, avremo due nuovi gruppi, che si indicheranno rispettivamente con $\overline{K}_{(D,\nu)}$, $\overline{H}_{(D,\nu)}$, nei quali i primitivi sono rispettivamente contenuti come sottogruppi eccezionali d'indice 2.

La nuove sostituzioni di $\overline{K}_{(D,\nu)}$, $\overline{H}_{(D,\nu)}$ si ottengono da quelle di $K_{(D,\nu)}$, $H_{(D,\nu)}$ mutandovi la variabile s nella coniugata s_0. Facilmente si vedrebbe poi che a queste sostituzioni (di 2ª specie) corrispondono ancora, per la forma quaternaria $\Phi = \nu(s_1^2+s_2^2) + Ds_3^2 - s_4^2$, delle sostituzioni del suo gruppo aritmetico riproduttivo; soltanto il determinante della sostituzione quaternaria è in questo caso eguale all' unità negativa.

È importante osservare i periodi che presentano le sostituzioni ellittiche dei nostri gruppi. Qui supporremo senz' altro $D > 1$, perchè nel caso $D = 1$ i gruppi $K_{(1,\nu)}$, $H_{(1,\nu)}$ risultano *commensurabili* con sottogruppi del gruppo $\Gamma^{(0)}$ e il loro studio offre un interesse minore.

Fra le S sono ellittiche quelle a determinante $+1$ con $a = 0$ e quelle a determinante -1 con $b = 0$; fra le T quelle a determinante $+1$ con $b = 0$ e quelle a determinante -1 con $a = 0$, onde risulta: *Nel gruppo $\overline{K}_{(D,\nu)}$ figurano soltanto sostituzioni ellittiche a periodo 2.*

Pel gruppo $\overline{H}_{(D,\nu)}$ si presentano sostituzioni ellittiche di periodo diverso da 2 solo fra le U a determinante $+1$ con $a = \pm 1$; il loro periodo è eguale a 4.

§ 10.

Le riflessioni dei gruppi $\overline{K}_{(D,\nu)}$, $\overline{H}_{(D,\nu)}$.

Per la ricerca dei poliedri fondamentali dei nostri gruppi è utile innanzi tutto conoscere le *riflessioni* in essi contenute. Con metodi ben noti $\big((B)\ \S\ 6\big)$ troviamo che le riflessioni di $\overline{K}_{(D,\nu)}$ si ripartiscono nei quattro tipi del quadro seguente:

Tipo I)

Sostituzione:

$$z' = \frac{(ia_2\sqrt{D} + b_1\sqrt{\nu})z_0 + (c_1 + d_1\sqrt{\nu})}{(-c_1 + d_1\sqrt{\nu})z_0 + (ia_2\sqrt{D} - b_1\sqrt{\nu})},$$

(A) $\quad Da_2^2 + \nu(b_1^2 + d_1^2) - c_1^2 = 1.$

Sfera di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{b_1\sqrt{\nu}}{d_1\sqrt{\nu} - c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{d_1\sqrt{\nu} - c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{(d_1\sqrt{\nu} - c_1)^2}.$$

Tipo II)

Sostituzione:

$$z' = \frac{(a_1 + ib_2\sqrt{D\nu})z_0 + i\sqrt{D}(c_2 + d_2\sqrt{\nu})}{i\sqrt{D}(-c_2 + d_2\sqrt{\nu})z_0 + (a_1 - ib_2\sqrt{D\nu})},$$

(B) $\quad a_1^2 + D\nu b_2^2 - Dc_2^2 + D\nu d_2^2 = 1.$

Sfera di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{b_2\sqrt{\nu}}{d_2\sqrt{\nu} - c_2}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{\sqrt{D}(d_2\sqrt{\nu} - c_2)}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{D(d_2\sqrt{\nu} - c_1)^2}.$$

Tipo III)

Sostituzione:

$$z' = \frac{(a_1 + ib_2\sqrt{D\nu})z_0 + (c_1 + d_1\sqrt{\nu})}{(c_1 - d_1\sqrt{\nu})z_0 + (-a_1 + ib_2\sqrt{D\nu})},$$

(C) $\quad a_1^2 + D\nu b_2^2 + c_1^2 - \nu d_1^2 = 1.$

Sfera di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1 - d_1\sqrt{\nu}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{b_2\sqrt{D\nu}}{c_1 - d_1\sqrt{\nu}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{(c_1 - d_1\sqrt{\nu})^2}.$$

Tipo VI)
Sostituzione:
$$s' = \frac{(ia_2\sqrt{D} + b_1\sqrt{\nu})\, s_0 + i\sqrt{D}\,(c_2 + d_2\sqrt{\nu})}{i\sqrt{D}\,(c_2 - d_2\sqrt{\nu})\, s_0 + (b_1\sqrt{\nu} - ia_2\sqrt{D})},$$
(D) $Da_2^2 + \nu b_1^2 + Dc_2^2 - D\nu d_2^2 = 1.$
Sfera di riflessione:
$$\left(\xi - \frac{a_2}{c_2 - d_2\sqrt{\nu}}\right)^2 + \left(\eta + \frac{b_1\sqrt{\nu}}{\sqrt{D}(c_2 - d_2\sqrt{\nu})}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{D(c_2 - d_2\sqrt{\nu})^2}.$$

In queste formole a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2 indicano numeri razionali interi che soddisfano alle rispettive equazione (A), (B), (C), (D). Si osserverà che le riflessioni del tipo IV esistono soltanto quando ν sia primo con D e ne sia residuo quadratico.

Quanto al gruppo più ampio $\overline{H}_{(D,\nu)}$, oltre alle riflessioni sopra indicate già contenute nel sottogruppo $\overline{K}_{(D,\nu)}$, esso conterra le nuove riflessioni dei quattro tipi seguenti:

Tipo V)
Sostituzione:
$$s' = \frac{\frac{2ia_2\sqrt{D} + b_1\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}\, s_0 + \frac{2c_1 + d_1\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}}{\frac{-2c_1 + d_1\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}\, s_0 + \frac{2ia_2\sqrt{D} - \beta_1\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}},$$
(E) $4Da_2^2 + \nu b_1^2 - 4c_1^2 + \nu d_1^2 = 2$, (e) $b_1 \equiv d_1 \pmod 2$.
Sfera di riflessione:
$$\left(\xi - \frac{b_1\sqrt{\nu}}{d_1\sqrt{\nu} - 2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2a_2\sqrt{D}}{d_1\sqrt{\nu} - 2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{(d_1\sqrt{\nu} - 2c_1)^2}.$$

Tipo VI)
Sostituzione:
$$s' = \frac{\frac{2a_2 + ib_2\sqrt{D}}{\sqrt{2}}\, s_0 + i\,\frac{2c_2\sqrt{D} + d_2\sqrt{D\nu}}{\sqrt{2}}}{i\,\frac{-2c_2\sqrt{D} + d_2\sqrt{D\nu}}{\sqrt{2}}\, s_0 + \frac{2a_2 - ib_2\sqrt{D}}{\sqrt{2}}},$$
(F) $4a_2^2 + D\nu b_2^2 - 4Dc_2^2 + D\nu d_2^2 = 2$, (f) $b_2 \equiv d_2 \pmod 2$.
Sfera di riflessione:
$$\left(\xi + \frac{b_2\sqrt{\nu}}{2c_2 - d_2\sqrt{\nu}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2a_2}{\sqrt{D}(2c_2 - d_2\sqrt{\nu})}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{D(2c_2 - d_2\sqrt{\nu})^2}.$$

Tipo VII)

Sostituzione:

$$s' = \frac{\frac{a_1 + 2ib_2\sqrt{D}}{\sqrt{2}}\, s_0 + \frac{c_1 + 2d_1\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}}{\frac{c_1 - 2d_1\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}\, s_0 + \frac{-a_1 + 2ib_2\sqrt{D}}{\sqrt{2}}},$$

(G) $a_1^2 + 4Db_2^2 + c_1^2 - 4\nu d_1^2 = 2.$

Sfera di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1 - 2d_1\sqrt{\nu}}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2b_2\sqrt{D}}{c_1 - 2d_1\sqrt{\nu}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{(c_1 - 2d_1\sqrt{\nu})^2}.$$

Tipo VIII)

Sostituzione:

$$s' = \frac{\frac{ia_2\sqrt{D} + 2b_1\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}\, s_0 + i\sqrt{D}\,\frac{c_2 + 2d_2\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}}{i\sqrt{D}\,\frac{-c_2 + 2d_2\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}\, s_0 + \frac{-ia_2\sqrt{D} + 2b_1\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}},$$

(H) $Da_2^2 + 4\nu b_1^2 + Dc_2^2 - 4D\nu d_2^2 = 2$, (h) $a_2 \equiv c_2 \pmod 2$.

Sfera di riflessione:

$$\left(\xi + \frac{a_2}{2d_2\sqrt{2} - c_2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2b_1\sqrt{\nu}}{\sqrt{D}\,(2d_2\sqrt{\nu} - c_2)}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{D(2d_2\sqrt{\nu} - c_2)^2}.$$

I numeri razionali interi a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2 debbono qui soddisfare le equazioni rispettive (E), (F), (G), (H) e insieme le corrispondenti congruenze (e), (f), (h)*).

È importante osservare che: *due sfere di riflessione del gruppo* $\overline{K}_{(D,\nu)}$, *ove abbiano qualche punto comune, saranno ortogonali fra loro, ovvero si toccheranno in un punto.* Ciò dipende dalla circostanza osservata che tutte le sostituzioni ellittiche di $\overline{K}_{(D,\nu)}$ sono a periodo 2. Il caso del contatto fra due sfere di riflessione resta per altro escluso per quei gruppi $\overline{K}_{(D,\nu)}$ che sono privi di sostituzioni paraboliche (§ 8).

Osserviamo inoltre che nei gruppi $\overline{K}_{(D,\nu)}$, come nei più ampii $\overline{H}_{(D,\nu)}$ si presentano due soli *piani* di riflessione e cioè i piani:

1) $\eta = 0$, Tipo II) $a_1 = 1$, $b_2 = c_2 = d_2 = 0$,

2) $\xi = 0$, Tipo III) $a_1 = 1$, $b_2 = c_1 = d_1 = 0$.

*) La congruenza (g) $a_1 \equiv c_1 \pmod 2$ viene omessa perchè discende dall' equazione stessa (G).

Esiste poi in ogni caso una serie di sfere di riflessione col centro nell' origine; esse hanno per equazione

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (c_1 + d_1\sqrt{\nu})^2$$

ed appartengono al tipo III) o al tipo I) secondo che i numeri c_1, d_1 soddisfano l'equazione di Pell $c_1^2 - \nu d_1^2 = +1$ o l'altra $c_1^2 - \nu d_1^2 = -1$. Fra queste quelle del tipo I) mancano naturalmente se l'equazione $c_1^2 - \nu d_1^2 = -1$ è insolubile in numeri interi. In ogni caso i raggi delle sfere della serie formano una progressione geometrica.

§ 11.

Definizione del poliedro P pel gruppo $\overline{K}_{(\lambda,2)}$.

Considerando il caso $D = 2$, $\nu = 2$, osserviamo che l'equazione $c_1^2 - 2d_1^2 = -1$ ammette la soluzione intera $c_1 = 1$, $d_1 = 1$ e però i raggi delle sfere di riflessione col centro nell' origine formano una progressione geometrica colla ragione $q = \sqrt{2} - 1$. Ciò posto consideriamo lo spazio compreso al di sopra del piano $\zeta = 0$ fra i due piani di riflessione

$$(1)\quad \eta = 0, \qquad (2)\quad \xi = 0$$

e le due sfere *consecutive* di riflessione

(3) $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, Tipo III) $a_1 = b_2 = d_2 = 0$, $c_1 = 1$

(4) $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\sqrt{2}-1)^2$, Tipo I) $a_2 = d_1 = 0$, $c_1 = -1$, $d_1 = 1$.

Da questo spazio togliamo le porzioni interne alle cinque ulteriori sfere di riflessione:

(5) $$\xi^2 + (\eta - \sqrt{2})^2 + \zeta^2 = 1,$$
Tipo I) $a_2 = 1$, $b_1 = 0$, $c_1 = -1$, $d_1 = 0$.

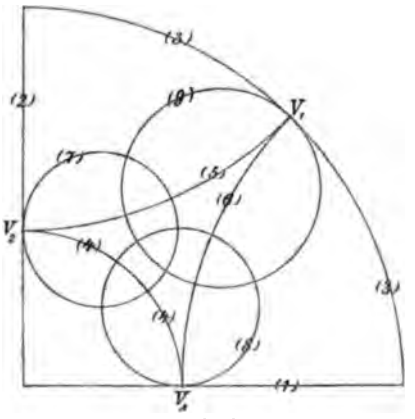
(6) $$(\xi - \sqrt{2})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$
Tipo I) $a_2 = 0$, $b_1 = 1$, $d_1 = 0$, $c_1 = -1$.

(7) $$\left(\xi - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 + \left(\eta - (\sqrt{2}-1)\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2,$$
Tipo III) $a_1 = 1$, $b_2 = 1$, $c_1 = 2$, $d_1 = -2$.

(8) $$\left\{\xi - (\sqrt{2}-1)\right\}^2 + \left\{\eta - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right\}^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2,$$
Tipo II) $a_1 = 1$, $b_2 = -1$, $c_2 = 2$, $d_2 = -1$.

(9) $$\left(\xi - \frac{2}{2\sqrt{2}+1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{2\sqrt{2}+1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{(2\sqrt{2}+1)^2},$$
Tipo III) $a_1 = -2$, $b_1 = 1$, $c_1 = -1$, $d_1 = 2$. (Fig^a 11^a)

Così abbiamo definito un poliedro, che indicheremo con P*), tutto racchiuso da sfere (e piani) di riflessione del gruppo $\overline{K}_{(2,2)}$ con 9 faccie e 11 vertici, cioè:



Fig^a 11^a

$\equiv (0, 0, 1)$. intersezione delle faccie (1) (2) (3),

$\equiv (0, 0, \sqrt{2}-1)$ „ „ „ (1) (2) (4),

$\equiv (\sqrt{2}-1, 0, 0)$ „ „ „ (1) (4) (6) (8),

$\equiv (0, \sqrt{2}-1, 0)$ „ „ „ (2) (4) (5) (7),

$\equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ „ „ „ (1) (3) (6),

$\equiv \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ „ „ „ (2) (3) (5),

$\equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ „ „ „ (3) (5) (6) (9),

$\equiv \left(\frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}, \frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}, \frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)$ „ „ „ (4) (7) (8),

$\equiv \left(\frac{3(3\sqrt{2}-2)}{14}, \frac{3\sqrt{2}-2}{7}, \frac{3\sqrt{2}-2}{14}\right)$ „ „ „ (6) (8) (9),

$\equiv \left(\frac{3\sqrt{2}-2}{7}, \frac{3(3\sqrt{2}-2)}{14}, \frac{3\sqrt{2}-2}{14}\right)$ „ „ „ (5) (7) (9),

$\equiv \left(\frac{10\sqrt{2}-8}{17}, \frac{10\sqrt{2}-8}{17}, \frac{5-2\sqrt{2}}{17}\right)$ „ „ „ (7) (8) (9).

*) Fig^a 11^a

Questo poliedro P è tutto al di sopra del piano $\zeta = 0$ salvo ai tre vertici singolari V_3, V_4, V_7, ove scende fino a questo piano*). Si osserverà inoltre che gli angoli diedri di P sono tutti retti, ciò che risulta anche a priori dalle considerazioni alla fine del § prec^to.

Dimostreremo nei prossimi §§ che P è appunto il poliedro fondamentale di $\overline{K}_{(2,2)}$ per il che occorre provare: 1° che P non è attraversato da alcuna sfera di riflessione del gruppo, 2°: che nessuna sostituzione di $\overline{K}_{(2,2)}$ trasforma P in sè medesimo (Cf. (B) § 10).

§ 12.

P non è attraversato da alcuna sfera di riflessione di $\overline{K}_{(2,2)}$.

Per provare l'asserzione superiore cominciamo dal dimostrare che se una sfera di riflessione di $\overline{K}_{(2,2)}$ attraversasse P, essa lascierebbe *all' esterno* ambedue i vertici V_1, V_2 sull' asse ξ. E infatti se una sfera del tipo I) contenesse nell' interno o alla superficie il vertice $V_1 \equiv (0, 0, 1)$, dovremmo avere

$$2b_1^2 + 2a_2^2 + (d_1\sqrt{2} - c_1)^2 \leq 1$$

onde $a_2 = b_1 = 0$ e la sfera, avendo il centro nell' origine, conterrebbe totalmente nel suo interno il poliedro P. Similmente pel vertice $V_2 \equiv (0, 0, \sqrt{2} - 1)$ risulterebbe

$$2b_1^2 + 2a_2^2 + (\sqrt{2}-1)^2 (d_1\sqrt{2} - c_1)^2 \leq 1,$$

onde nuovamente $a_2 = b_1 = 0$. Per una sfera del tipo II) avremmo

$$4b_2^2 + a_1^2 + 2(d_2\sqrt{2} - c_2)^2 \leq 1 \quad \text{per } V_1,$$

$$4b_2^2 + a_1^2 + 2(\sqrt{2}-1)^2 (d_2\sqrt{2} - c_2)^2 \leq 1 \quad \text{per } V_2,$$

onde $b_2 = 0$ e poichè inoltre deve sussistere la (B) § 10 cioè

$$a_1^2 - 2c_2^2 + 4d_2^2 = 1,$$

ne seguirebbe

$$a_1 = \pm 1, \quad c_2 = d_2 = 0$$

e la sfera supposta si ridurrebbe alla faccia piana $\eta = 0$ di P. In fine per una sfera del tipo III) avremmo le rispettive diseguaglianze

$$a_1^2 + 4b_2^2 + (c_1 - d_1\sqrt{2})^2 \leq 1 \quad \text{per } V_1,$$

$$a_1^2 + 4b_2^2 + (\sqrt{2}-1)^2 (c_1 - d_1\sqrt{2})^2 \leq 1 \quad \text{per } V_2,$$

*) Basta già questa circostanza per dimostrare che nell' intorno di ogni punto del piano complesso il nostro gruppo è impropriamente discontinuo (Poincarè, Acta Math. Bd. 3).

insieme alla (C) § 10

$$a_1^2 + 4b_2^2 + c_1^2 - 2d_1^2 = 1,$$

il che dà la sfera (3) o il piano (2). *)

Dimostriamo ora che la sfera di riflessione supposta, attraversando P, dovrebbe necessariamente lasciare all' esterno i vertici singolari V_3, V_4. Se consideriamo per esempio il vertice V_3, vediamo in primo luogo che esso non può giacere su questa sfera, poichè le sfere di riflessione per V_3 formano due serie rispettivamente tangenti fra loro ed ortogonali a quelle dell' altra serie e fra di esse abbiamo già scelto, a limitare P, quelle dei massimi raggi. Se V_3 fosse interno alla detta sfera, questa dovrebbe tagliare ortogonalmente il piano (1) e inoltre, lo spigolo $V_3 V_2$ passando dall' interno all' esterno, intersecherebbe anche la sfera (4) ortogonalmente. Per una sfera del tipo I) avremmo dunque

$$a_2 = 0, \quad \frac{2b_1^2}{(d_1\sqrt{2} - c_1)^2} = (\sqrt{2}-1)^2 + \frac{1}{(d_1\sqrt{2} - c_1)^2},$$

cioè

$$2b_1^2 = 1 + \{(2d_1 + c_1) - (c_1 + d_1)\sqrt{2}\}^2$$

e, non potendo essere $c_1 = -2d_1$, perchè ne seguirebbe l'equazione assurda $2b_1^2 = 2d_1^2 + 1$, sarà $d_1 = -c_1$ e però $2b_1^2 = c_1^2 + 1$ che è in contraddizione coll' equazione (A) § 10

$$2b_1^2 + c_1^2 = 1.$$

Nel tipo II) non esistono d'altronde sfere normali al piano (1) perchè l'équazione (B) § 10 è incompatibile colla condizione $a_1 = 0$.

In fine per una sfera del tipo III) avremmo $b_2 = 0$; la (C) § 10 diventa:

$$a_1^2 + c_1^2 - 2d_1^2 = 1,$$

mentre la condizione d'ortogonalità colla sfera (4) dà:

$$a_1^2 = 1 + \{(c_1 + d_1)\sqrt{2} - (c_1 + 2d_1)\}^2.$$

Sarebbe quindi necessariamente $c_1 = d_1 = 0$, $a_1 = \pm 1$ e la sfera si ridurrebbe al piano (2).

Una dimostrazione del tutto simile vale pel vertice V_4.

Da quanto superiormente si è detto, risulta che una sfera di riflessione di $\overline{K}_{(2,2)}$, che attraversi P, deve lasciare all' esterno i vertici V_1, V_2, V_3, V_4 e contenere nel suo *interno* almeno uno dei rimanenti. La semplice ispezione della figura dimostrerà che ciò è impossibile. **)

---

*) Nel caso attuale non esistono evidentemente sfere di riflessione del tipo IV).

**) Le considerazioni geometriche del testo sono tutte fondate sulla proprietà dimostrata al § 10 che l'incontro fra due sfere di riflessione di $\overline{K}_{(2,2)}$ deve aver luogo ortogonalmente. Volendo ricercare direttamente il poliedro del gruppo più ampio $\overline{H}_{(2,2)}$ la proprietà qui utilizzata andrebbe perduta.

E infatti se V_5 fosse interno alla sfera supposta, gli spigoli V_5V_3, V_5V_1 traverserebbero questa sfera, la quale dovrebbe dunque tagliare ad angolo retto le faccie (1) (3) (6). Il circolo massimo traccia della sfera sul piano $\xi\eta$ avrebbe dunque il centro sull'asse ξ e taglierebbe ortogonalmente i circoli (3) (6); ma un tale circolo, come la figura dimostra, è immaginario. Ripetendo successivamente la supposizione per gli altri vertici, si avrebbe per V_6 un circolo ortogonale ai circoli 3) 5) e alla retta 2); per V_7 un circolo ortogonale a (3) (5) (6); per V_8 un circolo ortogonale a (4) (7) (8); per V_9 un circolo ortogonale a (6) (8) (9); per V_{10} un circolo ortogonale a (5) (7) (9); in fine per V_{11} un circolo ortogonale a (7) (8) (9). Tutti questi circoli sono visibilmente immaginarii. Concludiamo adunque: *Il poliedro P non è attraversato da alcuna sfera di riflessione.*

§ 13.

Trasformazioni di P in sè medesimo.

Ricerchiamo ora tutte le sostituzioni di 1ª e di 2ª specie, appartenenti o no al gruppo $\overline{K}_{(2,3)}$, che trasformano P in sè medesimo. Per tal modo risolveremo anche la questione di risalire al gruppo più ampio in cui $\overline{K}_{(2,3)}$ è contenuto eccezionalmente. In questa ricerca si tenga presente che per ciascuna delle cercate sostituzioni i tre vertici singolari V_3, V_4, V_7 debbono permutarsi fra loro. Ora cerchiamo in primo luogo se esiste una sostituzione che lasci fermi tutti tre i vertici singolari. Essa è necessariamente una riflessione sulla sfera la cui traccia sul piano $\xi\eta$ (circolo massimo) è circoscritta al triangolo $V_3V_4V_7$ dei vertici singolari. Effettivamente la riflessione su questa sfera

$$\{\xi-(\sqrt{2}-1)\}^2+\{\eta-(\sqrt{2}-1)\}^2+\zeta^2=(\sqrt{2}-1)^2$$

cangia P in sè stesso, permutando (3) con (9), (1) con (8), (2) con (7) e lasciando ferme le faccie (4) (5) (6). L'espressione analitica della trasformazione è la seguente

$$\text{(a)}\quad z'=\frac{(1+i)z_0-(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)z_0-(1-i)}.$$

Un' altra trasformazione di P in se stesso si osserva subito nella riflessione sul piano $\xi-\eta=0$, giacchè P è simmetrico rispetto a questo piano; essa scambia V_3 con V_4 e lascia fermo V_7. Questa seconda trasformazione si traduce nella sostituzione

$$\text{(b)}\quad z'=\frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}}z_0}{\frac{1-i}{\sqrt{2}}}.$$

La (a) e la (b) sono fuori del gruppo $\overline{K}_{(2,2)}$ ed anche fuori del gruppo più ampio $\overline{H}_{(2,2)}$. Consideriamo ora la riflessione *di* $\overline{H}_{(2,2)}$

(c) $s' = \dfrac{\dfrac{-s_0}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{s_0}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ Tipo VII) $a_2 = 0,\ b_1 = -1,\ c_1 = 0,\ d_1 = 1$

sulla sfera

$$(\xi + 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2.$$

Essa cangia P in sè medesimo scambiando (2) con (3), (4) con (6), (7) con (9) e lasciando ferme le faccie (1) (5) (8); in questa trasformazione V_3 resta fisso e V_4 si scambio con V_7.

Combinando fra loro le sostituzioni trovate (a) (b) (c) ne risultano, come si vede da considerazioni elementari, **12** sostituzioni distinte che cangiano P in sè medesimo, nè possono esisterne di diverse da queste. Scrivendone le espressioni effettive, vediamo che nessuna di esse appartiene a $\overline{K}_{(2,2)}$ e però: *Il poliedro P definito al* § 11 *è il poliedro fondamentale di* $\overline{K}_{(2,2)}$. Inoltre risulta dalla discussione fatta che, ampliando $\overline{K}_{(2,2)}$ colle sostituzioni (a) (b) (c), otteniamo il gruppo L più ampio possibile nel quale $\overline{K}_{(2,2)}$ è contenuto eccezionalmente; l'indice di $\overline{K}_{(2,2)}$ in L è eguale a **12**. Se poi colle formole del § 8 calcoliamo le sostituzioni quaternarie corrispondenti alle nuove sostituzioni di L, troviamo che esse sono ancora a coefficienti razionali interi ed appartengono al gruppo aritmetico riproduttivo della forma quaternaria

$$2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_4^2.$$

Per accertarsene basta calcolare le sostituzioni quaternarie corrispondenti ad (a) (b); troviamo per queste rispettivamente lo schema

$$\text{(a)} \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ -4 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Volendo ora il poliedro fondamentale di $\overline{H}_{(2,2)}$, si osservi che la sfera di riflessione

$$(\xi + 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2$$

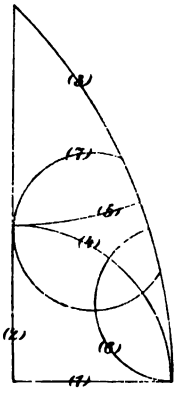
appartenente a $\overline{H}_{(2,2)}$ divide il poliedro fondamentale P di $\overline{K}_{(2,2)}$ in due parti equivalenti e poichè l'indice di $\overline{K}_{(2,2)}$ entro $\overline{H}_{(2,2)}$ è appunto eguale a **2**, ne risulta subito che una qualunque di queste due parti può assumersi a poliedro fondamentale Π di $\overline{H}_{(2,2)}$. Così: Il poliedro fondamentale Π di $\overline{H}_{(2,2)}$ può definirsi come quello racchiuso al di sopra del piano $\zeta = 0$ dalle 7 faccie

(1) $\eta = 0$, (2) $\xi = 0$, (3) $(\xi + 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2$,

(4) $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\sqrt{2}-1)^2$, (5) $\xi^2 + (\eta - \sqrt{2})^2 + \zeta^2 = 1$,

(6) $\{\xi - (\sqrt{2}-1)\}^2 + \left\{\eta - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right\}^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$,

(7) $\left\{\xi - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right\}^2 + \{\eta - (\sqrt{2}-1)\}^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2$. (Fig^a 12^a).



Fig^a 12^a

In fine per conoscere le trasformazioni di Π in sè stesso, basta osservare che la faccia (3) è l'unica pentagona e in conseguenza nella trasformazione supposta deve cangiarsi in sè stessa e però anche l'intero poliedro P si cangierà in sè stesso. Ma fra le **12** sostituzioni sopra trovate, che riproducono P, l'unica che lasci fissa la sfera (3) è la sostituzione (a); il gruppo più ampio in cui $\overline{H}_{(2,2)}$ è eccezionale lo contiene adunque come sottogruppo d'indice 2.

§ 14.

Le riflessioni di $K_{(2,3)}$ e il poliedro P'.

Nel caso che ora consideriamo $D = 2$, $\nu = 3$ le sfere di riflessione col centro nell' origine appartengono tutte al tipo III, l'equazione $c_1^2 - 3d_1^2 = -1$ essendo *insolubile* in numeri interi; i loro raggi formano una progressione geometrica di ragione $q = 2 - \sqrt{3}$. Ciò posto consideriamo la regione di spazio, al di sopra del piano $\zeta = 0$, compresa fra i due piani di riflessione

(1) $\eta = 0$, (2) $\xi = 0$

e le due sfere consecutive di riflessione col centro nell' origine

$$(3)\quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1,$$

$$(4)\quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=(2-\sqrt{3})^2,$$

Tipo III) $c_1=2,\quad d_1=-1,\quad a_1=b_2=0$

e togliamone le porzioni interne alle *dieci* sfere di riflessione seguenti:

$$(5)\quad \xi^2+(\eta-\sqrt{2})^2+\zeta^2=1,$$

Tipo I) $a_2=1,\quad b_1=0,\quad c_1=-1,\quad d_1=0,$

$$(6)\quad \left(\xi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{4},$$

Tipo I) $a_2=-1,\quad b_1=-1,\quad c_1=2,\quad d_1=0,$

$$(7)\quad \xi^2+\{\eta-\sqrt{2}(2-\sqrt{3})\}^2+\zeta^2=(2-\sqrt{3})^2,$$

Tipo I) $a_2=1,\quad b_1=0,\quad c_1=-2,\quad d_1=1,$

$$(8)\quad \left(\xi-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2+\zeta^2=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2,$$

Tipo IV) $a_2=1,\quad b_1=-1,\quad c_2=1,\quad d_2=-1,$

$$(9)\quad \left\{\xi-\frac{3}{2(\sqrt{3}+1)}\right\}^2+\eta^2+\zeta^2=\left\{\frac{1}{2(\sqrt{3}+1)}\right\}^2,$$

Tipo III) $a_1=3,\quad b_2=0,\quad c_1=2,\quad d_1=-2,$

$$(10)\quad \left\{\xi-\frac{2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\right\}^2+\left\{\eta-\frac{\sqrt{2}}{4+\sqrt{3}}\right\}^2+\zeta^2=\frac{1}{(4+\sqrt{3})^2},$$

Tipo I) $a_2=1,\quad b_1=2,\quad c_1=-4,\quad d_1=1,$

$$(11)\quad \left\{\xi-\frac{\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\right\}^2+\left\{\eta-\frac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{3}}\right\}^2+\zeta^2=\frac{1}{(4+2\sqrt{3})^2},$$

Tipo I) $a_2=1,\quad b_1=1,\quad c_1=-4,\quad d_1=2,$

$$(12)\quad \left\{\xi-\frac{2}{3+2\sqrt{3}}\right\}^2+\eta^2+\zeta^2=\frac{1}{(3+2\sqrt{3})^2},$$

Tipo III) $a_1=2,\quad b_2=0,\quad c_1=3,\quad d_1=-2,$

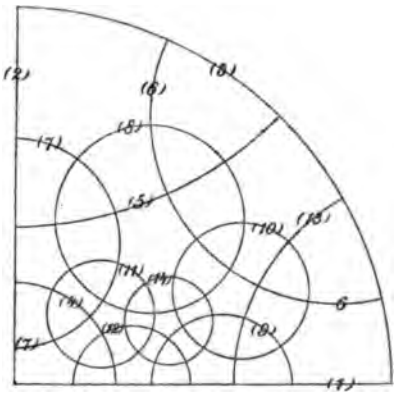
$$(13)\quad \left(\xi-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\eta^2+\zeta^2=\frac{1}{3},$$

Tipo III) $a_1=2,\quad b_2=c_1=0,\quad d_1=-1,$

$$(14)\quad \left(\xi-\frac{2\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}\right)^2+\left\{\eta-\frac{\sqrt{2}}{5+2\sqrt{3}}\right\}^2+\zeta^2+\frac{1}{(5+2\sqrt{3})^2},$$

Tipo I) $a_2=1,\quad b_1=2,\quad c_2=-5,\quad d_1=2.$

Il poliedro P' che così definiamo (Fig^a 13^a), ha i suoi angoli diedri retti e le faccie pentagonali, eccetto le faccie (1) (8) che sono esagonali. I 24 suoi vertici sono tutti a distanza finita al di sopra del piano $\zeta = 0$; cioè: *Il poliedro P' non presenta alcun vertice*



Fig^a 13^a

singolare. Questa importante circostanza, che per la prima volta incontriamo in questi studî, è dovuta all' essere il gruppo $\overline{K}_{(2,3)}$ privo di sostituzioni paraboliche (§ 8).

Mediante considerazioni geometriche in parte ed in parte aritmetiche, del tutto simili a quelle del § 12, stabiliamo che: *Il poliedro P' non è attraversato da alcuna sfera di riflessione di $\overline{K}_{(2,3)}$.*

§ 15.

Sostituzioni che trasformano P' in sè medesimo.

Resta che cerchiamo le sostituzioni di $\overline{K}_{(2,3)}$ che cangiano P' in sè medesimo. Ma anche qui converrà fare più in generale la ricerca di tutte le sostituzioni lineari di 1^a e 2^a specie, che producono questo effetto, senza esigere che appartengano a $\overline{K}_{(2,3)}$; così, oltre a determinare i poliedri fondamentali di $\overline{K}_{(2,3)}$ e di $\overline{H}_{(2,3)}$ troveremo anche il gruppo più ampio in cui $\overline{K}_{(2,3)}$ è contenuto eccezionalmente.

Siccome nel poliedro P', come sopra si è avvertito, abbiamo due sole faccie esagonali (1) (8), in ogni trasformazione di P' in sè medesimo dovranno queste due faccie restare singolarmente invariate o scambiarsi fra loro.*) Cerchiamo dapprima se esistono sostituzioni di 1^a specie

*) Nella discussione seguente si tenga presente la figura 13^a.

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1,$$

che riproducano P' lasciando fissi nel piano $\zeta = 0$ la retta (1) ed il circolo (8). Da note proprietà delle sostituzioni lineari*) risulta che tale sostituzione deve essere ellitica coi due punti fissi

$$(1+i)\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \quad (1-i)\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

e però essa avrà la forma

$$\frac{z' - \frac{1+i}{2}(\sqrt{3}-1)}{z' - \frac{1-i}{2}(\sqrt{3}-1)} = \varepsilon \frac{z - \frac{1+i}{2}(\sqrt{3}-1)}{z - \frac{1-i}{2}(\sqrt{3}-1)},$$

essendo ε una radice dell' unità. Le faccie (1) (8) che debbono cangiarsi in sè medesime essendo esagonali, ε sarà una radice quadrata, cubica o sesta dell' unità. Esaminando subito l'ultimo caso, nel quale gli altri due sono compresi, facciamo

$$\varepsilon = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

e per la corrispondente sostituzione A (ellittica a periodo 6) troviamo

$$\text{A)} \quad z' = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}z + \frac{\sqrt{3}-1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}+1}{2}z + \frac{\sqrt{3}+1}{2}}.$$

Essa cangia effettivamente il poliedro P' in sè medesimo, lasciando fisse le faccie (1) (8) e producendo sulle 12 rimanenti le sostituzioni cicliche di 6° ordine

$$(2, 4, 12, 9, 13, 3)\ (5, 7, 11, 14, 10, 6).$$

Segue poi di qui, come notiamo di passaggio: *Le faccie* (1) (8) *del poliedro* P' *sono esagoni regolari* (*nel senso non euclideo*) *con angoli retti.*

Troviamo inoltre subito una sostituzione di 2ª specie che cangia P' in sè medesimo lasciando fisse le faccie esagonali (1) (8). E invero, se consideriamo la riflessione B del gruppo $\overline{H}_{(2,3)}$:

$$\text{B)} \quad z' = \frac{\frac{-z_0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{z_0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad \text{Tipo VII)} \quad a_2 = c_1 = 0, \quad b_1 = -1, \quad d_1 = 1$$

colla sfera di riflessione

$$(\xi + 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2,$$

*) Cf. Klein-Fricke, Ellipt. Modulfunctionen 1ter Bd. pª 163 s. s.

vediamo che essa lascia ferme le faccie (1) (5) (8) (14) producendo fra le rimanenti gli scambi

$$(2, 3),\ (4, 13),\ (6, 7),\ (9, 12),\ (10, 11).$$

La riflessione B trasforma la sostituzione A nella sua inversa e combinata con A dà luogo al gruppo di 12 sostituzioni

$$\Gamma_{12} = \begin{cases} 1, & A, & A^2, & A^3, & A^4, & A^5, \\ B, & BA, & BA^2, & BA^3, & BA^4, & BA^5, \end{cases}$$

che cangia P' in sè medesimo lasciando fisse le faccie (1) (8).

Dimostriamo facilmente che Γ_{12} è il gruppo completo di sostituzioni lineari riproduttrici di P'. Dalla discussione fatta risulta intanto che fuori di Γ_{12} non esiste alcuna sostituzione che cangi P' in sè medesimo lasciando fisse le faccie (1) (8)*). Una sostituzione U riproduttrice di P' fuori di Γ_{12} dovrebbe adunque scambiare (1) con (8) e trasformare in sè medesimo il gruppo ciclico formato dalle potenze di A; in particolare essa trasformerebbe A^3 in sè medesima. Ora, scambiando A^3 la faccia (2) con (9) dovrebbe U stessa scambiare queste due faccie o lasciarle singolarmente invariate. Ambedue le ipotesi sono inamissibili; invero le due faccie (1) (2) ortogonali fra loro si trasporterebbero per U nel primo caso in (8) (9) e nel 2^0 in (8) (2), mentre le faccie di ciascuna coppia (8) (9) o (8) (2) non si tagliano.

Come pel gruppo $\overline{K}_{(2,2)}$ (§ 13) abbiamo dunque il risultato: *Il gruppo L più ampio in cui $\overline{K}_{(2,3)}$ è eccezionale lo contiene come sottogruppo d'indice* **12**. Si osservi poi che fra le **12** sostituzioni riproduttrici di P' soltanto le quattro

$$1,\ A^3,\ B,\ BA^3$$

appartengono ad $\overline{H}_{(2,3)}$ e fra queste soltanto la A^3 al sottogruppo $\overline{K}_{(2,3)}$. In fine è da osservarsi che se colle formole del § 8 si calcola la sostituzione quaternaria corrispondente alla A si trova la seguente

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

che ha coefficienti razionali interi e riproduce la forma quaternaria

$$\Phi = 3(x_1^2 + x_2^2) + 2x_3^2 - x_4^2.$$

Lo stesso vale quindi per tutte le sostituzioni del gruppo ampliato L.

*) Se di 1ª specie una tale sostituzione sarebbe una potenza di A, se di 2ª, combinata con B, darebbe ancora una potenza di A.

§ 16.

I poliedri fondamentali di $\overline{K}_{(2,3)}$, $\overline{H}_{(2,3)}$.

Fra le sostituzioni di $\overline{K}_{(2,3)}$ la sola sostituzione ellitica A^3 (a periodo 2) cangia P' in sè medesimo. Ogni sfera che passi pel circolo fisso di A^3 divide P' in due parti equivalenti; una qualunque di queste parti più assumersi a poliedro fondamentale di $\overline{K}_{(2,3)}$. Converrà qui assumere per questa sfera la sfera di riflessione della sostituzione B:

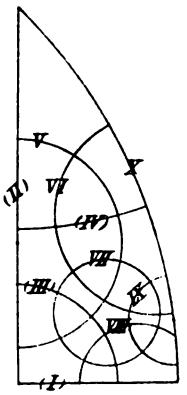
$$B) \quad (\xi + 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2$$

e il poliedro fondamentale di Π di $\overline{K}_{(2,3)}$ sarà quello racchiuso dalle antiche faccie

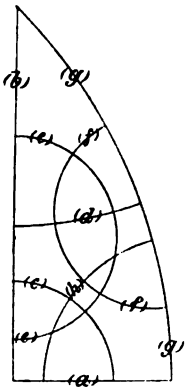
$$(1)\ (2)\ (4)\ (5)\ (7)\ (8)\ (11)\ (12)\ (14)$$

e dalla faccia B) aggiunta che numereremo successivamente con

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X (Fig^a 14^a).



Fig^a 14^a



Fig^a 15^a

Se vogliamo il poliedro fondamentale di $\overline{H}_{(2,3)}$, basterà utilizzare l'altra riflessione BA^3 di $\overline{H}_{(2,3)}$ che trasforma l'antico poliedro P' ed anche l'attuale Π in sè medesimo, lasciando fisse le faccie *I, III, VI, X* e scambiando *II* coñ *VIII, IV* con *IX, V* con *VII*. L'espressione analitica di BA^3 è:

$$s' = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} s_0 - \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}, \quad \text{Tipo V)} \quad a_2 = 0, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = -1, \quad d_1 = 1$$

e la sua sfera di riflessione

$$\left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{2}{(2+\sqrt{3})^2}$$

divide Π in due parti equivalenti; una di esse ad arbitrio, p. e. quella Π' racchiusa dalle faccie

$$I,\ II,\ III,\ IV,\ V,\ VI,\ X$$

e dalla faccia aggiunta può assumersi a poliedro fondamentale di $\bar{H}_{(2,3)}$. Adunque il poliedro Π' di $\bar{H}_{(2,3)}$ è racchiuso dalle 8 faccie

$$a)\ \eta = 0, \qquad b)\ \xi = 0, \qquad c)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (2 - \sqrt{3})^2,$$

$$d)\ \xi^2 + (\eta - \sqrt{2})^2 + \zeta^2 = 1,$$

$$e)\ \xi^2 + \{\eta - \sqrt{2}(2 - \sqrt{3})\}^2 + \zeta^2 = (2 - \sqrt{3})^2,$$

$$f)\ \left\{\xi - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}^2 + \left\{\eta - \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right\}^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2,$$

$$g)\ (\xi + 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2,$$

$$h)\ \left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{2}{(2+\sqrt{3})^2};\quad (\text{Fig}^a\ 15^a);$$

che sono sfere (e piani) di riflessione del gruppo stesso.

Π' ha i 12 vertici

$$V_1 \equiv (a, b, c),\quad V_2 \equiv (a, c, h),\quad V_3 \equiv (a, g, h),\quad V_4 \equiv (a, b, g),$$
$$V_5 \equiv (b, c, e),\quad V_6 \equiv (b, d, e),\quad V_7 \equiv (b, d, g),\quad V_8 \equiv (c, e, h),$$
$$V_9 \equiv (d, e, f),\quad V_{10} \equiv (d, f, g),\quad V_{11} \equiv (e, f, h),\quad V_{12} \equiv (f, g, h);$$

quattro delle sue faccie b), e), g), h) sono pentagonali, le altre quattro quadrangolari. Dei suoi angoli diedri due soltanto sono di 45^0 e cioè quelli agli spigoli (bg), (eh), i rimanenti sono retti.

Dopo queste osservazioni è facile determinare tutte le sostituzioni lineari che cangiano Π' in sè medesimo. Esse formano un *Vierergruppe* che contiene, oltre l'identità, tre sostituzioni ellittiche a periodo 2:

$$\mathsf{A},\ \mathsf{B},\quad C = \mathsf{AB} = \mathsf{BA}.$$

Basterà dare le effettive espressioni di A, B che sono le seguenti

$$\text{A)}\quad z' = \frac{\{1 + i(\sqrt{2}+1)^2\}\, hz + (\sqrt{2}+1)(1-i)h}{(\sqrt{2}+1)(1-i)hz - \{1 + i(\sqrt{2}+1)^2\}}, \qquad h = \frac{\sqrt{3\sqrt{2}-4}}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{B)}\quad z' = \frac{\{1 - i(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}\, kz - (2-\sqrt{3})\{(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - i\}\, k}{(2+\sqrt{3})\{\sqrt{3}-\sqrt{2} - i\}\, kz - \{1 - i(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}\, k}, \qquad k = \frac{\sqrt{2+\sqrt{6}}}{2\sqrt{2}}\ ^*).$$

Sulle faccie di Π' le A, B producono le rispettive trasposizioni

$$\text{A)}\quad (ad)\ (bg)\ (cf)\ (eh),$$
$$\text{B)}\quad (ac)\ (bh)\ (df)\ (eg)$$

---

*) L'aggiunta dei fattori h, k al numeratore e denominatore delle formole ha per iscopo di rendere il determinante delle sostituzioni eguale all' unità.

e la 3ª C conseguentemente le altre

$$C) \quad (af)\ (cd)\ (be)\ (gh).$$

Il gruppo $\overline{H}_{(2,3)}$ è adunque nuovamente suscettibile d'ampliamento e il gruppo più ampio a cui si perviene lo contiene come sottogruppo eccezionale d'indice 4.

Ai due esempî sopra trattati $D = 2$, $\nu = 2$; $D = 3$, $\nu = 3$ ci sarebbe facile aggiungerne altri nei quali la determinazione dei poliedri fondamentali dei gruppi K, H riesce coi medesimi mezzi.

Fra questi gruppi i più notevoli sono certamente quelli che non contengono sostituzioni paraboliche; i loro poliedri generatori, come quelli superiormente determinati per $\overline{K}_{(2,3)}$, $\overline{H}_{(2,3)}$, non presenteranno vertici singolari.

È da osservarsi per altro che per quanto importanti siano questi metodi, essi riescono soltanto per un numero di gruppi relativamente ristretto, essendo per loro natura limitati al caso in cui le riflessioni del gruppo generano un suo sottogruppo d'indice finito. Essi non costituiscono insomma che un primo passo nella soluzione del problema generale: *Definito aritmeticamente un gruppo di sostituzioni lineari determinarne il poliedro o il poligono fondamentale.*

Pisa, Gennaio 1893.

Ueber die Addition und Subtraction der Argumente bei Bessel'schen Functionen nebst einer Anwendung.

Von

J. H. Graf in Bern.

Vorbemerkung: $\left(-\frac{N}{x}, 0\right)$ soll eine Schleife bedeuten, die im Westen des Horizonts beginnt und im rechtläufigen Sinn um 0 herum wieder nach Westen führt.

1.

Die Bessel'sche Function I. Art sei nach Hankel als Summenformel und als Integral*) dargestellt durch:

$$(1)\qquad \overset{n}{J}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{(n+\lambda)!\,\lambda!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\left(-\frac{N}{x}, 0\right)} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} t^{-n-1} dt,$$

worin n eine beliebige Zahl ist.

Die Schläfli'sche complementäre K-Function**) sei

$$(2)\qquad \overset{n}{K}(x) = \operatorname{cotg} n\pi \,.\, \overset{n}{J}(x) - \frac{1}{\sin n\pi}\, \overset{-n}{J}(x).$$

Die Bessel'sche Function II. Art sei als Summenformel und Integral in ähnlicher Weise

$$(3)\qquad \overset{n}{O}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} \frac{n}{4} \cdot \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda} = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \cdot \frac{1}{2}\left[t^n + \frac{(-1)^n}{t^n}\right] ds,$$

wo

$$s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

*) Vergl. Sonine, fonctions cylindriques, Math. Ann. XVI, S. 24; diese Form brauchte L. Schläfli schon einige Jahre vor Sonine, sicher im Jahre 1875.

**) Annali di Matematica: Serie II^a, tomo VI^o, pag. 17. Vergl. die Bemerkung von E. Gubler, Züricher Vierteljahrsschrift XXXIII, Heft 2. 1888, in der Arbeit betitelt: Die Darstellung der allgemeinen Bessel'schen Function durch bestimmte Integrale. Im Anschluss bemerken wir, dass man durch einen Grenzübergang zeigen kann, dass auch die Formel (2) für ein ganzzahliges n einen bestimmten endlichen von $\overset{n}{J}(x)$ verschiedenen Werth hat; man muss also unter der linken Seite von (2) den Grenzwerth verstehen, den man erhält, wenn das variable n sich einer ganzen Zahl nähert. Vergl. hiefür die citirte Arbeit von E. Gubler, S. 141 u. s. f.

Für alle drei Functionen gilt bekanntlich, wenn n ganzzahlig ist,

(4) $\overset{-n}{J}(x) = (-1)^n \overset{n}{J}(x)$; $\overset{-n}{K}(x) = (-1)^n \overset{n}{K}(x)$; $\overset{-n}{O}(x) = (-1)^n \overset{n}{O}(x)$

und es ist

(5)*) $$\frac{1}{x-y} = \overset{0}{O}(x)\,\overset{0}{J}(y) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \overset{n}{O}(x)\,\overset{n}{J}(y),$$

wo x abs. $> y$ sein muss.

Andere Beispiele der Entwicklung nach Bessel'schen Functionen sind:

(6) $$\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (n+2\mu)\frac{(n+\mu-1)!}{\mu!}\,\overset{n+2\mu}{J}(x).$$

Für $n = 0$,

(7) $$1 = \overset{0}{J}(x) + 2\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \overset{\mu}{J}(x),$$

für $n = 1$,

(8) $$x = 2\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (2\mu+1)\,\overset{2\mu+1}{J}(x),$$

Formeln, die C. Neumann**) auf ähnliche Weise aus den nachfolgenden erhält:

(9) $$\cos(x\sin\varphi) = \overset{0}{J}(x) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \overset{2n}{J}(x)\cos 2n\varphi,$$

(10) $$\sin(x\sin\varphi) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} \overset{2n+1}{J}(x)\sin(2n+1)\varphi.$$

Vergleiche noch E. Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen S. 39 u. s. f.

Seite 40 führt C. Neumann folgende Entwicklung an:

(11) $$\overset{0}{J}(c+z) = \overset{0}{J}(c)\,\overset{0}{J}(z) - 2\overset{1}{J}(c)\,\overset{1}{J}(z) + 2\overset{2}{J}(c)\,\overset{2}{J}(z) - + \cdots$$

gültig für sämmtliche Punkte der z-Ebene. Damit deutet C. Neumann die Addition der Argumente bei Bessel'schen Functionen beispielsweise an. Weiter ausgeführt ist die Entwicklung von $\overset{m}{J}(z+h)$ bei Lommel, Studien etc. § 10; wo sich Anwendungen für $m = 0$, und $h = z$ finden. L. Schläfli hat dann weiter in den Math. Ann. III, S. 138 die Entwicklung für $\overset{n}{O}(x+y)$ gegeben; S. 137 findet sich $\overset{n}{J}(x+y)$, welche Sonine***) irrthümlicherweise Schläfli zuschreibt, während sie

*) C. Neumann, Theorie der Bessel'schen Functionen, S. 9.

**) C. Neumann, Theorie der Bessel'schen Functionen S. 7, 40, 67.

***) N. Sonine, fonctions cylindriques. Math. Annalen XVI, S. 16.

Lommel zuerst gegeben und bewiesen hat Allerdings giebt Schläfli auch einen Beweis dafür an und zeigt, dass hiebei y abs. $< x$ sein muss. Es sei uns nun gestattet, diese *Addition* und zugleich auch die *Subtraction der Argumente* bei Bessel'schen Functionen für alle Hauptformen etwas allgemeiner durchzuführen und eine Anwendung daran zu knüpfen. —

Die Betrachtung der Bessel'schen Functionen II. Art, die Neumann*) mit $\overset{n}{O}(x)$ bezeichnet hat, führt zur Einführung einer Hülfsfunction. Es ist.

$$(12)\quad \begin{cases} \overset{n}{O}(x) = \dfrac{\cos^2 \frac{n\pi}{2}}{x} + \dfrac{n}{2x}\overset{n}{S}(x), \text{ wo } \overset{n}{S}(x) = \displaystyle\int_1^{\infty} e^{-xs}\left[t^n - \frac{(-1)^n}{t^n}\right]\frac{dt}{t} \\ \text{oder} \\ \overset{n+1}{S}(x) + \overset{n-1}{S}(x) = 4\overset{n}{O}(x). \end{cases}$$

Als Summenformel lautet der Ausdruck für $\overset{n}{S}(x)$

$$(13)\quad \overset{n}{S}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda}.$$

Hier gilt

$$(14)\quad \overset{-n}{S}(x) = -(-1)^n \overset{n}{S}(x)$$

und

$$(15)\quad \overset{n}{S}(x) = \pi \sum_{\lambda=-n}^{\lambda=n} \left(\overset{n}{J}(x)\overset{\lambda}{K}(x) - \overset{n}{K}(x)\overset{\lambda}{J}(x)\right).$$

Die Betrachtung von $\overset{n}{K}(x)$ führte Schläfli zu einer weitern Hülfsfunction

$$(16)^{**})\quad \begin{cases} \overset{n}{T}(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\left[x\sin\varphi - n\varphi\right]d\varphi \\ \qquad = \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{1}{\lambda}\left[\overset{n+2\lambda}{J}(x) - \overset{n-2\lambda}{J}(x)\right] \\ \overset{-n}{T}(x) = -(-1)^n \overset{n}{T}(x). \end{cases}$$

Für alle diese Functionen lässt sich nun die Addition und Subtraction

*) C. Neumann, Theorie der Bessel'schen Functionen, S. 9.

**) Vergl. Schläfli, Math. Annalen III, S. 144, wo $\overset{n}{H}(x) = \frac{1}{2}\overset{n}{T}(x)$ ist.

der Argumente ohne Schwierigkeit durchführen. Schläfli hat schon 1875 den gleichen Weg eingeschlagen für $\overset{n}{J}(x+y)$, wie Sonine 1879 im XVI. Bande der Math. Annalen S. 16.

Ausgehend von (1) folgt

$$\overset{n}{J}(x+y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\left(-\frac{N}{x+y},\,0\right)} e^{xs}e^{ys}t^{-n-1}\,dt, \quad \text{wo} \quad s = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right).$$

Unter Berücksichtigung von

$$e^{ys} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{\lambda}{J}(y)\,t^{\lambda},$$

folgt

$$(17)\quad \overset{n}{J}(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{\lambda}{J}(y)\cdot\frac{1}{2i\pi}\int_{\left(-\frac{N}{x},\,0\right)} e^{xs}t^{-n+\lambda-1}\,dt = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{\lambda}{J}(y)\,\overset{n-\lambda}{J}(x),$$

wo

$$y \text{ abs} < x.$$

Um die Convergenzbedingung einzusehen, brechen wir die Summe und schreiben (17)

$$\overset{n}{J}(x+y) = \overset{n}{J}(x)\,\overset{0}{J}(y) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\left[\overset{n-\lambda}{J}(x) + (-1)^{\lambda}\,\overset{n+\lambda}{J}(x)\right]\overset{\lambda}{J}(y).$$

Der Anfangsterm des 2^{ten} Theils nach dem Summationszeichen ist gleich $\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n\left(\frac{xy}{4}\right)^{\lambda}}{(n+\lambda)!\,\lambda!}$, was convergent ist.

Der Anfangsterm des 1^{ten} Theils ist gleich $\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n-\lambda}\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^{\lambda}}{\Gamma(n-\lambda+1)\,\lambda!}$. Da

$$\binom{n}{\lambda} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\lambda+1)\cdot\Gamma(\lambda+1)}$$

und also

$$\frac{1}{\Gamma(n-\lambda+1)\cdot\lambda!} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\cdot\binom{n}{\lambda},$$

so wird der Term zu

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(1+n)}\cdot\binom{n}{\lambda}\left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda};$$

somit ist die Bedingung der Convergenz y abs $< x$.

Aus (17) folgt unter Berücksichtigung von (4)

$$\overset{-n}{J}(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \overset{\lambda-n}{J}(x) \overset{\lambda}{J}(y). \tag{18}$$

Nun multiplicire man (17) mit $\operatorname{cotg} n\pi = \operatorname{cotg}(n-\lambda)\pi$

und (18) mit $-\frac{1}{\sin n\pi} = -\frac{(-1)^{\lambda}}{\sin(n-\lambda)\pi}$

und addire, dann hat man nach (2)

$$\overset{n}{K}(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{n-\lambda}{K}(x) \overset{\lambda}{J}(y) \tag{19}$$

und

$$\overset{-n}{K}(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \overset{\lambda-n}{K}(x) \overset{\lambda}{J}(y). \tag{20}$$

Specialformeln für $n = 0, 1, 2, \ldots$ ergeben sich leicht.

Wir nehmen (12) und setzen im Integral statt x auch $x + y$

$$\overset{n}{S}(x+y) = \int_{1}^{\frac{N}{x}} e^{-(x+y)s} \left[t^{n} - \frac{(-1)^{n}}{t^{n}} \right] \frac{dt}{t}$$

aber

$$e^{-ys} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{\lambda}{J}(-y) t^{\lambda} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \overset{\lambda}{J}(y) t^{\lambda} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{\lambda}{J}(y)\, t^{-\lambda},$$

somit

$$\overset{n}{S}(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{\lambda}{J}(y) \int_{1}^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left[t^{n-\lambda} - \frac{(-1)^{n-\lambda}}{t^{n-\lambda}} \right] \frac{dt}{t},$$

was nach (12) schliesslich

$$\overset{n}{S}(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{n-\lambda}{S}(x) \overset{\lambda}{J}(y), \tag{21}*$$

$$\overset{-n}{S}(x+y) = -\sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \overset{\lambda-n}{S}(x) \overset{\lambda}{J}(y) \quad \text{giebt.} \tag{22}$$

Specialformeln für $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$.

Da $\overset{n}{O}(x) = \frac{1}{4}\left(\overset{n+1}{S}(x) + \overset{n-1}{S}(x) \right)$, so folgt wegen dieser linearen Beziehung

*) Schläfli giebt Math. Annalen III, S. 139—141 einen anderen Beweis, gestützt auf die Summenformel (13).

(23)*) $$\overset{n}{O}(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{n-\lambda}{O}(x)\,\overset{\lambda}{J}(y),$$

(24) $$\overset{-n}{O}(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda}\,\overset{\lambda-n}{O}(x)\,\overset{\lambda}{J}(y).$$

In (16) sei auch $x+y$ statt x substituirt, so folgt

$$\overset{n}{T}(x+y) = \sum_{\lambda=\infty}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda}\left[\overset{n+2\lambda}{J}(x+y) - \overset{n-2\lambda}{J}(x+y)\right].$$

Nach (17) hat man

$$\overset{n}{T}(x+y) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=\infty} \left[\overset{n-\mu+2\lambda}{J}(x) - \overset{n-\mu-2\lambda}{J}(x)\right] \overset{\mu}{J}(y).$$

Wir halten μ fest und summiren nach λ, dann folgt nach (16)

(25) $$\overset{n}{T}(x+y) = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=\infty} \overset{n-\mu}{T}(x)\,\overset{\mu}{J}(y),$$

wo immer y abs. $< x$. Specialfälle für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

(26) $$\overset{-n}{T}(x+y) = -\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu}\,\overset{\mu-n}{T}(x)\,\overset{\mu}{J}(y).$$

Um zur Subtraction der Argumente überzugehen, schreiben wir in Formel (17) statt y den Werth $-y$ und erhalten

$$\overset{n}{J}(x-y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{n-\lambda}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(-y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{n-\lambda}{J}(x)\,\overset{-\lambda}{J}(y),$$

ersetzen λ durch $-\lambda$

(27) $$\overset{n}{J}(x-y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{n+\lambda}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(y).$$

In gleicher Weise progrediren wir in den Formeln (19), (21), (23), (25) und erhalten:

(28) $$\overset{n}{K}(x-y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{n+\lambda}{K}(x)\,\overset{\lambda}{J}(y),$$

(29) $$\overset{n}{S}(x-y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{n+\lambda}{S}(x)\,\overset{\lambda}{J}(y),$$

*) Vergl. auch Schläfli ibid. S. 138.

$$\overset{n}{O}(x-y)=\sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty}\overset{n+\lambda}{O}(x)\,\overset{\lambda}{J}(y), \tag{30}$$

$$\overset{n}{T}(x-y)=\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=\infty}\overset{n+\mu}{T}(x)\,\overset{\mu}{J}(y), \tag{31}$$

2.

Mit Hülfe von Formel (27) lässt sich die Entwicklung der J-Function und der K-Function für ein Argument darstellen, dass die Entfernung zweier Punkte bezeichnet.*) Das anzuwendende Verfahren ist ein so einfaches, dass es einiges Interesse für sich in Anspruch nehmen darf. Wir setzen

$$V=\sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty}\overset{n+\lambda}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(y)\cdot\varepsilon^{\lambda}. \tag{32}$$

Bezüglich der Convergenz dieser Summe nach oben, greifen wir bei den J-Functionen den ersten Term heraus und finden als Product

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n}\left(\frac{xy\varepsilon}{4}\right)^{\lambda}}{\Gamma(n+\lambda+1)\cdot\lambda!},$$

was für ein grosses λ verschwindet.

Bezüglich der untern Grenze schreiben wir statt λ zuerst $-\lambda$ und haben

$$\overset{n-\lambda}{J}(x)\,\overset{-\lambda}{J}(y)\cdot\frac{1}{\varepsilon^{\lambda}}=(-1)^{\lambda}\overset{n-\lambda}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(y)\cdot\frac{1}{\varepsilon^{\lambda}},$$

ein Ausdruck, dessen Anfangsterm lautet

$$\frac{(-1)^{\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{y}{x\varepsilon}\right)^{\lambda}}{\Gamma(n-\lambda+1)\cdot\lambda!},$$

was nach S. 139

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n}}{\Gamma(1+n)}\binom{n}{\lambda}\left(\frac{y}{x\varepsilon}\right)^{\lambda},$$

also finden wir als Bedingung ε abs. $<\frac{y}{x}$, was wir der Formel (32) somit voraussetzen.

---

*) C. Neumann, Theorie der Bessel'schen Functionen S. 61 u. f. — E. Lommel, Studien etc. § 5. — N. Sonine, fonctions cylindriques Math. Annalen XVI, S. 22. — L. Gegenbauer, Wiener Ber. LXXIV, LXXXI. LXIX. — E. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen 2. Aufl. I, S. 340 u. f.

Nach (1) stellen wir einen Integralausdruck für $\overset{n+\lambda}{J}(x)$ auf, substituiren ihn in (32)

$$V = \frac{1}{2i\pi}\int_{\left(-\frac{N}{x},\,0\right)} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} t^{-n-1} \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{\lambda}{J}(y)\cdot\left(\frac{z}{t}\right)^{\lambda} dt.$$

Aber nach

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{\lambda}{J}(y)\, t^{\lambda} = e^{\frac{1}{2}y\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$

ist

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{\lambda}{J}(y)\cdot\left(\frac{z}{t}\right)^{\lambda} = e^{\frac{1}{2}y\left(\frac{z}{t}-\frac{t}{z}\right)},$$

somit

$$V = \frac{1}{2i\pi}\int_{\left(-\frac{N}{x},\,0\right)} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{2}y\left(\frac{z}{t}-\frac{t}{z}\right)} t^{-n-1}\, dt.$$

Wenn nun

$$x - \frac{y}{z} = \frac{p}{q},\quad x - yz = pq,\quad p^2 = \left(x-\frac{y}{z}\right)(x-yz),\quad q^2 = \frac{x-yz}{x-\frac{y}{z}},$$

dann ist

$$\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{2}y\left(\frac{z}{t}-\frac{t}{z}\right) = \frac{1}{2}\left[t\frac{p}{q}-\frac{1}{t}pq\right] = \frac{1}{2}p\left(u-\frac{1}{u}\right),\quad \text{wo } u = \frac{t}{q}.$$

$$V = \frac{1}{2i\pi}\int_{\left(-\frac{N}{p},\,0\right)} e^{\frac{1}{2}p\left(u-\frac{1}{u}\right)} (qu)^{-n-1}\cdot q\, du = \frac{q^{-n}}{2i\pi}\int_{\left(-\frac{N}{p},\,0\right)} e^{\frac{p}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)} u^{-n-1}\, du$$

und nach (1)

$$V = q^{-n}\overset{n}{J}(p),$$

also nach (32)

$$q^{-n}\overset{n}{J}(p) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{n+\lambda}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(y)\,z^{\lambda},\quad \text{wo } z \text{ abs.} < \frac{y}{x} \tag{33}$$

aber

$$p^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi,\quad \text{wo } e^{i\varphi} = z,$$

$$q^{-n}\overset{n}{J}\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}\right) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{n+\lambda}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(y)\,z^{\lambda}. \tag{34}$$

In (33) ersetzen wir n durch $-n$, q durch $\frac{1}{q}$, die Hauptbedingung der Convergenz wird zu z abs. $> \frac{x}{y}$ wo y abs. $< x$, dann folgt

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n \overset{-n}{J}(p) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{-n+\lambda}{J}(x)\overset{\lambda}{J}(y)\, z^\lambda,$$

nun schreiben wir $-\lambda$ statt λ

$$q^{-n}\overset{-n}{J}(p) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \overset{-n-\lambda}{J}(x)\overset{\lambda}{J}(y)\cdot\frac{1}{z^\lambda} \tag{35}$$

und multipliciren (33) mit $\operatorname{cotg} n\pi = \operatorname{cotg}(n+\lambda)\pi$,

(35) mit $-\frac{1}{\sin n\pi} = -\frac{(-1)^\lambda}{\sin(n+\lambda)\pi}$ und addiren

$$q^{-n}\overset{n}{K}(p) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{n+\lambda}{K}(x)\overset{\lambda}{J}(y)\, z^\lambda, \tag{36}$$

$$q^{-n}\overset{n}{K}(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{n+\lambda}{K}(x)\overset{\lambda}{J}(y) z^\lambda. \tag{37}$$

Für $n = 0$, gehen (33) und (36) über in

$$\overset{0}{J}(p) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{\lambda}{J}(x)\overset{\lambda}{J}(y)\, z^\lambda, \tag{38}$$

$$\overset{0}{K}(p) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{\lambda}{K}(x)\overset{\lambda}{J}(y) z^\lambda. \tag{39}$$

Berücksichtigen wir, dass $z = e^{i\varphi}$, so folgt, wenn wir die Summe brechen,

$$\overset{0}{J}(p) = \overset{0}{J}(x)\overset{0}{J}(y) + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \overset{\lambda}{J}(x)\overset{\lambda}{J}(y)\cos\lambda\varphi, \tag{40}$$

$$\overset{0}{K}(p) = \overset{0}{K}(x)\overset{0}{J}(y) + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \overset{\lambda}{K}(x)\overset{\lambda}{J}(y)\cos\lambda\varphi. \tag{41}$$

Vergleiche die Resultate bei Neumann, Lommel, Sonine, Gegenbauer an den angegebenen Orten.

Die Anregung zu dieser Arbeit haben wir durch eine Vorlesung des Herrn Prof. Dr. L. Schläfli empfangen.

Bern im März 1893.

Ueber symbolisches Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften.

Von

Th. Reye in Strassburg i./E.

In der synthetischen und der analytischen Geometrie werden zahlreiche Transformationen und geometrische Verwandtschaften aufgestellt, und benutzt, um aus gegebenen räumlichen Gebilden andere abzuleiten und ihre Eigenschaften zu ermitteln. Dahin gehören die linearen und sonstigen Substitutionen, das Projiciren und Schneiden, die projective Verwandtschaft oder Homographie eindimensionaler Gebilde, die Affinität mit Einschluss der Aehnlichkeit und der Congruenz, die Collineation, insbesondere die perspective, die geschaarte und die planare Collineation, die reciproke Verwandtschaft oder Correlation, die geometrischen Verwandtschaften zweiten und höheren Grades, die Cremona'schen Transformationen, überhaupt alle eindeutigen Abbildungen. Diese geometrischen Verwandtschaften enthalten die involutorischen als wichtige Specialfälle, und zwar u. a. die Involution oder involutorische Homographie, die involutorischen Collineationen und unter ihnen die Spiegelungen an Ebenen, Geraden oder Punkten, die polare und die Null-Correlation, durch welche jeder Punkt in seine Polarebene bezüglich einer Fläche zweiter Ordnung bezw. in eine durch ihn gehende Ebene transformirt wird, endlich die Inversion bezüglich einer Kugel oder eines Kreises.

Werden derartige Verwandtschaften oder Transformationen nach einander angewandt, so resultiren aus ihnen wiederum Verwandtschaften. Man kann nun mit geometrischen Verwandtschaften und ihren Resultirenden oder Producten geradezu rechnen, indem man sie symbolisch mit Buchstaben bezeichnet. Diese symbolische Rechnung eröffnet der reinen Geometrie ein neues Forschungsgebiet und stellt ihr alsbald interessante Aufgaben, indem sie ihr zugleich wirksame analytische Hülfsmittel zu deren Lösung darbietet. Sie macht u. a.

die Gruppentheorie*) ohne Weiteres anwendbar auf die geometrischen Verwandtschaften.

In der kürzlich erschienenen dritten Auflage meiner „Geometrie der Lage" II und III sind mehrere Abschnitte**) dem symbolischen Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften gewidmet. Für gewisse Hauptfälle der Homographie, Collineation oder Correlation werden daselbst die Fragen nach den Homographien, Collineationen und Correlationen, welche mit einer gegebenen vertauschbar sind, welche sie umkehren oder von ihr umgekehrt werden, vollständig erledigt. In anderen wichtigen Fällen aber werden diese nächstliegenden Fragen nur theilweise beantwortet; überhaupt bleibt auf diesem Gebiete noch sehr viel zu thun übrig. Ich komme deshalb nochmals darauf zurück, beschränke mich aber ausdrücklich auf eindeutige, umkehrbare, nicht ausgeartete Verwandtschaften. Ausgeschlossen sind damit u. A. die linearen Substitutionen mit verschwindender Determinante, weil sie ausgeartete Homographien, Collineationen oder Correlationen darstellen.

Um das Verständniss zu erleichtern, wiederhole ich zunächst von meinen früheren Untersuchungen die einleitenden Bemerkungen und die wichtigeren Rechnungen mit einigen Auslassungen und Zusätzen.

§ 1.

Rechnungsregeln.

1. Zwei räumliche Gebilde Σ, Σ_1 von gleicher Stufe, z. B. zwei Räume, Flächen oder Linien, heissen geometrisch verwandt, wenn jedem Elemente (d. h. jedem Punkte, jeder Geraden und jeder Ebene) $A, B, C, g, h, \varepsilon, \ldots$ von Σ ein Element $A_1, B_1, C_1, g_1, h_1, \varepsilon_1, \ldots$ von Σ_1 als entsprechendes zugewiesen ist, Wir stellen diese geometrische Verwandtschaft dar durch $\Sigma \barwedge \Sigma_1$***) oder ausführlicher durch:

$$ABCgh\varepsilon \cdots \barwedge A_1B_1C_1g_1h_1\varepsilon_1 \cdots,$$

bezeichnen sie mit φ_1 und sagen:

„Das räumliche Gebilde Σ wird durch die geometrische Verwandtschaft (die Substitution, Collineation, Correlation, quadratische Verwandtschaft etc.) φ_1 in das Gebilde Σ_1 *transformirt* oder *verwandelt*,

*) Vorzugsweise kommen hier die continuirlichen Gruppen in Betracht, deren Theorie Herr Sophus Lie bekanntlich seit 1873 ausgebildet hat. Vgl. darüber Lie's Theorie der Substitutionsgruppen, Leipzig 1888/90. Continuirliche Gruppen von Bewegungen untersuchte Herr C. Jordan schon 1868 in den Annali di Matematica Serie II^a, t. II.

**) Theil II S. 80—117, Theil III S. 219—224.

***) Bekanntlich hat von Staudt dieses Zeichen $\barwedge$ für „projectiv" eingeführt.

oder Σ *geht* durch sie *über* in Σ_1. Durch die umgekehrte oder inverse Verwandtschaft:

$$A_1 B_1 C_1 g_1 h_1 \varepsilon_1 \cdots \curlywedge A B C g h \varepsilon \cdots \text{ oder } \varphi_1^{-1}$$

geht ebenso Σ_1 über in Σ."

2. Aus φ_1 und der geometrischen Verwandtschaft $\Sigma_1 \curlywedge \Sigma_2$ oder:

$$A_1 B_1 C_1 g_1 h_1 \varepsilon_1 \cdots \curlywedge A_2 B_2 C_2 g_2 h_2 \varepsilon_2 \cdots \text{ oder } \varphi_2,$$

welche das Gebilde Σ_1 in Σ_2 transformirt, „resultirt" eine dritte Verwandtschaft ϱ, nämlich $\Sigma \curlywedge \Sigma_2$ oder:

$$A B C g h \varepsilon \cdots \curlywedge A_2 B_2 C_2 g_2 h_2 \varepsilon_2 \cdots \text{ oder } \varphi_1 \varphi_2 = \varrho,$$

von welcher φ_1 und φ_2 die „Componenten" oder „Factoren" sind. Aus den zu φ_2 und φ_1 inversen Verwandtschaften φ_2^{-1} und φ_1^{-1} resultirt ebenso die zu ϱ inverse Verwandtschaft $\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1} = \varrho^{-1}$. In der anderen Reihenfolge φ_2, φ_1 haben die beiden Verwandtschaften nur dann eine Resultirende $\varphi_2\varphi_1 = \sigma$, wenn das Gebilde Σ_2 mit Σ zusammenfällt. Durch $\varphi_1\varphi_2 = \varrho$ wird in diesem Falle das Gebilde Σ in sich selbst transformirt, dagegen geht durch $\varphi_2\varphi_1 = \sigma$ das Gebilde Σ_1 in sich selbst über.

Sind die Componenten φ_1, φ_2 entweder beide Collineationen oder beide Correlationen, so ist ihre Resultirende ϱ eine Collineation. Demnach bilden in der Ebene oder im Raume die Collineationen eine Gruppe; mit ihnen zusammen aber bilden die Correlationen eine umfassendere Gruppe.

3. Für die Resultirende von drei oder mehr Verwandtschaften gilt das associative Gesetz, nämlich die Gleichung:

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 \cdots = (\varphi_1\varphi_2)\,\varphi_3\varphi_4 \cdots = \varphi_1(\varphi_2\varphi_3)\,\varphi_4 \cdots = (\varphi_1\varphi_2\varphi_3)\,\varphi_4 \cdots;$$

d. h. sie bleibt ungeändert, wenn zwei oder mehrere aufeinander folgende Componenten durch ihre Resultirende ersetzt werden. Denn die Verwandtschaft $\varphi_1\varphi_2\varphi_3$ oder $\Sigma \curlywedge \Sigma_3$ resultirt nicht nur aus den Verwandtschaften φ_1, φ_2 und φ_3 oder:

$$\Sigma \curlywedge \Sigma_1, \quad \Sigma_1 \curlywedge \Sigma_2 \quad \text{und} \quad \Sigma_2 \curlywedge \Sigma_3,$$

sondern auch aus $(\varphi_1\varphi_2)$ und φ_3 oder $\Sigma \curlywedge \Sigma_2$ und $\Sigma_2 \curlywedge \Sigma_3$, ebenso aber aus φ_1 und $(\varphi_2\varphi_3)$. In einem symbolischen Producte von Verwandtschaften können und dürfen die Factoren i. A. nicht vertauscht werden (2).

4. Aus einer beliebigen Verwandtschaft φ und ihrer Umkehrung φ^{-1} resultirt die „Identität", d. h. die Verwandtschaft, durch welche jedes Element des zu transformirenden Gebildes in sich selbst übergeht. In dem symbolischen Producte successiver Verwandtschaften kann die Identität beliebig eingeschaltet oder fortgelassen werden, weil sie auf die resultirende Verwandtschaft ohne Einfluss ist. Wir be-

zeichnen deshalb die Identität symbolisch durch Eins und setzen $\varphi\varphi^{-1} = 1$ und $\varphi^{-1}\varphi = 1$. Wenn aus zwei Verwandtschaften die Identität resultirt, so ist jede von ihnen die Umkehrung der anderen; denn aus $\varphi\chi = 1$ folgt $\varphi\chi\chi^{-1} = \chi^{-1}$ oder $\varphi = \chi^{-1}$.

5. Die einfachen Regeln für das Rechnen mit Verwandtschaften ergeben sich hiernach leicht, sind übrigens aus der Substitutionentheorie längst bekannt*). Eine Gleichung zwischen geometrischen Verwandtschaften:

$$\chi_1\chi_2 \cdots \chi_k = \psi_1\psi_2 \cdots \psi_m$$

bedeutet, dass die aufeinander folgenden Verwandtschaften ihrer einen Seite dieselbe Resultirende ϱ haben, wie die der anderen Seite. Mit ihr zugleich gilt die Gleichung:

$$\chi_k^{-1} \cdots \chi_2^{-1}\chi_1^{-1} = \psi_m^{-1} \cdots \psi_2^{-1}\psi_1^{-1},$$

deren beide Seiten die zu ϱ inverse Verwandtschaft ϱ^{-1} darstellen. Man leitet aus einer Gleichung andere ab, indem man den Verwandtschaften ihrer beiden Seiten geeignete Verwandtschaften vorangehen oder nachfolgen lässt, sie also vorne oder hinten mit passenden Verwandtschaften multiplicirt. Wird die obige Gleichung vorne mit χ_1^{-1} oder hinten mit ψ_m^{-1} multiplicirt, so ergeben sich wegen

$$\chi_1^{-1}\chi_1 = 1 = \psi_m\psi_m^{-1}$$

die Gleichungen:

$$\chi_2\chi_3 \cdots \chi_k = \chi_1^{-1}\psi_1\psi_2 \cdots \psi_m \quad \text{und} \quad \chi_1\chi_2 \cdots \chi_k\psi_m^{-1} = \psi_1\psi_2 \cdots \psi_{m-1},$$

welche lehren, wie Verwandtschaften von einer Seite der Gleichung auf die andere gebracht werden. Jede Gleichung zwischen Verwandtschaften lässt sich hiernach leicht umformen in Gleichungen:

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3 \cdots \varphi_n = 1 \quad \text{und} \quad \varphi_n^{-1}\varphi_{n-1}^{-1} \cdots \varphi_1^{-1} = 1,$$

deren eine Seite die Identität ist. Die Verwandtschaften auf der anderen Seite einer solchen Gleichung dürfen cyklisch permutirt werden (H. Wiener); multiplicirt man nämlich die erstere Gleichung vorne mit φ_1^{-1} und hinten mit φ_1, so ergiebt sich:

$$\varphi_2\varphi_3 \cdots \varphi_n\varphi_1 = \varphi_1^{-1}\varphi_1 = 1.$$

§ 2.

Ueberführung und Vertauschbarkeit geometrischer Verwandtschaften.

6. Wir beschränken uns nunmehr auf Verwandtschaften, die ein beliebiges Gebilde Σ, z. B. den Raum, ein ebenes Feld oder eine Curve, in sich selbst transformiren. Durch eine solche Verwandtschaft φ

*) Vgl. Camille Jordan, Théorie des substitutions, Paris 1870; Netto, Substitutionentheorie, Leipzig 1882.

werden die Elemente des Gebildes Σ paarweise einander zugewiesen; und zwar wird das „erste" Element jedes Paares durch φ in das homologe „zweite" Element transformirt, durch die umgekehrte Verwandtschaft φ^{-1} aber geht das zweite Element jedes Paares in das erste über. Werden durch φ die Elemente eines jeden Paares mit einander vertauscht, so ist $\varphi^{-1} = \varphi$; die Verwandtschaft ist in diesem Falle von ihrer Umkehrung nicht verschieden und heisst „involutorisch."

Die Elemente gewisser Paare können, wenn sie gleichartig sind, in je einem „Doppelelemente" der Verwandtschaft zusammenfallen; sie können, wenn ungleichartig, incident sein. So hat eine räumliche Collineation bekanntlich i. A. vier Doppelpunkte, sechs Doppelgerade und vier Doppelebenen, welche die Eckpunkte, Kanten und Flächen des reellen oder imaginären „Haupttetraeders" der Collineation bilden. In einer räumlichen Correlation aber umhüllen die Ebenen, welche durch ihre homologen Punkte gehen, i. A. eine Fläche Φ^2 zweiter Classe, und diese Punkte liegen i. A. auf einer Fläche F^2 zweiter Ordnung; die beiden „Kernflächen" F^2 und Φ^2 gehen sowohl durch die Correlation als auch durch ihre Umkehrung in einander über und haben vier reelle oder imaginäre Doppelgerade der Correlation, die vier Kanten des windschiefen „Hauptvierseits" gemein.*) Die beiden Diagonalen des Hauptvierseits werden durch die Correlation mit einander vertauscht. — Eine Verwandtschaft φ hat dieselben Doppelelemente wie ihre Umkehrung φ^{-1}.

7. Sei $\Sigma \curlywedge \Sigma_1$ eine beliebige Verwandtschaft φ zwischen zwei zusammenfallenden Gebilden. Durch eine andere Verwandtschaft ψ werde das Gebilde Σ in Σ' und zugleich Σ_1 in Σ_1' transformirt. Dann resultirt aus den drei Verwandtschaften:

$$\Sigma' \curlywedge \Sigma, \quad \Sigma \curlywedge \Sigma_1 \text{ und } \Sigma_1 \curlywedge \Sigma_1' \text{ oder } \psi^{-1}, \varphi \text{ und } \psi$$

die Verwandtschaft $\Sigma' \curlywedge \Sigma_1'$ oder $\psi^{-1}\varphi\psi = \varphi'$. Wir sagen in diesem Falle mit C. Jordan und Stephanos**): Die Verwandtschaft φ wird durch die andere ψ „übergeführt" in die Verwandtschaft $\psi^{-1}\varphi\psi = \varphi'$. Jedes Elementepaar und jedes Doppelelement von φ wird durch die Verwandtschaft ψ in ein Elementepaar resp. in ein Doppelelement von φ' verwandelt.

Die Gleichung $\psi^{-1}\varphi\psi = \varphi'$ lässt sich umformen in jede der folgenden Gleichungen:

$$\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi = \varphi'^{-1}, \quad \varphi\psi = \psi\varphi', \quad \varphi = \psi\varphi'\psi^{-1},$$

auch folgt aus ihr $\psi^{-1}\varphi\psi\psi^{-1}\varphi\psi = \varphi'\varphi'$ oder $\psi^{-1}\varphi^2\psi = \varphi'^2$, und ebenso $\psi^{-1}\varphi^n\psi = \varphi'^n$. Wenn also φ durch ψ in φ' übergeführt

*) Schröter, Journal für d. r. u. a. Math. 77, S. 140; vgl. Reye, Geom. d. Lage, 3. Aufl. III, S. 222.

**) C. Jordan a. a. O.; Stephanos in den Math. Annalen 22, S. 310 u. flgde.

wird, so werden φ^{-1} und $\varphi^{\pm n}$ durch ψ in φ'^{-1} und $\varphi'^{\pm n}$ übergeführt; zugleich werden φ' und $\varphi'^{\pm n}$ durch ψ^{-1} in resp. φ und $\varphi^{\pm n}$ übergeführt.

8. Eine Gleichung zwischen Verwandtschaften:

$$\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_k = \chi_1 \chi_2 \cdots \chi_l$$

bleibt gültig, wenn alle darin vorkommenden Verwandtschaften φ, χ ersetzt werden durch diejenigen φ', χ', in welche sie durch irgend eine Verwandtschaft ψ übergeführt werden. Denn zunächst gilt auch die Gleichung:

$$\psi^{-1}\varphi_1\varphi_2 \cdots \varphi_k\psi = \psi^{-1}\chi_1\chi_2 \cdots \chi_l\psi;$$

wird aber hierin zwischen je zwei successiven Verwandtschaften φ oder χ die Identität $\psi\psi^{-1}$ eingeschaltet (4), so ergiebt sich sofort:

$$\varphi_1'\varphi_2' \cdots \varphi_k' = \chi_1'\chi_2' \cdots \chi_l',$$

weil

$$\psi^{-1}\varphi_i\psi = \varphi_i' \quad \text{und} \quad \psi^{-1}\chi_i\psi = \chi_i'.$$

Jede Gleichung zwischen geometrischen Verwandtschaften oder Transformationen stellt demnach eine invariante Eigenschaft derselben dar. Eine involutorische Verwandtschaft $\varphi = \varphi^{-1}$ insbesondere kann nur in involutorische Verwandtschaften übergeführt werden.

9. Zwei Verwandtschaften φ, ψ heissen „vertauschbar", wenn $\varphi\psi = \psi\varphi$ ist, wenn also ihre Resultirende nicht abhängt von ihrer Reihenfolge. Von zwei vertauschbaren Verwandtschaften wird jede durch die andere in sich selbst übergeführt; und wenn eine Verwandtschaft φ durch eine andere ψ in sich selbst übergeführt wird, so sind φ und ψ vertauschbar. Denn jede der beiden Gleichungen:

$$\varphi\psi = \psi\varphi \quad \text{und} \quad \psi^{-1}\varphi\psi = \varphi$$

folgt aus der anderen.

Die mit einer Verwandtschaft φ vertauschbaren Verwandtschaften $\psi, \psi_1, \ldots$ bilden eine Gruppe, d. h. ihre Resultirenden sind ebenfalls mit φ vertauschbar; aus $\varphi\psi = \psi\varphi$ und $\varphi\psi_1 = \psi_1\varphi$ folgt nämlich:

$$\varphi\psi\psi_1 = \psi\varphi\psi_1 = \psi\psi_1\varphi.$$

Die Gruppe enthält auch die Umkehrungen und die Potenzen ihrer Verwandtschaften (7). Sie wird durch jede ihrer Verwandtschaften ψ in sich selbst übergeführt; denn die Verwandtschaft $\psi^{-1}\psi_1\psi = \psi_1'$ ist zugleich mit ihren drei Componenten in der Gruppe enthalten.

Spiegelungen an normalen Ebenen sind vertauschbar; eine Schiebung oder Translation und eine Spiegelung sind nur dann vertauschbar, wenn die Schiebungsrichtung zu der spiegelnden Ebene oder Geraden parallel ist; zwei Schiebungen sind allemal vertauschbar. Die ganzen Potenzen einer Verwandtschaft φ und ihrer Umkehrung φ^{-1} stellen vertauschbare

Verwandtschaften dar; wegen $\varphi\varphi^{-1} = 1$ gelten für sie die algebraischen Rechnungsregeln:

$$\varphi^m \varphi^{\pm n} = \varphi^{m \pm n} = \varphi^{\pm n} \varphi^m.$$

Die Verwandtschaften $1, \varphi^{\pm 1}, \varphi^{\pm 2}, \varphi^{\pm 3}, \ldots$ bilden eine endliche oder unendliche Gruppe, jenachdem φ eine „cyklische" Verwandtschaft ist oder nicht. Im ersteren Falle enthält die Gruppe nur eine endliche Anzahl n verschiedener Verwandtschaften, und zwar ist φ^n die Identität, also $\varphi^n = 1$, $\varphi^{n+1} = \varphi$, $\varphi^{kn \pm l} = \varphi^{\pm l}$. Eine involutorische Verwandtschaft ω ist binär cyklisch, und jede binär cyklische Verwandtschaft ist involutorisch; denn aus $\omega = \omega^{-1}$ folgt $\omega^2 = 1$, und umgekehrt.

10. Ueber vertauschbare Homographien, Collineationen und Correlationen wird in meiner „Geometrie der Lage" a. a. O. Folgendes bewiesen. Zwei Homographien in einer Punktreihe sind vertauschbar, wenn sie dieselben zwei reellen Doppelpunkte haben. Zwei ebene oder räumliche Collineationen φ, ψ sind vertauschbar, wenn sie die Eckpunkte eines Dreiecks ABC resp. eines Tetraeders $ABCD$ zu gemeinsamen Doppelpunkten haben. Die beiden Punktgruppen $PP_1P_2\ldots$ und $QQ_1Q_2\ldots$, in welche zwei beliebige Punkte P und Q durch die Collineationen $1, \varphi, \varphi^2, \ldots$ übergehen, sind collinear, und eine der mit φ vertauschbaren Collineationen ψ wird dargestellt durch:

$$ABCPP_1P_2 \cdots \barwedge ABCQQ_1Q_2 \cdots$$

resp.

$$ABCDPP_1P_2 \cdots \barwedge ABCDQQ_1Q_2 \cdots.$$

Mit Correlationen ist eine Collineation i. A. nicht vertauschbar. — Wenn eine räumliche Correlation χ die vier Kanten eines reellen windschiefen Vierseits zu Doppelgeraden hat, so ist sie vertauschbar mit den ∞^2 Collineationen und Correlationen, welche dieselben vier Doppelgeraden haben und die Orte F^2 und Φ^2 incidenter homologer Punkte und Ebenen von χ in sich selbst resp. in einander transformiren (vgl. 6); insbesondere ist sie mit zwei Nullcorrelationen vertauschbar.

Nun können aber die vier Doppelgeraden einer räumlichen Correlation und die Doppelpunkte einer Collineation oder Homographie paarweise imaginär sein, auch können sie alle oder theilweise zusammenfallen. Die Fragen, mit welchen Correlationen, Collineationen und Homographien in diesen Fällen eine gegebene Correlation, Collineation oder Homographie vertauschbar ist, bleiben a. a. O. unerledigt.

§ 3.

Umkehrung geometrischer Verwandtschaften.

11. Als zwei der wichtigsten Aufgaben über geometrische Verwandtschaften habe ich a. a. O. die folgenden bezeichnet: Die Ver-

wandtschaften χ zu bestimmen, welche eine gegebene Verwandtschaft φ umkehren, d. h. in ihre Umkehrung φ^{-1} überführen; und die Verwandtschaften φ zu bestimmen, welche durch eine gegebene Verwandtschaft χ umgekehrt werden. Die zu bestimmenden Verwandtschaften genügen der Gleichung $\chi^{-1}\varphi\chi = \varphi^{-1}$ und deren Umformungen:
$\chi^{-1}\varphi^{-1}\chi = \varphi$, $\chi^{-1}\varphi\chi\varphi = 1$, $(\chi\varphi)^2 = \chi^2$, $(\varphi\chi)^2 = \chi^2$, $\chi\varphi\chi^{-1} = \varphi^{-1}$;
auch folgt aus jener Gleichung:

$$\chi^{-1}\varphi^n\chi = \varphi^{-n} \quad \text{(vgl. 7).}$$

Wenn also eine Verwandtschaft φ durch eine andere χ umgekehrt wird, so wird sie auch durch χ^{-1} umgekehrt; und mit ihr werden ihre Potenzen φ^n, die zu ihr inverse Verwandtschaft φ^{-1} und deren Potenzen durch χ und χ^{-1} umgekehrt. Aus je zwei der Verwandtschaften $\chi, \chi_1, \chi_2, \ldots$, welche φ umkehren, resultirt folglich eine mit φ vertauschbare Verwandtschaft $\chi\chi_1 = \psi$.

12. Ueberhaupt bilden die mit φ vertauschbaren Verwandtschaften ψ und die Verwandtschaften χ, welche φ umkehren, zusammen eine Gruppe. Aus $\psi\varphi = \varphi\psi$ und $\chi^{-1}\varphi\chi = \varphi^{-1}$ folgt nämlich, wenn $\psi = \chi\chi_1$ gesetzt wird:

$$\varphi = \psi^{-1}\varphi\psi = \chi_1^{-1}\chi^{-1}\varphi\chi\chi_1 = \chi_1^{-1}\varphi^{-1}\chi_1 \quad \text{oder} \quad \chi_1^{-1}\varphi^{-1}\chi_1 = \varphi.$$

Jede mit φ vertauschbare Verwandtschaft ψ ist sonach darstellbar als Resultirende von zwei der Verwandtschaften $\chi, \chi_1, \ldots$, welche φ und φ^{-1} umkehren, wenn solche existiren. Die eine χ dieser beiden Componenten kann unter jenen Verwandtschaften sogar beliebig angenommen werden; aus ihr und den übrigen Verwandtschaften, welche φ umkehren, resultiren alle mit φ vertauschbaren Verwandtschaften $\psi, \psi_1, \ldots$.

Kehrt eine Verwandtschaft χ zwei vertauschbare Verwandtschaften φ, ψ um, so kehrt sie auch deren Resultirende um. Denn aus:

$$\varphi\psi = \psi\varphi = \varrho, \quad \chi^{-1}\varphi\chi = \varphi^{-1} \quad \text{und} \quad \chi^{-1}\psi\chi = \psi^{-1}$$

folgt:

$$\chi^{-1}\varphi\psi\chi = \varphi^{-1}\psi^{-1} \quad \text{oder} \quad \chi^{-1}\varrho\chi = \varrho^{-1}.$$

13. Wenn die Verwandtschaft χ eine andere φ umkehrt, so transformirt sie jedes Elementepaar PP_1 von φ in ein Elementepaar $P'P_1'$ von φ^{-1} und folglich jedes Doppelelement von φ und φ^{-1} in ein anderes oder unter Umständen in sich selbst; aus dem Elementepaar PP' von χ aber ergiebt sich mittelst der Verwandtschaft φ ein anderes Elementepaar P_1P_1' von χ, indem P durch φ in P_1, und P' durch φ^{-1} in P_1' übergeht.

Ist χ nebst einem Elementepaare PP_1 von φ gegeben, und verwandelt sich dieses Paar durch die Verwandtschaften $\chi, \chi^2, \chi^3, \ldots$ in die resp. Elementepaare:

$$P'P_1', \; P''P_1'', \; P'''P_1''', \ldots,$$

so gehen die Elemente $PP_1'P''P_1'''\ldots$ durch φ in resp. $P_1P'P_1''P'''\ldots$ über. Die Verwandtschaft φ wird also dargestellt durch:

$$PP_1'P''P_1'''\ldots \curlywedge P_1P'P_1''P'''\ldots,$$

wenn diese Elemente zu ihrer Bestimmung ausreichen; sie ist in diesem Falle durch ihr Elementepaar PP_1 und die sie umkehrende Verwandtschaft χ bestimmt.

Ist φ nebst einem Elementepaare PP' von χ gegeben, und wird das erste Element P dieses Paares durch die Verwandtschaften $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \ldots$ in $P_1, P_2, P_3, \ldots$ transformirt, das zweite Element P' aber durch $\varphi^{-1}, \varphi^{-2}, \varphi^{-3}, \ldots$ in resp. $P'_{-1}, P'_{-2}, P'_{-3}, \ldots$, so gehen die Elemente $PP_1P_2P_3\ldots$ durch χ in resp. $P'P'_{-1}P'_{-2}P'_{-3}\ldots$ über. Falls diese Elemente zu der Bestimmung von χ ausreichen, so wird die Verwandtschaft χ dargestellt durch:

$$PP_1P_2P_3\cdots \curlywedge P'P'_{-1}P'_{-2}P'_{-3}\cdots;$$

sie kehrt die Verwandtschaft φ um und ist durch φ und das Elementepaar PP' bestimmt.

14. Eine nicht specielle räumliche oder ebene Collineation (Correlation) φ ist hiernach durch höchstens ∞^3 resp. ∞^2 Collineationen und Correlationen χ umkehrbar, eine nicht involutorische Homographie aber durch höchstens ∞^1 Homographien. Denn der Raum resp. die Ebene enthält nur ∞^3 resp. ∞^2 Elemente P', in welche ein gegebener Punkt P durch eine Collineation oder Correlation χ transformirt werden kann; aus einem Elementepaare PP' von χ aber ergeben sich (13) mit Hülfe der Verwandtschaft φ unendlich viele andere Elementepaare von χ, von denen aber bekanntlich eine kleine Anzahl zur Bestimmung von χ ausreicht. — Ebenso wird bewiesen, dass eine nicht specielle räumliche oder ebene Collineation (Correlation) mit höchstens ∞^3 resp. ∞^2 Collineationen und Correlationen vertauschbar ist, und eine nicht involutorische Homographie mit höchstens ∞^1 Homographien.

15. Ueber die Collineationen und Correlationen, welche eine gegebene Collineation oder Correlation umkehren, habe ich a. a. O. Folgendes bewiesen. Eine räumliche Collineation φ mit reellem Haupttetraeder (6) wird umgekehrt durch die ∞^3 polaren Correlationen, welche das Tetraeder zum Poltetraeder haben. Die ∞^3 mit φ vertauschbaren Collineationen (10) bilden mit diesen polaren Correlationen zusammen eine Gruppe. Analoges gilt von einer ebenen Collineation mit drei reellen Doppelpunkten. Durch Collineationen kann eine Collineation i. A. nicht umgekehrt werden. — Eine räumliche Correlation χ mit reellem Hauptvierseit (vgl. 6) wird umgekehrt durch ∞^2 polare Correlationen χ_1 und durch ∞^2 geschaart involutorische Collineationen φ. Dieselben vertauschen die Gegenkanten des Hauptvierseits mit einander; die beiden Kernflächen F^2 und Φ^2 der Correlation χ (6) gehen durch

die ∞^2 Correlationen χ_1 in einander und durch die ∞^2 Collineationen φ in sich selbst über. Die ∞^2 mit χ vertauschbaren Collineationen und Correlationen (10) bilden mit diesen ∞^2 involutorischen Collineationen φ und Correlationen χ_1 zusammen eine Gruppe. Analoges gilt von den ∞^1 involutorischen Collineationen und Correlationen, welche eine ebene Correlation χ' umkehren; doch wird deren Existenz a. a. O. nur für den einen Hauptfall nachgewiesen, dass die beiden Kernkegelschnitte, welche die Orte incidenter homologer Elemente von χ' sind, in zwei *reellen* Punkten sich berühren.

16. Nur die involutorischen Verwandtschaften ω sind mit den sie umkehrenden Verwandtschaften χ vertauschbar; denn aus:

$$\chi^{-1}\omega\chi = \omega^{-1} \quad \text{und} \quad \omega\chi = \chi\omega$$

folgt $\omega = \omega^{-1}$.

Die Resultirende von zwei involutorischen Verwandtschaften ω, ω_1 wird durch jede derselben umgekehrt; aus $\varphi = \omega\omega_1$ und $\omega_1^2 = \omega^2 = 1$ folgt nämlich:

$$\omega\varphi = \omega_1 \quad \text{und} \quad (\omega\varphi)^2 = \omega^2 \quad \text{oder} \quad \omega^{-1}\varphi\omega = \varphi^{-1},$$

ebenso aber $(\varphi\omega_1)^2 = \omega_1^2$ oder $\omega_1^{-1}\varphi\omega_1 = \varphi^{-1}$. Wird eine Verwandtschaft φ durch eine involutorische Verwandtschaft ω umgekehrt, so resultirt sie aus ω und einer anderen involutorischen Verwandtschaft ω_1; denn aus:

$$(\omega\varphi)^2 = \omega^2 = 1 \quad \text{und} \quad \varphi = \omega\omega_1 \quad \text{oder} \quad \omega\varphi = \omega_1$$

folgt $\omega_1^2 = 1$.

Diese Sätze bringen die Umkehrungsprobleme in Verbindung mit der Lehre von den harmonischen Verwandtschaften, denen wir zunächst uns zuwenden.

§ 4.

Harmonische Verwandtschaften angewendet auf die Umkehrungsprobleme.

17. Zwei Verwandtschaften φ, ϑ heissen harmonisch, wenn die eine und damit jede von ihnen aus der anderen und einer involutorischen Verwandtschaft ω resultirt*), wenn also:

$$\varphi = \vartheta\omega = \vartheta\omega^{-1} \quad \text{und folglich} \quad \vartheta = \varphi\omega = \varphi\omega^{-1}$$

ist. Beispielsweise resultirt aus einer Collineation oder Correlation φ und einer Spiegelung eine mit φ harmonische Collineation resp. Correlation. Mit einer Homographie in einem Elementargebilde sind ∞^2 Homographien harmonisch, weil in dem Gebilde ∞^2 Involutionen

*) Vgl. Stephanos in diesen Annalen 22, S. 320, welchem Segre im Journal für d. r. u. a. Math. 100, S. 318 den Begriff der „harmonischen Homographien" entlehnte. Vgl. auch die Abhandlungen von Hermann Wiener in den Berichten der Sächs. Gesellsch. d. Wiss. 1890 S. 261, 1891 S. 424 und 644.

existiren. Mit einer ebenen oder räumlichen Collineation (Correlation) sind ∞^4 resp. ∞^8 andere Collineationen (bezw. Correlationen) und ∞^5 resp. ∞^9 Correlationen (bezw. Collineationen) harmonisch; denn in der Ebene resp. im Raume giebt es ∞^4 resp. ∞^6 involutorische Collineationen und ∞^5 resp. ∞^9 polare Correlationen.

18. Die beiden Verwandtschaften φ, ϑ sind harmonisch, wenn aus der einen und der Umkehrung der anderen eine involutorische Verwandtschaft resultirt, wenn also eine und damit jede der Verwandtschaften:

$$\vartheta^{-1}\varphi, \quad \varphi^{-1}\vartheta, \quad \vartheta\varphi^{-1}, \quad \varphi\vartheta^{-1}$$

involutorisch ist; zugleich mit φ und ϑ sind demnach ihre Umkehrungen φ^{-1} und ϑ^{-1} harmonisch. Ist nämlich $\vartheta^{-1}\varphi$ eine involutorische Verwandtschaft ω, so wird:

$$\vartheta^{-1}\varphi = \varphi^{-1}\vartheta = \omega \quad \text{und} \quad \varphi = \vartheta\omega = \vartheta\omega^{-1};$$

zugleich wird $\vartheta^{-1}\varphi\vartheta^{-1}\varphi = \omega^2 = 1$, und folglich ist auch $\varphi\vartheta^{-1} = \vartheta\varphi^{-1}$ eine involutorische Verwandtschaft.

Die Gleichung $\vartheta^{-1}\varphi = \varphi^{-1}\vartheta$ lässt sich, wenn $\vartheta = \vartheta^{-1}$ ist, umformen in $\vartheta^{-1}\varphi\vartheta = \varphi^{-1}$. Wenn also von zwei harmonischen Verwandtschaften $\varphi\vartheta$ die eine ϑ involutorisch ist, so kehrt sie die andere um (Segre). Zugleich wird diese andere Verwandtschaft $\varphi = \vartheta\omega$ die Resultirende von ϑ und einer zweiten involutorischen Verwandtschaft ω.

Zwei Verwandtschaften haben zu einander eine invariante Beziehung, wenn sie harmonisch oder vertauschbar sind, oder wenn die eine durch die andere umgekehrt wird (8).

19. Zwei Homographien φ, ϑ in einer Punktreihe sind harmonisch, wenn zwei beliebige Punkte P, Q der Reihe durch φ in die resp. Punkte P_1, Q_1, dagegen durch ϑ in die resp. Punkte Q_1, P_1 übergehen (Segre). Denn die Homographie $\varphi^{-1}\vartheta$ ist involutorisch, weil sie die Punkte P_1, Q_1 mit einander vertauscht. Ist die Homographie φ gegeben, von ϑ aber nur ein Punktepaar PQ_1 bekannt, so bilden die beiden Punkte Q, P_1, in welche Q_1 und P durch resp. φ^{-1} und φ übergehen, ein zweites Paar homologer Punkte von ϑ. Eine mit φ harmonische Homographie ϑ ist demnach i. A. eindeutig bestimmt, wenn von ihr zwei Paare homologer Punkte PQ_1 und RS_1 beliebig in der Punktreihe angenommen werden.

20. Mit der Homographie:

$$ABC\cdots PQ\cdots \barwedge A_1B_1C_1\cdots P_1Q_1\cdots \text{ oder } \varphi$$

sind harmonisch die ∞^1 Involutionen oder involutorischen Homographien:

$$AB_1 . BA_1, \; AC_1 . CA_1, \; BC_1 . CB_1, \ldots, PQ_1 . QP_1, \ldots;$$

denn die Punkte P, Q gehen durch φ über in P_1, Q_1, dagegen durch die Involution

$$PQ_1 \,.\, QP_1 \quad \text{oder} \quad PQQ_1 \barwedge Q_1P_1P$$

in die resp. Punkte Q_1, P_1 (vgl. 19). Die Homographie φ wird durch jede dieser ∞^1 Involutionen umgekehrt (18); aus den Involutionen resultiren folglich ∞^1 mit φ vertauschbare Homographien ψ (vgl. 11, 14). Jede dieser Homographien ψ resultirt aus zwei jener Involutionen, von denen die eine sonst beliebig ist (12); sie wird folglich ebenso wie φ durch jede der ∞^1 Involutionen umgekehrt (16). Die ∞^1 Homographien ψ sind deshalb ebensowohl mit einander wie mit φ vertauschbar. Sie bilden mit einander und auch mit den sie umkehrenden Involutionen eine Gruppe.

Hat die Homographie φ zwei reelle Doppelpunkte M, N, so ist sie darstellbar durch:

$$MNPQ \barwedge MNP_1Q_1;$$

hieraus aber folgt bekanntlich $MNPQ \barwedge NMQ_1P_1$, und $MN.PQ_1.QP_1$ ist demnach eine Involution. Die Doppelpunkte M, N von φ bilden also ein gemeinsames Punktepaar der ∞^1 mit φ harmonischen Involutionen (Segre). Eine Punktinvolution ω ist, wie man hiernach leicht beweist, mit den ∞^2 Homographien harmonisch, deren Doppelpunkte je ein Punktepaar von ω bilden; sie kehrt alle diese Homographien um.

Die obigen Sätze lassen sich ohne Weiteres auf alle Elementargebilde ausdehnen und werden hernach insbesondere auf Regelschaaren angewendet werden.

21. Eine räumliche Collineation φ und eine Correlation ϑ sind harmonisch, wenn durch φ die Eckpunkte A, B, C, D und durch ϑ die ihnen gegenüber liegenden Flächen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eines Tetraeders in die resp. Eckpunkte A_1, B_1, C_1, D_1 eines anderen Tetraeders übergehen. Denn die Correlation $\varphi\vartheta^{-1} = \omega$ transformirt jeden Eckpunkt des Tetraeders $ABCD$ in die gegenüberliegende Fläche und ist deshalb bekanntlich eine polare, involutorische. Wenn die Tetraeder $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ perspective Lage haben, so wird auch ϑ eine polare Correlation*); die Collineation $\varphi = \vartheta\omega$ aber wird in diesem Falle von jeder der beiden involutorischen Correlationen ϑ, ω umgekehrt, weil sie deren Resultirende ist (16).

22. Wir nehmen an, die Collineation φ habe nicht unendlich viele Doppelelemente und sei insbesondere weder perspectiv noch geschaart. Dann lässt sich eine sie umkehrende polare Correlation ϑ so bestimmen, dass sie einer gegebenen Ebene α einen beliebigen Punkt A_1 als Pol

*) Vgl. von Staudt, Geometrie der Lage, S. 135 und Reye, Geometrie der Lage II, 3. Aufl., Seite 135, wo der analoge Satz über perspective Dreiecke bewiesen ist.

zuweist. Durch φ möge nämlich α in α_1, und durch φ^{-1} möge A_1 in A übergehen. Die durch φ collinearen Ebenen α, α_1 erzeugen dann durch ihre homologen Punkte i. A. eine Strahlencongruenz dritter Ordnung, nämlich die Axencongruenz eines cubischen Ebenenbüschels. Seien nun BB_1, CC_1 und DD_1 drei paar homologe Punkte von α und α_1, deren Verbindungslinien in einem Punkte der Geraden AA_1 sich schneiden; dann liegen die beiden Tetraeder $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ perspectiv und bestimmen (21) eine polare Correlation ϑ, welche die Collineation φ umkehrt. Weil der Pol A_1 der Ebene $\alpha = BCD$ dreifach unendlich viele Lagen annehmen kann, so ergiebt sich hieraus und aus früheren Sätzen (13, 14):

23. Eine räumliche Collineation φ, die weder perspectiv noch geschaart ist, noch unendlich viele Doppelpunkte hat, wird durch ∞^3 polare Correlationen ϑ umgekehrt, auch wenn sie keine oder nur zwei reelle Doppelpunkte hat. Wenn eine Ebene α durch die Collineationen $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \ldots$ übergeht in resp. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, ein beliebiger Punkt A_1 aber durch $\varphi^{-1}, \varphi^{-2}, \varphi^{-3}, \ldots$ in resp. $A, A_{-1}, A_{-2}, \ldots$, so transformirt (13) eine dieser polaren Correlationen die Ebenen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ in die resp. Punkte $A_1, A, A_{-1}, A_{-2}, \ldots$ und ist durch die Beziehung:

$$\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots \barwedge A_1 A A_{-1} A_{-2} \cdots$$

i. A. eindeutig bestimmt*). Hat die Collineation φ vier und nur vier reelle Doppelpunkte, so bilden diese ein gemeinsames Poltetraeder der ∞^3 polaren Correlationen ϑ, welche φ umkehren (15).

Die Collineation φ ist vertauschbar mit ∞^3 Collineationen ψ, welche aus den ∞^3 polaren Correlationen ϑ resultiren und mit ihnen eine Gruppe bilden (12). Diese ∞^3 Collineationen ψ werden ebenso wie φ durch jede der ∞^3 polaren Correlationen ϑ umgekehrt (16), weil sie aus je ∞^3 Paaren derselben resultiren (12); sie sind deshalb ebensowohl mit einander wie mit φ vertauschbar. Wird ein beliebiges Punktepaar AA' durch die Collineation $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \ldots$ transformirt in die resp. Punktepaare $A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', \ldots$, so bestimmt die projective Beziehung:

$$AA_1A_2A_3 \cdots \barwedge A'A_1'A_2'A_3' \cdots$$

i. A. eine dieser ∞^3 mit φ vertauschbaren Collineationen ψ. Zwei beliebige Punkte A, A' gehen also i. A. durch die Collineation φ und deren Potenzen in zwei collineare Punktsysteme über, und zwar ist die Collineation dieser Systeme mit φ vertauschbar.

---

*) Diese projective Beziehung reicht zur Bestimmung der Correlation nur dann nicht aus, wenn die Collineation φ perspectiv oder geschaart oder planar ist, oder aber, wenn die Ebenen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ abwechselnd durch zwei Geraden gehen. Der letzte dieser Fälle tritt ein, wenn φ eine halbgeschaarte Collineation ist (vgl. 29).

§ 5.

Umkehrung specieller Collineationen.

24. Ueber die vorhin ausgeschlossenen Specialfälle der räumlichen Collineation sei Folgendes bemerkt.

Eine perspective Collineation oder „Homologie" mit dem Centrum S und der Homologieebene η ist vertauschbar mit den ∞^9 Collineationen, welche S und η zu Doppelelementen haben, und wird umgekehrt durch die ∞^9 Correlationen, welche S und η in einander transformiren. Denn jedes der ∞^6 Tetraeder, welche S zum Eckpunkte und η zur gegenüberliegenden Fläche haben, ist Haupttetraeder von ∞^3 jener Collineationen (10) und Poltetraeder von ∞^3 dieser Correlationen (15). Uebrigens sind nur ∞^6 dieser Correlationen polar; alle übrigen resultiren aus einer von ihnen und den ∞^9 mit der Homologie vertauschbaren Collineationen, von welchen ∞^4 involutorisch sind.

Eine geschaarte Collineation φ mit reellen Doppelpunktgeraden (Axen) u, u' ist vertauschbar mit den ∞^7 Collineationen und den ∞^7 Correlationen, welche die beiden windschiefen Geraden u, u' in sich selbst transformiren; sie wird umgekehrt durch die ∞^7 Collineationen und die ∞^7 Correlationen, welche u und u' mit einander vertauschen, insbesondere durch ∞^4 involutorische Collineationen und ∞^5 polare Correlationen. Denn jedes der ∞^4 Tetraeder, welche u und u' zu Gegenkanten haben, ist das Haupttetraeder von ∞^3 mit φ vertauschbaren Collineationen (10) und ein Poltetraeder von ∞^3 polaren Correlationen, welche φ umkehren (15); ausserdem wird φ umgekehrt durch ∞^4 involutorische Collineationen, welche u mit u' vertauschen (vgl. 20). Aus je einer dieser involutorischen Collineationen und polaren Correlationen und den ∞^7 mit φ vertauschbaren Collineationen resultiren die übrigen ∞^7 Collineationen und Correlationen, welche φ umkehren. Die ∞^7 mit φ vertauschbaren Collineationen und Correlationen bilden mit ihnen und ebenso mit einander eine Gruppe.

Wenn eine Collineation die Punkte einer Geraden u zu Doppelpunkten hat, so hat sie zugleich eine Gerade v und deren Ebenen zu Doppelelementen*), auf v aber i. A. noch zwei Doppelpunkte K, L. Sie ist in diesem Falle mit ∞^5 Collineationen vertauschbar und wird durch ∞^5 Correlationen umgekehrt. Sind die Doppelpunkte K, L reell, so ist jedes der ∞^2 Tetraeder, welche K, L und irgend zwei Punkte der Geraden u zu Eckpunkten haben, das Haupttetraeder von ∞^3 mit φ vertauschbaren Collineationen und ein Poltetraeder von ∞^3 polaren Correlationen, welche φ umkehren. Aus einer dieser Corre-

*) Reye, Geometrie der Lage II, 3. Aufl., S. 72.

lationen und den ∞^5 mit φ vertauschbaren Collineationen aber resultiren die übrigen ∞^5 Correlationen, welche φ umkehren; sie vertauschen die Punkte K, L mit den resp. Ebenen Lu, Ku.

25. Für ebene Collineationen gelten analoge Sätze wie für die räumlichen. Eine nicht perspective ebene Collineation ist mit ∞^2 Collineationen vertauschbar und wird durch ∞^2 polare ebene Correlationen umgekehrt, die ähnlich wie oben (23) bestimmt werden. Jene ∞^2 Collineationen sind auch mit einander vertauschbar und bilden sowohl für sich als auch mit den ∞^2 polaren Correlationen eine Gruppe. Eine perspective Collineation oder Homologie in der Ebene ist mit ∞^4 Collineationen vertauschbar und wird durch ∞^4 ebene Correlationen umgekehrt, von denen aber nur ∞^3 polar sind.

26. Ausser den geschaarten giebt es noch andere räumliche Collineationen, die nicht nur durch Correlationen sondern auch durch Collineationen umkehrbar und sowohl mit Correlationen als auch mit Collineationen vertauschbar sind. Wenn eine Collineation φ eine allgemeine Fläche F^2 zweiter Ordnung in sich selbst transformirt, so ist sie mit ∞^3 Correlationen χ vertauschbar und wird durch ∞^3 Collineationen φ' umgekehrt. Sie führt nämlich zugleich mit F^2 die polare Correlation χ' in sich selbst über, welche F^2 zur Kernfläche hat, ist also mit χ' vertauschbar (9). Aus χ' aber und den ∞^3 mit φ vertauschbaren Collineationeu ψ resultiren die ∞^3 mit φ vertauschbaren Correlationen χ, die übrigens mit den ψ und mit einander nicht vertauschbar sind. Und aus χ' und den ∞^3 polaren Correlationen ϑ, welche φ umkehren (23), resultiren die ∞^3 Collineationen φ', welche φ umkehren. Die Collineation φ transformirt ausser F^2 noch unendlich viele andere Flächen zweiter Ordnung und zweiter Classe in sich selbst; in diese Flächen wird F^2 durch die ∞^3 mit φ vertauschbaren und ebenso durch die φ umkehrenden Collineationen und Correlationen verwandelt.

27. Die Collineation φ heisst eine [eigentliche] Hermite'sche, wenn sie jede der beiden Regelschaaren eines einschaligen Hyperboloides oder hyperbolischen Paraboloides in sich selbst transformirt. Sie hat dann in jeder dieser Regelschaaren zwei reelle oder imaginäre Doppelstrahlen, welche Gegenkanten ihres Haupttetraeders sind. Sie ist bestimmt*) durch die beiden in ihr enthaltenen Homographien:

$$abc \ldots \barwedge a_1 b_1 c_1 \ldots \quad \text{und} \quad pqr \ldots \barwedge p_1 q_1 r_1 \ldots,$$

welche je eine der beiden Regelschaaren in sich selbst transformiren, und wird dargestellt durch:

---

*) von Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, S. 6; vgl. Reye, Geometrie der Lage II, 3. Aufl., S. 30.

$$abcpqr \barwedge a_1b_1c_1p_1q_1r_1.$$

Die neun Punkte ap, aq, ..., cr gehen durch sie über in die resp. Punkte a_1p_1, a_1q_1, ..., c_1r_1.

Die Hermite'sche Collineation φ wird zugleich mit jenen beiden Homographien umgekehrt durch ∞^2 involutorische Collineationen und durch ∞^2 polare Correlationen, welche die beiden Regelschaaren in sich selbst und ihre Doppelstrahlen in einander transformiren (20), und von denen je eine dargestellt wird durch:

$$abb_1pqq_1 \barwedge b_1a_1aq_1p_1p.$$

Und weil die Collineation φ vertauschbar ist mit ∞^3 Collineationen ψ und Correlationen χ (26), welche diese vier Doppelstrahlen in sich selbst transformiren, so wird sie umgekehrt durch die ∞^3 Collineationen φ' und polaren Correlationen ϑ, welche die reellen oder imaginären Doppelstrahlen von jeder der beiden Regelschaaren mit einander vertauschen. Sie verwandelt die ∞^1 Flächen zweiter Ordnung in sich selbst, welche durch diese vier Doppelstrahlen gehen*).

Wenn eine Collineation φ eine cubische Raumcurve in sich selbst transformirt, so ist sie eine Hermite'sche. Die Raumcurve enthält nämlich i. A. zwei Doppelpunkte von φ und liegt mit deren Tangenten auf einer Fläche zweiter Ordnung, deren Regelschaaren durch φ in sich selbst übergehen. Diese Hermite'sche Collineation φ transformirt ∞^2 cubische Raumcurven in sich selbst**), welche die beiden Doppelpunkte und deren Tangenten und Schmiegungsebenen mit einander gemein haben und durch die ∞^3 mit φ vertauschbaren Collineationen und Correlationen in einander übergehen.

28. Zu den Hermite'schen Collineationen gehören die geschaarten; denn eine geschaarte Collineation hat ∞^2 Doppelstrahlen und transformirt ∞^3 von ihnen gebildete Regelschaaren und deren ∞^3 Leitschaaren in sich selbst. Eine geschaart involutorische Collineation ω ist völlig bestimmt durch ihre beiden windschiefen Involutionsaxen u, u', wenn diese reell sind; denn sie vertauscht je zwei durch u und u' harmonisch getrennte Punkte, Ebenen oder Strahlen mit einander. Sie wird folglich in sich selbst übergeführt durch die ∞^7 Collineationen und Correlationen, welche die Involutionsaxen u, u' theils in sich selbst, theils in einander transformiren. Diese ∞^7 Collineationen und Correlationen sind daher mit der geschaart involutorischen Collineation ω vertauschbar (9); mit einander sind sie i. A. nicht vertauschbar. Wenn eine Collineation die beiden Geraden u, u' in sich selbst transformirt, so hat sie auf jeder von ihnen zwei reelle oder imaginäre Doppelpunkte

*) Vgl. Rosanes im Journal für d. r. u. a. Math. 80, S. 67; Voss in den Math. Annalen 13, S. 353; Sturm in den Math. Annalen 26, S. 470.

**) Das bewies schon Herr Sturm in diesen Annalen 26, S. 490.

mit ω gemein; vertauscht sie dagegen u mit u', so hat sie keine Doppelpunkte mit ω gemein; ist aber dennoch mit dieser involutorischen Collineation vertauschbar.

29. Wenn eine Collineation φ zwei windschiefe Gerade u, u' mit einander vertauscht, d. h. jede von ihnen in die andere transformirt, so vertauscht sie die ∞^2 Strahlen einer linearen Congruenz paarweise mit einander. Die Punktreihe u nämlich wird durch die Collineation φ und ihre Umkehrung φ^{-1} in zwei auf u' liegende projective Punktreihen verwandelt, und diese haben zwei reelle oder imaginäre Punkte A', B' entsprechend gemein, in welche gewisse zwei Punkte A, B von u durch φ und zugleich durch φ^{-1} übergehen. Die Punkte von jeder der beiden Geraden AA' und BB' werden folglich durch φ paarweise mit einander vertauscht, mit ihnen zugleich aber die ∞^2 Geraden, welche AA' und BB' schneiden. Da ein beliebiger Punkt P auf einem dieser Strahlen liegt, so geht er durch φ und φ^{-1} in zwei Punkte des zugeordneten Strahles über. Die lineare Congruenz dieser paarweise einander zugeordneten Strahlen ist hiernach leicht zu construiren, auch wenn ihre Axen AA' und BB' imaginär sind. Sie existirt auch in diesem Falle, weil die Geraden u, u' durch die mit φ vertauschbaren Collineationen und durch die Collineationen, welche φ umkehren, in je zwei Gerade übergehen, die gleichfalls durch φ mit einander vertauscht werden.

Die Collineation φ^2 ist eine geschaarte; die Collineation φ möge deshalb „halbgeschaart" heissen. Die zwei paar Doppelpunkte der Punktinvolutionen auf AA' und BB' bilden das Hauptetraeder von φ; sie trennen, wenn sie reell sind, je zwei Gerade harmonisch, welche wie u und u' durch φ mit einander vertauscht werden.

30. Eine halbgeschaarte Collineation φ ist vertauschbar mit den ∞^2 geschaart involutorischen Collineationen ω, deren Involutionsaxen durch φ mit einander vertauscht werden (28). Jede dieser Collineationen ω vertauscht die vier Doppelpunkte von φ paarweise mit einander (29). Aus je zweien der Collineationen ω resultiren die ∞^3 mit φ vertauschbaren Collineationen ψ, welche mit φ die vier Doppelpunkte gemein haben; die Resultirenden aus diesen ∞^3 Collineationen ψ und einer beliebigen der Collineationen ω aber sind ∞^3 mit φ vertauschbare Collineationen ψ', welche wie ω die Doppelpunkte von φ paarweise mit einander vertauschen. Die Collineationen ψ bilden eine Gruppe für sich und eine umfassendere Gruppe mit den Collineationen ψ'. Sie sind mit einander vertauschbar (23); dagegen sind die Collineationen ψ' weder mit jenen ψ noch mit einander vertauschbar.

31. Die halbgeschaarte Collineation φ ist, wie leicht zu beweisen, eine Hermite'sche, wenn ihre vier Doppelpunkte alle reell oder alle imaginär sind; sie wird (27) in diesen beiden Hauptfällen durch ∞^3

Collineationen und Correlationen umgekehrt. Für den Fall reeller Doppelpunkte werde φ dargestellt durch:

$$AA'BB'P \nearrow A'AB'BP_1,$$

und es seien MM' und NN' die zwei paar Doppelpunkte von φ, welche A von A' resp. B von B' harmonisch trennen. Dann liegen die Kanten der beiden windschiefen Vierecke $MM'NN'$ und $MM'N'N$ auf zwei durch die Punkte P und P_1 gehenden Flächen zweiter Ordnung, deren Regelschaaren durch φ in sich selbst übergehen. Die halbgeschaarte Collineation φ wird demnach (27) umgekehrt durch die ∞^3 hälbgeschaarten Collineationen und polaren Correlationen, welche von je einem der beiden Vierecke die Gegenkanten mit einander vertauschen. Sie ist, wie hieraus folgt, vertauschbar mit den ∞^3 Correlationen und Collineationen, welche die vier Kanten von je einem der beiden Vierecke zu Doppelstrahlen haben, sowie mit den ∞^3 halbgeschaarten Collineationen ψ', welche M mit M' und N mit N' vertauschen (vgl. 30). In der Gruppe dieser mit φ vertauschbaren und jener φ umkehrenden Collineationen und Correlationen sind eine Anzahl von Untergruppen leicht zu unterscheiden.

§ 6.

Umkehrung räumlicher Correlationen.

32. Wir erörtern in Kürze die Frage nach den Collineationen und Correlationen, welche eine räumliche *Correlation* χ umkehren oder aber mit ihr vertauschbar sind. Die ∞^1 Flächen zweiter Ordnung und zweiter Classe, welche durch die vier reellen oder imaginären Hauptstrahlen von χ gehen, werden durch χ in einander transformirt, und zwar paarweise involutorisch, weil die Correlation zwei von ihnen, nämlich ihre beiden Kernflächen F^2 und Φ^2, mit einander vertauscht (6). Die ∞^1 Flächen bilden also einen involutorischen Flächenbüschel. Die beiden Doppelflächen dieses Büschels gehen durch χ in sich selbst über*), und jede von ihnen ist folglich die Kernfläche einer mit χ vertauschbaren polaren Correlation. Wir beschränken uns auf den Hauptfall, in welchem wenigstens eine dieser beiden Flächen eine Regelfläche R^2 ist. Weil die Doppelstrahlen von χ auf R^2 liegen und ein windschiefes Hauptvierseit bilden, so wird jede der beiden Regelschaaren von R^2 durch die Correlation χ in sich selbst transformirt, und die Collineation χ^2 ist eine Hermite'sche.

33. Die Correlation χ ist bestimmt durch die beiden in ihr enthaltenen Homographien, welche je eine der beiden Regelschaaren der

*) Voss in den Math. Annalen 13, S. 370.

Fläche R^2 in sich selbst verwandeln*). Die Doppelstrahlen dieser Homographien bilden die zwei paar Gegenkanten des Hauptvierseits von χ, können übrigens paarweise imaginär sein oder zusammenfallen. Die Correlation χ wird zugleich mit den beiden Homographien umgekehrt durch ∞^2 involutorische Collineationen und polare Correlationen, welche die beiden Regelschaaren in sich selbst transformiren und die Doppelstrahlen paarweise mit einander vertauschen (vgl. 27). Auch wenn die vier Doppelstrahlen paarweise imaginär sind oder zusammenfallen, existiren diese ∞^2 Collineationen und Correlationen. Aus ihnen resultiren ∞^2 mit χ vertauschbare Collineationen und Correlationen; diese aber werden durch dieselben ∞^2 involutorischen Collineationen und Correlationen umgekehrt wie χ, weil sie aus je ∞^2 Paaren derselben resultiren (12, 16), und sie sind deshalb ebensowohl mit einander wie mit χ vertauschbar. Sie haben mit χ die vier Doppelstrahlen gemein und bilden sowohl mit einander als auch mit jenen, welche χ umkehren, eine Gruppe. Die früheren Sätze (10 und 15) sind hiedurch vervollständigt und verallgemeinert.

§ 7.

Resultirende involutorischer Collineationen und Correlationen.

34. Wir wenden uns jetzt zu der noch kaum berührten Frage nach den Verwandtschaften, welche durch eine gegebene Verwandtschaft umgekehrt werden.

Eine involutorische Verwandtschaft kehrt nur die Verwandtschaften um, welche aus ihr und je einer anderen involutorischen Verwandtschaft resultiren (16). Eine Punktinvolution kehrt demgemäss ∞^2 Homographien um, und zwar alle die, deren Doppelpunkte je ein Punktepaar der Involution bilden (20). Durch eine involutorische räumliche Collineation (oder Correlation) aber werden die ∞^8 Collineationen und die ∞^9 Correlationen (bezw. die ∞^8 Correlationen und die ∞^9 Collineationen) umgekehrt, welche aus ihr und je einer der ∞^8 involutorischen Collineationen und der ∞^9 involutorischen Correlationen resultiren (vgl. 17). Um sie näher zu bestimmen, brauchen wir nur die Resultirenden von je zwei involutorischen Collineationen und Correlationen zu untersuchen.

35. Zwei polare Correlationen χ, χ_1 haben bekanntlich i. A. ein einziges Poltetraeder gemein, dessen Gegenelemente sie mit einander vertauschen. Sie sind bestimmt durch das Poltetraeder und durch die beiden Punkte P, P_1, in welche sie eine gegebene Ebene π trans-

*) von Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, S. 6; vgl. Reye, Geometrie der Lage II, 3. Aufl., S. 30.

formiren. Aus ihnen resultirt die Collineation $\chi\chi_1$, welche das Poltetraeder zum Haupttetraeder hat und P in P_1 verwandelt; diese nicht specielle Collineation aber wird durch jede der beiden polaren Correlationen umgekehrt. Eine polare Correlation kehrt demnach die ∞^9 Collineationen um, welche je eines ihrer ∞^6 Poltetraeder zum Haupttetraeder haben (vgl. 15).

36. Eine polare Correlation χ wird durch eine geschaart involutorische Collineation φ in eine andere polare Correlation übergeführt, welche mit ihr i. A. ein einziges Poltetraeder gemein hat. Dieses Tetraeder wird durch φ in sich selbst transformirt, seine Eckpunkte bilden zwei Punktepaare AA' und BB' von φ und liegen auf zwei Doppelstrahlen der involutorischen Collineation; seine übrigen zwei paar Gegenkanten werden durch φ und ebenso durch χ mit einander vertauscht und bilden daher das Hauptvierseit $ABA'B'$ der Correlation $\varphi\chi$. Diese nicht specielle Correlation wird sowohl durch φ als auch durch χ umgekehrt (34). Die ∞^3 Correlationen, welche $ABA'B'$ zum Hauptvierseit haben, resultiren alle aus der involutorischen Collineation φ und den ∞^3 polaren Correlationen, welche die Gegenkanten von $ABA'B'$ mit einander vertauschen.

Eine geschaart involutorische Collineation φ kehrt demnach die ∞^9 Correlationen um, deren Hauptvierseite je zwei Punktepaare von φ zu Gegenpunkten haben. Eine polare Correlation χ aber kehrt die ∞^8 Correlationen um, deren Hauptvierseite in je einem der ∞^6 Poltetraeder von χ enthalten sind, und deren Kernflächen durch χ in einander übergehen (15)*).

37. Alle noch übrigen Producte von je zwei involutorischen Collineationen und Correlationen stellen specielle Collineationen oder Correlationen dar, wie wir gleich nachweisen werden.

Aus einer polaren Correlation χ und einer centrisch involutorischen Collineation φ' resultirt eine specielle Correlation $\chi\varphi'$, welche die Ebenen einer gewissen Geraden g mit den Punkten einer anderen Geraden g_1 ebenso, wie die Correlation χ, involutorisch vertauscht. Die beiden Geraden g, g_1 sind reciproke Polaren in Bezug auf χ, und g geht durch das Centrum, g_1 aber liegt in der Involutionsebene der Collineation φ'. Eine centrisch involutorische Collineation kehrt ∞^9, eine polare Correlation aber ∞^6 derartige specielle Correlationen um.

38. Aus einer polaren Correlation χ und einer Nullcorrelation χ' resultirt eine halbgeschaarte Collineation $\chi\chi'$, sodass $(\chi\chi')^2$ eine geschaarte Collineation ist. Denn der lineare Complex der Doppelstrahlen

---

*) In meiner „Geometrie der Lage" III, S. 224, Nr. 120 wurde diese letztere Bedingung übersehen, und irrthümlich angegeben, dass eine polare Correlation ∞^9 (statt ∞^8) andere Correlationen umkehre.

von χ' wird durch χ in einen anderen linearen Complex transformirt, und die ∞^2 gemeinsamen Strahlen dieser beiden Complexe werden durch χ und ebenso durch $\chi\chi'$ paarweise mit einander vertauscht. Die beiden Axen der linearen Congruenz dieser Strahlen sind reciproke Polaren bezüglich beider Correlationen und die Träger zweier Punktinvolutionen der Collineation $\chi\chi'$. Sie schneiden die Kernfläche der polaren Correlation χ in den Gegenpunkten eines Vierseits, dessen Kanten vier gemeinsame Doppelstrahlen von χ, χ' und $\chi\chi'$ sind. — Eine Nullcorrelation kehrt ∞^9, eine polare Correlation kehrt ∞^5 halbgeschaarte Collineation um.

39. Aus zwei geschaart involutorischen Collineationen φ, φ_1 resultirt eine [Hermite'sche] Collineation $\varphi\varphi_1$, welche ∞^1 Flächen zweiter Ordnung in sich selbst transformirt. Die zwei paar Involutionsaxen von φ und φ_1 sind nämlich zwei paar reciproke Polaren in Bezug auf ∞^1 Flächen zweiter Ordnung*), die einen Büschel bilden. Eine beliebige dieser Flächen aber wird durch jede der Collineationen φ, φ_1 und folglich auch durch deren Resultirende $\varphi\varphi_1$ in sich selbst transformirt; und wenn sie eine Regelfläche ist, so gehen ihre beiden Regelschaaren durch φ und ebenso durch φ_1 in einander, durch $\varphi\varphi_1$ also in sich selbst über. Will man den Beweis auch für den Fall imaginärer Axen führen, so ist leicht zu zeigen, dass jede der beiden involutorischen Collineationen ∞^5 Flächen zweiter Ordnung in sich selbst transformirt, die eine lineare Mannigfaltigkeit bilden. Diese beiden Mannigfaltigkeiten haben einen Flächenbüschel gemein, weil sie fünffach unendlich und in der neunfach unendlichen linearen Mannigfaltigkeit aller Flächen zweiter Ordnung enthalten sind.

Eine geschaart involutorische Collineation φ kehrt hiernach ∞^8 Hermite'sche Collineationen um, deren Doppelpunkte paarweise durch φ mit einander vertauscht werden (vgl. 27).

40. Aus einer geschaart involutorischen Collineation φ und einer centrisch involutorischen φ' resultirt eine specielle Collineation $\varphi\varphi'$, welche die Punkte einer Geraden g und die Ebenen einer Geraden g_1 involutorisch paart. Die Geraden g, g_1 sind die gemeinsamen Doppelstrahlen von φ und φ', und zwar liegt g in der Involutionsebene von φ', während g_1 durch das Involutionscentrum von φ' geht. — Eine centrisch involutorische Collineation kehrt ∞^8, eine geschaart involutorische aber ∞^6 solche specielle Collineationen um.

Aus einer geschaart involutorischen Collineation φ und einer Nullcorrelation χ' resultirt eine specielle Correlation $\varphi\chi'$, welche nicht bloss vier sondern ∞^1 Doppelstrahlen hat. Denn die gemeinsamen Doppelstrahlen von φ und χ' sind zugleich solche von $\varphi\chi'$ und bilden

*) Vgl. meine Geometrie der Lage, 3. Aufl., II, S. 274.

eine Regelschaar. Die Correlation $\varphi\chi'$ hat ausser ihnen noch zwei Doppelstrahlen, welche Leitstrahlen der Regelschaar sind und durch φ und χ' in einander übergehen. Die Collineation $(\varphi\chi')^2$ ist eine geschaarte. — Eine Nullcorrelation kehrt ∞^8, eine geschaart involutorische Collineation kehrt ∞^5 solche specielle Correlationen um.

41. Aus zwei centrisch involutorischen Collineationen φ', φ_1' resultirt eine specielle Collineation $\varphi'\varphi_1'$, welche alle Punkte einer Geraden u und alle Ebenen einer Geraden v zu Doppelelementen hat. In u schneiden sich die Involutionsebenen und auf v liegen die beiden Centren von φ' und φ_1'. Auf v liegen noch zwei reelle oder imaginäre Doppelpunkte von $\varphi'\varphi_1'$, welche ein gemeinsames Punktepaar von φ' und φ_1' bilden. — Eine centrisch involutorische Collineation kehrt ∞^6 solche specielle Collineationen um.

Aus einer centrisch involutorischen Collineation φ' und einer Nullcorrelation χ' resultirt eine sehr specielle Correlation, welche zwei Büschel von Doppelstrahlen hat. Der eine dieser Büschel liegt in der Involutionsebene von φ' und hat deren Nullpunkt in Bezug auf χ' zum Mittelpunkt; der andere hat das Centrum von φ' zum Mittelpunkte und liegt in dessen Nullebene. Beide Büschel bestehen aus gemeinsamen Doppelstrahlen von φ' und χ'. — Eine centrisch involutorische Collineation kehrt ∞^5, eine Nullcorrelation aber ∞^6 solche specielle Correlationen um.

Aus zwei Nullcorrelationen χ', χ_1' resultirt eine geschaarte Collineation $\chi'\chi_1'$; denn die ∞^2 gemeinsamen Doppelstrahlen von χ' und χ_1' sind zugleich solche von $\chi'\chi_1'$. Eine Nullcorrelation kehrt die ∞^5 geschaarten Collineationen um, deren Doppelpunktsgeraden sie mit einander vertauscht (vgl. 24).

§ 8.

Associrte Verwandtschaften.

42. Die Verwandtschaften φ, welche durch eine gegebene Verwandtschaft χ umgekehrt werden, lassen sich aus den Lösungen der symbolischen Gleichung $\psi^2 = \chi^2$ ohne Weiteres ableiten. Wird nämlich $\psi = \chi\varphi$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$(\chi\varphi)^2 = \chi^2 \quad \text{und folglich} \quad \chi^{-1}\varphi\chi = \varphi^{-1}.$$

Die Verwandtschaft $\chi^{-1}\psi = \varphi$ wird demnach durch χ umgekehrt; aus χ und jeder durch χ umkehrbaren Verwandtschaft φ aber resultirt eine Verwandtschaft $\chi\varphi = \psi$, welche der Gleichung $\psi^2 = \chi^2$ genügt.

Zwei Verwandtschaften ψ, χ nenne ich „associirt", wenn sie der Gleichung $\psi^2 = \chi^2$ genügen, wenn also ihre zweiten Potenzen eine und dieselbe Verwandtschaft darstellen. Wenn zwei Verwandtschaften mit einer dritten associirt sind, so sind sie auch mit einander associirt.

Die involutorischen Verwandtschaften sind mit der Identität und mit einander associirt.

Die mit χ associirten Verwandtschaften ψ sind mit der Verwandtschaft χ^2 vertauschbar; denn:

$$\text{aus } \psi^2 = \chi^2 \text{ folgt } \psi^3 = \psi\chi^2 = \chi^2\psi.$$

Die Gleichung $\psi^2 = \chi^2$ lässt sich umformen in:

$$\chi^{-1}\psi = \chi\psi^{-1} \text{ und } \psi\chi^{-1} = \psi^{-1}\chi;$$

die Seiten dieser beiden Gleichungen aber stellen zwei inverse Verwandtschaften φ und φ^{-1} dar, welche durch χ und ebenso durch ψ umgekehrt werden.

43. Zwei associirte Verwandtschaften sind nur dann vertauschbar, wenn sie harmonisch sind, wenn also aus der einen und der Umkehrung der anderen eine involutorische Verwandtschaft resultirt. Denn aus:

$$\chi^{-1}\psi = \chi\psi^{-1} \text{ und } \psi\chi = \chi\psi \text{ oder } \chi^{-1}\psi = \psi\chi^{-1}$$

folgt

$$\chi\psi^{-1} = \psi\chi^{-1} \text{ oder } (\chi\psi^{-1})^2 = 1.$$

Diese involutorische Verwandtschaft ist mit χ und ψ vertauschbar, weil aus

$$\chi^{-1}\psi = \chi\psi^{-1} = \psi\chi^{-1} = \omega$$

sich ergiebt:

$$\psi = \chi\omega = \omega\chi \text{ und } \chi = \psi\omega = \omega\psi.$$

Ist eine Verwandtschaft χ mit einer involutorischen Verwandtschaft ω vertauschbar, so ist sie mit $\psi = \chi\omega = \omega\chi$ harmonisch, associirt und vertauschbar; denn es ist:

$$(\psi\chi^{-1})^2 = \omega^2 = 1, \quad \psi^2 = \chi\omega^2\chi = \chi^2 \text{ und } \psi\chi = \chi\omega\chi = \chi\psi.$$

44. Zwei associirte Collineationen ψ, φ, deren zweite Potenzen $\psi^2 = \varphi^2$ eine nicht specielle Collineation darstellen, sind vertauschbar (23), weil sie beide mit φ^2 vertauschbar sind. Sie sind deshalb zugleich harmonisch (43), und die Collineation $\varphi\psi^{-1} = \omega$ ist involutorisch und mit φ und ψ vertauschbar. Mit einer nicht speciellen räumlichen Collineation φ aber sind höchstens und i. A. sieben involutorische Collineationen vertauschbar. Drei von ihnen sind geschaart, und ihre Involutionsaxen bilden die drei paar Gegenkanten des Haupttetraeders von φ; die übrigen vier sind centrisch involutorisch und haben je einen Eckpunkt des Haupttetraeders zum Centrum und die gegenüberliegende Fläche zur Involutionsebene. Die Collineation φ ist demnach i. A. mit nur sieben anderen räumlichen Collineationen ψ associirt, welche aus φ und jenen sieben involutorischen Collineationen resultiren; sie kehrt, abgesehen von diesen involutorischen, keine Collineationen um.

Die allgemeine räumliche Collineation φ ist mit keiner Correlation χ associirt, kehrt also auch keine Correlation um. Denn wäre $\chi^2 = \varphi^2$, so würde die Collineation φ^2 oder χ^2 die beiden Kernflächen von χ und unendlich viele andere Flächen zweiter Ordnung in sich selbst transformiren (vgl. 26), also eine specielle Collineation sein.

Eine ebene Collineation ist i. A. mit nur drei anderen Collineationen associirt und kehrt i. A. weder Collineationen noch Correlationen um, ausgenommen drei mit ihr vertauschbare involutorische Collineationen. Eine Homographie ist i. A. mit nur einer anderen Homographie associirt und mit nur einer Involution vertauschbar. Der Beweis ist analog wie oben zu führen.

45. Wenn eine Collineation φ allgemeine Flächen zweiter Ordnung in sich selbst transformirt (vgl. 26), so ist sie mit unendlich vielen Correlationen χ associirt. Denn sie ist vertauschbar mit den unendlich vielen polaren Correlationen ω, welche je eine dieser Flächen zur Kernfläche haben; die Correlationen $\chi = \varphi\omega = \omega\varphi$ aber, welche aus φ und je einer der Correlationen ω resultiren, genügen der Gleichung $\chi^2 = \varphi^2$ und sind mit der Collineation φ associirt, vertauschbar und harmonisch (43). In diesem Falle hat also die Gleichung $\chi^2 = \varphi^2$ unendlich viele Lösungen; insbesondere hat sie ∞^1 Lösungen, wenn φ eine Hermite'sche, und ∞^3 Lösungen, wenn φ eine geschaarte Collineation ist (27, 28). Mit einer geschaarten Collineation sind übrigens auch die ∞^4 Collineationen associirt, welche aus ihr und den ∞^4 mit ihr vertauschbaren involutorischen Collineationen resultiren.

46. Eine halbgeschaarte Collineation φ_1 vertauscht die ∞^2 Strahlen einer linearen Congruenz paarweise mit einander (29). Sie kehrt deshalb (24) die ∞^3 geschaarten Collineationen um, deren Doppelpunktsgeraden je eines dieser ∞^2 Strahlenpaare von φ_1 bilden. Zwei dieser geschaarten Collineationen sind vertauschbar, wenn sie die zwei paar Gegenkanten eines windschiefen Vierecks $ABA'B'$ zu Doppelpunktsgeraden haben (24); zugleich mit ihnen wird dann ihre Resultirende durch φ_1 umgekehrt (12). Diese Resultirende transformirt die Regelschaaren aller durch die Viereckskanten gehenden Flächen zweiter Ordnung in sich selbst und ist eine Hermite'sche Collineation mit den vier Doppelpunkten A, B, A', B'. Die halbgeschaarte Collineation φ_1 kehrt demnach ∞^2 Hermite'sche Collineationen um, welche A, B, A' und B' zu Doppelpunkten haben; sie vertauscht nicht bloss die Gegenkanten sondern auch die Gegenpunkte des Vierecks $ABA'B'$ mit einander.

Nun kann aber jedes der beiden Punktepaare AA' und BB' mit ∞^1 anderen Punktepaaren von φ_1 vertauscht werden, die mit ihm in einer Geraden liegen und eine Involution bilden (29). Die halbgeschaarte Collineation φ_1 kehrt demnach ∞^4 Hermite'sche Collinea-

tionen φ um, deren Doppelpunkte sie paarweise mit einander vertauscht, und ist mit ∞^4 Collineationen $\psi = \varphi_1 \varphi$ associirt. Sie transformirt i. A. ∞^1 Flächen zweiter Ordnung in sich selbst (31), ist also mit ∞^1 polaren Correlationen χ' vertauschbar und folglich mit ∞^1 Correlationen $\chi = \varphi_1 \chi' = \chi' \varphi_1$ associirt, vertauschbar und harmonisch.

47. Eine räumliche Correlation χ vertauscht die beiden Diagonalen u, u' ihres Hauptvierseits mit einander (vgl. 6) und kehrt deshalb (24) die ∞^1 geschaarten Collineationen φ' um, welche diese Diagonalen zu Doppelpunktsgeraden haben. Sie ist mit den ∞^1 Correlationen $\chi_1 = \chi \varphi'$ associirt, welche aus ihr und je einer dieser ∞^1 Collineationen resultiren und gleich ihr die Geraden u, u' mit einander vertauschen. Die ∞^1 Correlationen χ_1 und Collineationen φ' sind mit der Collineation χ^2 vertauschbar (42), nicht aber alle mit der Correlation χ (vgl. 16). Mit χ sind i. A. zwei polare und zwei Nullcorrelationen vertauschbar (32, 10). Die Correlation χ ist daher mit den vier Collineationen associirt, welche aus ihr und je einer dieser involutorischen Correlationen resultiren (42). Andere mit χ associirte Collineationen und andere durch χ umkehrbare Correlationen, als die vier, giebt es i. A. nicht.

48. Wenn eine specielle Correlation χ die Strahlen einer Regelschaar $p\,q\,r$ paarweise mit einander vertauscht und deren Leitschaar abc beliebig in sich selbst transformirt, so kehrt sie ∞^2 geschaarte Collineationen φ' und ∞^2 specielle Correlationen χ' um, und ist folglich mit ∞^2 Correlationen $\chi\varphi'$ und Collineationen $\chi\chi'$ associirt. Sie kehrt nämlich zunächst die ∞^2 geschaarten Collineationen φ' um, welche je zwei durch χ vertauschbare Strahlen von pqr zu Axen haben (24). Diese ∞^2 Collineationen sind vertauschbar mit der polaren Correlation χ_1, auf deren Kernfläche die Regelschaaren pqr und abc liegen. Weil aber χ_1 auch mit der Correlation χ vertauschbar ist und daher durch χ umgekehrt wird, so resultiren ∞^2 durch χ umkehrbare Correlationen $\chi' = \chi_1 \varphi'$ aus χ_1 und je einer der ∞^2 geschaarten Collineationen φ' (12). Diese Correlationen χ' haben alle Strahlen der Regelschaar abc und je zwei durch χ vertauschbare Strahlen der Schaar $p\,q\,r$ zu Doppelstrahlen, sind also speciell. Ihre zweiten Potenzen und die von χ sind geschaarte Collineationen.

Unsere Untersuchung ist hiermit beendet; die Fragen nach den Homographien, Collineationen und Correlationen, welche mit einer gegebenen Homographie, Collineation oder Correlation vertauschbar sind, dieselbe umkehren oder durch sie umgekehrt werden, sind

erledigt. Ihre Beantwortung führte uns zu eingehenden Erörterungen über die Collineationen und Correlationen, die mit einer gegebenen harmonisch oder aber associirt sind. Hervorragende Bedeutung hatten in allen diesen Fragen und Erörterungen die involutorischen Verwandtschaften und überhaupt diejenigen, welche gewisse Elemente paarweise mit einander vertauschen.

Strassburg, den 21. Februar 1893.

Ueber algebraisch rectificirbare Raumcurven.

Von

Paul Stäckel in Halle.

1. Wenn die Länge des Bogens s einer Curve eine algebraische Function der Coordinaten seines Endpunktes ist, so heisst diese Curve *algebraisch rectificirbar*. Für die *ebenen* algebraischen Curven, welche algebraisch rectificirbar sind, hat Herr Humbert*) zwei bemerkenswerthe Sätze bewiesen. Der erste dieser Sätze besagt, dass die Bogenlänge s einer solchen Curve $f(x, y) = 0$ stets durch eine Gleichung zweiten Grades der Form:

$$(s - s_0)^2 = r(x, y)^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

bestimmt wird, in welcher s_0 eine von der Wahl des Anfangspunktes des Bogens abhängige Constante bedeutet, während $\frac{dy}{dx}$ und $r(x, y)$ rationale Functionen von x und y sind. Hieraus folgt, dass man Curven dieser Art erhält, wenn man für irgend eine algebraische Curve $\varphi(\xi, \eta) = 0$ mit der Bogenlänge σ und dem Krümmungsradius ϱ die Evolute:

$$x = \xi - \varrho \frac{d\eta}{d\sigma}, \qquad y = \eta + \varrho \frac{d\xi}{d\sigma}$$

bildet; denn diese Evolute ist wieder eine algebraische Curve, deren Bogenlänge s sich von ϱ nur durch eine Constante unterscheidet, mithin algebraisch von x und y abhängt. Da aber umgekehrt zu jeder algebraischen ebenen Curve, welche algebraisch rectificirbar ist, die algebraische Evolvente:

$$\xi = x - (s - s_0) \frac{dx}{ds} = x - r(x, y),$$

$$\eta = y - (s - s_0) \frac{dy}{ds} = y - r(x, y) \frac{dy}{dx}$$

*) Sur les courbes algébriques planes rectifiables, Journal de mathématiques pures et appliquées, 4. série. T. 4. S. 133—151. 1888.

gehört, so ergiebt sich — und dies ist der zweite Satz von Herrn Humbert — dass eine ebene algebraische Curve dann und nur dann, algebraisch rectificirbar ist, wenn sie als Evolute zu einer algebraischen Curve gehört.

Herr Königsberger*) hat dann gezeigt, dass die Gleichung für die Bogenlänge s „eine unmittelbare analytische Folgerung aus dem bekannten Abel'schen Satze" ist, welcher sich auf die Integration Abel'scher Integrale mittelst algebraischer Functionen bezieht. Er fügt hinzu: „es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass diese Sätze (von Herrn Humbert) hiernach ebenso für *räumliche* algebraisch rectificirbare Curven gelten." In der That ergiebt sich aus den Darlegungen von Herrn Königsberger unmittelbar, dass zwischen der Länge des Bogens s einer solchen algebraischen Raumcurve und den Coordinaten x, y, z seines Endpunktes wieder eine Gleichung der Form:

$$(s - s_0)^2 = r(x, y, z)^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]$$

bestehen muss, in welcher s_0 eine von der Wahl des Anfangspunktes des Bogens abhängige Constante bedeutet, während $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ und $r(x, y, z)$ rationale Functionen von x, y, z sind. Dagegen zeigt eine genauere Untersuchung, dass der zweite Satz von Herrn Humbert sich nicht ohne weiteres auf Raumcurven übertragen lässt. Allerdings ist jede algebraisch rectificirbare algebraische Raumcurve Evolute einer algebraischen Raumcurve, allein dieser Satz lässt sich nur dann umkehren, wenn die zur Evolutenbildung benutzte Raumcurve einer gewissen Bedingung genügt, die herzuleiten und zu discutiren der Zweck dieser Untersuchung ist.

2. Vorher soll jedoch noch eine Eigenschaft der algebraisch rectificirbaren algebraischen Raumcurven nachgewiesen werden, welche das Interesse für sie zu erhöhen geeignet ist. Diese Curven stehen nämlich in enger Beziehung zu der Lösung der Aufgabe, *alle algebraischen abwickelbaren Flächen zu finden, welche ausser den erzeugenden Geraden andere algebraische Krümmungslinien besitzen.* Da Cylinder und Kegel keine Schwierigkeiten bieten, sollen nur Flächen mit Rückkehrkante betrachtet werden. Die Coordinaten eines Punktes der Rückkehrkante mögen mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, die Richtungscosinus der Tangente in diesem Punkte mit a, b, c bezeichnet werden. Dann wird die abwickelbare Fläche durch die Gleichungen:

$$X = \mathfrak{x} + ap, \quad Y = \mathfrak{y} + bp, \quad Z = \mathfrak{z} + cp$$

dargestellt, in denen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$; a, b, c als algebraische Functionen einer unabhängigen Veränderlichen q aufgefasst werden dürfen. Führt man

*) Ueber rectificirbare Curven, Mathem. Annalen Bd. 32, S. 589—595. 1888.

endlich noch die Bogenlänge $\mathfrak{z}$ der Rückkehrkante und den Contingenzwinkel ihrer Tangenten $d\mathfrak{l}$ ein, so ergiebt sich leicht für das Quadrat des Linienelementes dS der Fläche die Gleichung:

$$dS^2 = (dp + d\mathfrak{z})^2 + p^2 d\mathfrak{l}^2,$$

welche, wenn noch $p + \mathfrak{z} = \mathfrak{l}$ gesetzt wird, in die Form:

$$dS^2 = d\mathfrak{l}^2 + (\mathfrak{l} - \mathfrak{z})^2 d\mathfrak{l}^2$$

übergeht. Daher sind die Linien $\mathfrak{l} = \text{const.}$ die zweite Schar der Krümmungslinien der Fläche, und diese Linien werden durch die Gleichungen:

$$X = \mathfrak{x} + a(\mathfrak{l} - \mathfrak{z}), \quad Y = \mathfrak{y} + b(\mathfrak{l} - \mathfrak{z}), \quad Z = \mathfrak{z} + c(\mathfrak{l} - \mathfrak{z})$$

gegeben. Besitzt jetzt die abwickelbare Fläche eine algebraische nicht ebene Krümmungslinie, so ist nothwendig $\mathfrak{z}$ eine algebraische Function von q, und dann sind alle Krümmungslinien der Fläche algebraisch. Damit ist der Satz gewonnen: *Dann und nur dann, wenn die Rückkehrkante einer algebraischen abwickelbaren Fläche algebraisch rectificirbar ist, besitzt diese Fläche algebraische nicht ebene Krümmungslinien*, und die am Anfang dieses Abschnitts gestellte Aufgabe ist auf die zurückgeführt, alle algebraisch rectificirbaren algebraischen Raumcurven zu finden.

3. Für das Folgende darf die von Monge*) begründete Theorie der Evolventen und Evoluten, welche in die Lehrbücher**) übergegangen ist, als bekannt vorausgesetzt werden. Dann ist klar, dass die Gleichungen:

$$\xi = x - (s - s_0)\frac{dx}{ds} = x - r(x, y, z),$$

$$\eta = y - (s - s_0)\frac{dy}{ds} = y - r(x, y, z)\frac{dy}{dx},$$

$$\zeta = z - (s - s_0)\frac{dz}{ds} = z - r(x, y, z)\frac{dz}{dx},$$

eine Evolvente der algebraisch rectificirbaren algebraischen Raumcurve (x, y, z) darstellen, welche ebenfalls eine algebraische Curve ist, und dass daher, entsprechend dem Verhalten ebener Curven, jede algebraische Raumcurve, welche algebraisch rectificirbar ist, nothwendig Evolute einer algebraischen Raumcurve ist. Es wird sich mithin darum handeln, die aus einer algebraischen Raumcurve (ξ, η, ζ) durch

*) Sur les développées, les rayons de courbure et les différens genres d'inflexion des courbes à double courbure, présenté en 1771, Mémoires des Savans étrangers. T. 10. 1785; wiederabgedruckt in den Applications de l'Analyse à la Géometrie als § XXVIII.

**) G. Salmon, Analytische Geometrie des Raumes, deutsch bearbeitet von W. Fiedler, 1880, Bd. 2, Art. 134, 135, und F. Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung, u. s. w. 2. Aufl. 1881. § 76, 76a.

Evolutenbildung hervorgehenden Curven daraufhin zu untersuchen, in wie weit sie algebraisch rectificirbare algebraische Raumcurven sind.

Zu diesem Zweck ist es nöthig, zunächst ganz allgemein die Evoluten (x, y, z) einer gegebenen Raumcurve (ξ, η, ζ) zu bestimmen. Denkt man sich (ξ, η, ζ) durch eine unabhängige Veränderliche t ausgedrückt, so bestehen für x, y, z zunächst folgende aus den Gleichungen der Evolvente leicht abzuleitende Relationen:

$$\text{(I)} \quad (x-\xi)\frac{d\xi}{dt} + (y-\eta)\frac{d\eta}{dt} + (z-\zeta)\frac{d\zeta}{dt} = 0,$$

$$\text{(II)} \quad (x-\xi)\frac{d^2\xi}{dt^2} + (y-\eta)\frac{d^2\eta}{dt^2} + (z-\zeta)\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2,$$

welche besagen, dass die Evoluten auf der abwickelbaren Fläche liegen, welche von den Normalebenen der Curve (ξ, η, ζ) umhüllt wird. Um x, y, z zu ermitteln, bedarf man noch einer dritten Gleichung. Monge benutzt als solche die aus den Gleichungen der Evolvente folgende Proportion:

$$dx : dy : dz = (x-\xi) : (y-\eta) : (z-\zeta),$$

welche geometrisch bedeutet, dass die Tangente der Evolute im Punkte (x, y, z) durch den entsprechenden Punkt (ξ, η, ζ) der Evolvente geht. Man erhält so eine Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integration die ∞^1 Evoluten liefert. Es ist das Verdienst von Lancret*) gezeigt zu haben, dass die Bestimmung der Evoluten auf eine Quadratur zurückkommt; freilich gelang ihm dies nur durch ausserordentlich complicirte Rechnungen. Auch die Herleitung, welche Molins**) für das Lancret'sche Resultat gegeben hat, ist noch ziemlich umständlich, und wenn auch in neuester Zeit Herr Darboux***) auf Grund kinematischer Betrachtungen eine elegante Lösung gegeben hat, so dürfte doch folgendes elementare Verfahren zur Bestimmung der Evoluten der Aufmerksamkeit nicht unwerth sein.

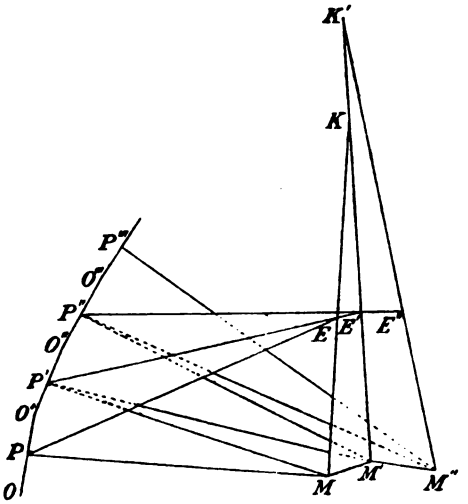
Es seien OO, $O'O''$, ... aufeinander folgende Bogenelemente der gegebenen Raumcurve, P, P', P'', ... die Mitten dieser Elemente. M, M', M'', ... seien die Mittelpunkte der betreffenden Krümmungskreise, also PMP', $P'M'P''$, ... aufeinander folgende Schmiegungsebenen, $P'MM'$, $P''M'M''$, ... aufeinander folgende Normalebenen

*) Mémoire sur les courbes à double courbure, présenté en 1802. Mémoires des Savans étrangers de l'Institut. T. 1. 1805.

**) De la détermination, sous forme intégrable, des équations des développées des courbes à double courbure. Journal de mathématiques pures et appliquées. T. 8. S. 379—390. 1843.

***) Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris 1877. T. 1. S. 17.

der Curve. Die Geraden MK, $M'K'$, ... sind als Schnittlinien auf einander folgender Normalebenen die erzeugenden Geraden der Evolutenfläche, und man erhält die Evoluten, wenn man irgend einen Punkt E von MK mit P verbindet, $P'E$ bis zum Schnitt mit der folgenden Geraden $M'K'$ in E' verlängert, und diese Operation fortsetzt.



Unter diesen Voraussetzungen gilt die Gleichung:

$$\overline{PE}^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

sodass x, y und z bei Hinzunahme von (I) und (II) algebraisch bestimmt sind, sobald man $\overline{PE}$ durch ξ, η, ζ ausdrücken kann. Es ist aber:

$$\overline{PE} = \frac{\overline{PM}}{\sin PEM} = \frac{\varrho}{\sin PEM},$$

wo ϱ als Krümmungsradius der gegebenen Raumcurve (ξ, η, ζ) bekannt ist, sodass alles darauf ankommt den Winkel PEM zu bestimmen. Aus der Congruenz der Dreiecke PEM und $P'EM$*) folgt aber, dass:

$$PEM = P'EM$$

ist. In der Ebene $P'EM$ liegt der dem Winkel PEM für den nächstfolgenden Curvenpunkt entsprechende Winkel $P'E'M'$, und zwar ist dieser Winkel Aussenwinkel des Dreiecks EKE', daher besteht die Relation:

$$P'E'M' - PEM = EKE'.$$

Der Winkel EKE' als Winkel zweier aufeinander folgender Binormalen ist aber der Torsionswinkel der Curve $PP'P''\ldots$, der mit $d\vartheta$

*) Die Congruenz dieser beiden Dreiecke zeigt auch ganz direct, dass bei Abwickelung der Evolutenfläche auf eine Ebene die Evolute in eine gerade Linie übergeht, also geodätische Linie der Evolutenfläche ist.

bezeichnet werden möge. Das Differential des Winkels PEM ist also gleich $d\vartheta$, mithin

$$PEM = \vartheta - \vartheta_0,$$

das heisst: der Winkel PEM ist, abgesehen von einer additiven Constanten, gleich der totalen Torsion der Curve $PP'P''\ldots$. Hiermit ist die gesuchte dritte Gleichung gefunden, sie lautet

$$(\text{III}) \qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = \frac{\varrho^2}{\sin^2(\vartheta-\vartheta_0)};$$

der Vollständigkeit halber mögen hier noch die expliciten Werthe von ϱ und $\vartheta-\vartheta_0$ in ξ, η, ζ und ihren Ableitungen nach t: $\xi', \eta', \zeta' \ldots$ folgen:

$$\varrho^2 = \frac{(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)^3}{(\xi'\eta''-\xi''\eta')^2+(\eta'\zeta''-\eta''\zeta')^2+(\zeta'\xi''-\zeta''\xi')^2},$$

$$\vartheta-\vartheta_0 = \int \frac{\begin{vmatrix} \xi' & \xi'' & \xi''' \\ \eta' & \eta'' & \eta''' \\ \zeta' & \zeta'' & \zeta''' \end{vmatrix}}{(\xi'\eta''-\xi''\eta')^2+(\eta'\zeta''-\eta''\zeta')^2+(\zeta'\xi''-\zeta''\xi')^2} (\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)^{\frac{1}{2}}\, dt.$$

Man erkennt hieraus, dass die rein analytische Herleitung des Resultats durch Lancret Bewunderung verdient.

Nunmehr sei die gegebene Curve (ξ, η, ζ) algebraisch, und, was in diesem Falle stets erreicht werden kann, ξ, η, ζ seien algebraische Functionen der unabhängigen Veränderlichen t. Besteht jetzt zwischen x, y, z eine algebraische Gleichung, so ergeben sich, vermöge dieser Gleichung und der Relationen (I) und (II), auch x, y, z als algebraische Functionen von t. Werden diese Ausdrücke für x, y, z in (III) eingesetzt, so wird dadurch $\sin(\vartheta-\vartheta_0)$, also auch $\sin\vartheta$ selbst, als algebraische Function von t definirt. Es gilt demgemäss der Satz:

> *Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Evolute einer algebraischen Raumcurve algebraisch ist, besteht darin, dass der Sinus der totalen Torsion dieser Curve algebraisch von den Coordinaten abhängt. Ist diese Bedingung erfüllt, so sind alle Evoluten algebraische Curven.*

Dass die eben ausgesprochene Bedingung eine wirkliche Beschränkung bildet, erkennt man leicht, wenn man etwa für die cubische Parabel $\sin\vartheta$ berechnet.

Die Gleichung (III) zeigt aber noch mehr. Wie sofort aus den Gleichungen der Evolvente folgt, ebenso leicht aber auch geometrisch eingesehen werden kann, ist die linke Seite von (III) gleich $(s-s_0)^2$, und hieraus folgt, dass die algebraischen Evoluten auch stets algebraisch rectificirbar sind.

Das Resultat dieser Betrachtungen lässt sich in das Theorem zusammenfassen:

Alle algebraischen Raumcurven, welche algebraisch rectificirbar sind, ergeben sich durch Evolutenbildung aus den algebraischen Raumcurven, bei denen der Sinus der totalen Torsion algebraisch von den Coordinaten abhängt.

Bei allen ebenen Curven ist diese Bedingung von selbst erfüllt, es gilt also der Humbert'sche Satz mit einer gleich zu besprechenden Erweiterung.

Für die weiteren Untersuchungen ist es nothwendig, die Fälle, in denen die Evolutenfläche ein Cylinder oder ein Kegel ist, gesondert zu betrachten. Es sollen daher erst diese Ausnahmefälle erledigt, und dann die Evolutenflächen mit Rückkehrkante behandelt werden.

4. Fasst man eine ebene Curve $(\xi, \eta, 0)$ als Curve im Raume auf, so besitzt sie ausser der ebenen Evolute $(\bar{x}, \bar{y}, 0)$ noch unzählig viele andere, welche geodätische Linien des Cylinders sind, dessen Mantelgeraden in den Punkten der ebenen Evolute auf deren Ebene senkrecht stehen. Die Abwickelung dieses Cylinders auf die Ebene zeigt, dass alle seine ∞^2 geodätischen Linien dargestellt werden durch:

$$x = \bar{x}, \quad y = \bar{y}, \quad z = a\bar{s} + b,$$

wo a und b Constanten sind und $\bar{s}$ die Bogenlänge der ebenen Evolute bedeutet. Ist die ebene Curve $(\xi, \eta, 0)$ algebraisch, so ist es auch ihre ebene Evolute $(\bar{x}, \bar{y}, 0)$, und die Bogenlänge $\bar{s}$ ist eine algebraische Function von $\bar{x}$ und $\bar{y}$, mithin sind alle geodätischen Linien des Evolutencylinders, also auch alle Evoluten algebraische Curven. Dass diese Curven auch algebraisch rectificirbar sind, folgt aus den allgemeinen Betrachtungen in Abschnitt 3; die Rectification lässt sich aber auch explicite ausführen, denn es ist $ds^2 = dz^2 + d\bar{s}^2$, also:

$$s - c = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} z,$$

wo c eine Constante bedeutet. Diese Curven sind also in der einfachen Weise rectificirbar, dass ihre Bogenlänge, gemessen von einem bestimmten Anfangspunkte aus, immer proportional ist dem Abstande des Endpunktes des Bogens von einer festen Ebene durch den Anfangspunkt.*)

Diese Eigenschaft ist für die Evoluten ebener Curven charakteristisch, denn soll für eine Raumcurve die Gleichung bestehen:

$$s - c = \mu z,$$

wo μ und c Constanten sind, so ist $\frac{dz}{ds} = \frac{1}{\mu}$, der Winkel, den die

*) Johann Bernoulli (Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, année 1732. S. 237) zeigte, dass die sphärische Epicycloide, welche erzeugt wird, wenn ein grösster Kreis der Kugel auf einem festen kleinen Kreise rollt, auf diese Weise rectificirbar ist. Er ruft aus: «Propriété si singulière, que je ne sai pas, si aucune autre courbe peut l'avoir».

Curve mit einer festen Richtung im Raume bildet, ist also constant, die Curve ist daher geodätische Linie auf einem Cylinder und somit auch Evolute einer ebenen Curve. Hieraus folgt sofort die Richtigkeit des Satzes, dass alle *algebraischen* Raumcurven, welche in der angegebenen Weise rectificirbar sind, identisch sind mit den räumlichen Evoluten ebener algebraischer Curven.

Noch eine dritte Betrachtungsweise führt zu diesen Curven. Nach Bertrand*) sind die Curven, bei denen das Verhältniss zwischen Krümmung und Torsion constant ist, Schraubenlinien, das heisst, geodätische Linien eines allgemeinen Cylinders. Fragt man jetzt nach den algebraischen Schraubenlinien, so erkennt man mit Leichtigkeit, dass eine Schraubenlinie dann und nur dann algebraisch ist, wenn man sie als Evolute einer ebenen algebraischen Curve ansehen kann.

Endlich gelangt man auch noch zu diesen Curven bei der Frage, wann ein Cylinder algebraische geodätische Linien besitzt. Soll ein Cylinder Linien dieser Art besitzen, welche nicht eben sind, so ist seine Grundcurve nothwendig die ebene Evolute einer ebenen algebraischen Curve. Ist diese Bedingung erfüllt, so sind zunächst ∞^1 nicht ebene geodätische Linien des Cylinders algebraisch; dass dann alle ∞^2 geodätischen Linien des Cylinders algebraisch sind, folgt direct aus der Möglichkeit die geodätischen Linien des Cylinders auf der Fläche so zu verschieben, dass sie geodätische Linien bleiben.

Zur Erläuterung dieser Betrachtungen können die cubischen Parabeln:

$$x = \lambda\left(\cos\alpha \cdot at + \sqrt{3}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{ab}\,t^2 + \cos\beta \cdot bt^3\right),$$

$$y = \lambda\left(\sin\alpha \cdot at + \sqrt{3}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{ab}\,t^2 + \sin\beta \cdot bt^3\right),$$

$$z = at + \sqrt{3}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{ab}\,t^2 + bt^3$$

dienen; a, b, α, β, λ sind dabei willkürliche Constanten. Für die Bogenlänge s dieser Parabeln gilt die einfache Gleichung:

$$s - c = \sqrt{1+\lambda^2}\cdot z.$$

Es möge noch bemerkt werden, *dass diese cubischen Parabeln die einzigen Raumcurven dritter Ordnung sind, bei denen das Verhältniss zwischen Krümmung und Torsion constant ist.*

5. Ist die gegebene Raumcurve (ξ, η, ζ) sphärisch, so möge die Gleichung ihrer Kugel:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2$$

sein. Die Normalebenen der Curve gehen dann alle durch den Mittel-

*) Sur la courbe dont les deux courbures sont constantes. Journal de mathématiques pures et appliquées. T. XIII. S. 423. 1848.

punkt dieser Kugel, umhüllen also einen Kegel, welcher aus der Kugel eine zweite sphärische Curve ausschneidet, deren Coordinaten mit $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ bezeichnet werden sollen. P. Serret*) nennt diese Curve die sphärische Evolute der gegebenen sphärischen Raumcurve. Diese Bezeichnung ist insofern mangelhaft, als diese Curve keine Evolute im Sinne von Monge ist (bei Abwickelung der Kegelfläche auf die Ebene geht sie in einen Kreis über), insofern aber zutreffend, als diese Curve von den grössten Kreisen der Kugel umhüllt wird, welche auf den Elementen der gegebenen Curve senkrecht stehen, und die als *sphärische Normalen* bezeichnet werden dürfen. Aus dieser Eigenschaft erschliesst man, dass die Bogenlänge $\bar{s}$ sich von dem *Radius der sphärischen Krümmung*, nämlich dem Bogen des grössten Kreises der Kugel zwischen den Punkten (ξ, η, ζ) und $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, nur um eine Constante unterscheiden kann. In Folge dessen besteht für die Länge des Bogens $\bar{s}$ die Gleichung:

$$\sin \frac{\bar{s} - \bar{s}_0}{2r} = \frac{\sqrt{(\bar{x}-\xi)^2 + (\bar{y}-\eta)^2 + (\bar{z}-\zeta)^2}}{2r}.$$

Der Evolutenkegel lässt sich durch die Gleichungen darstellen:

$$x = \frac{\bar{x}}{r} u, \quad y = \frac{\bar{y}}{r} u, \quad z = \frac{\bar{z}}{r} u,$$

und das Quadrat seines Linienelementes dS ist daher:

$$dS^2 = du^2 + u^2 \frac{d\bar{s}^2}{r^2}.$$

Mithin lässt sich die Ebene

$$\Xi = u \cos \frac{\bar{s}}{r}, \quad \mathsf{H} = u \sin \frac{\bar{s}}{r}$$

so in den Kegel verbiegen, dass die Geraden $\bar{s} = \text{const.}$ in die erzeugenden Geraden des Kegels übergehen. Eine beliebige Gerade der Ebene (Ξ, H) geht bei der Biegung in eine geodätische Linie des Kegels über. Die Gleichung der geodätischen Linien ist daher:

$$u \sin \frac{\bar{s} - \bar{s}_1}{r} = h;$$

($\bar{s}_1$ und h sind willkürliche Constanten), und die rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z eines Punktes der geodätischen Linie sind:

$$x = \frac{h\bar{x}}{r \sin \frac{\bar{s} - \bar{s}_1}{r}}, \quad y = \frac{h\bar{y}}{r \sin \frac{\bar{s} - \bar{s}_1}{r}}, \quad z = \frac{h\bar{z}}{r \sin \frac{\bar{s} - \bar{s}_1}{r}}.$$

Ist nunmehr die gegebene Curve algebraisch, so dürfen ξ, η, ζ als algebraische Functionen einer unabhängigen Veränderlichen t an-

*) Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure. Paris 1860. S. 34.

gesehen werden. Die sphärische Evolute $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ wird durch die Gleichungen (I), (II) und

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = r^2$$

bestimmt, daher sind $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ algebraische Functionen von t. Mithin ist die sphärische Evolute einer algebraischen sphärischen Curve wieder eine algebraische Curve, welche die besondere Eigenschaft hat, dass $\sin\frac{\bar{s}}{r}$, das heisst der Sinus ihres auf den Radius r als Längeneinheit bezogenen Bogens, algebraisch von den Coordinaten abhängt. Das hat aber zur Folge, dass auch x, y, z algebraische Functionen von t sind, das heisst, dass alle geodätischen Linien des Evolutenkegels einer algebraischen sphärischen Curve algebraische Curven sind. Damit ist bewiesen, dass die Evoluten algebraischer sphärischer Curven wieder algebraisch sind. Diese Curven bilden also eine interessante Classe von algebraisch rectificirbaren algebraischen Raumcurven.

Auf dieselben Curven kommt man auch durch die Frage nach den Kegeln, welche ausser den erzeugenden Geraden noch andere algebraische geodätische Linien besitzen. Jeder solcher Kegel muss zunächst algebraisch sein. Seine Schnittcurve $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ mit der Kugel vom Radius r, deren Mittelpunkt im Scheitel des Kegels liegt, ist daher auch algebraisch. Bildet man jetzt die Gleichung der geodätischen Linien, so besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine dieser Linien algebraisch ist, darin, dass $\sin\frac{\bar{s}}{r}$ algebraisch von den Coordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ abhängt. Ist aber diese Bedingung erfüllt, so sind alle geodätischen Linien des Kegels algebraisch. Definirt man jetzt eine Curve (ξ, η, ζ) dadurch, dass sie auf jener Kugel:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2$$

liegt, dass ferner der dem Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ entsprechende Punkt (ξ, η, ζ) in der Ebene

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ \frac{d\bar{x}}{dt} & \frac{d\bar{y}}{dt} & \frac{d\bar{z}}{dt} \end{vmatrix} = 0$$

liegt, welche durch die Tangente im Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ und den Mittelpunkt der Kugel geht, und dass endlich der sphärische Abstand $\bar{s}$ des Punktes (ξ, η, ζ) vom Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ durch die Gleichung:

$$\sin\frac{\bar{s} - \bar{s}_1}{2r} = \frac{\sqrt{(\bar{x}-\xi)^2 + (\bar{y}-\eta)^2 + (\bar{z}-\zeta)^2}}{2r}$$

bestimmt wird, so ist die Curve $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ die sphärische Evolute der algebraischen Curve (ξ, η, ζ). Hiermit ist der Beweis für das Theorem erbracht:

Dann und nur dann besitzt ein Kegel ausser den erzeugenden Geraden algebraische geodätische Linien, wenn er der Evolutenkegel einer algebraischen sphärischen Curve ist; in diesem Falle sind alle geodätischen Linien des Kegels algebraisch rectificirbare algebraische Raumcurven.

6. Die Betrachtungen der beiden vorhergehenden Abschnitte zeigen, dass die Untersuchung der Evolutenflächen mit Rückkehrkante zur Grundlage eine Theorie der geodätischen Linien abwickelbarer Flächen mit Rückkehrkante haben muss. Diese Theorie lässt sich sofort anknüpfen an die Form des Quadrates des Linienelementes einer solchen Fläche, welche im zweiten Abschnitt entwickelt wurde. Es war

$$dS^2 = (dp + d\mathfrak{z})^2 + p^2 d\mathfrak{k}^2 = d\mathfrak{l}^2 + (\mathfrak{l} - \mathfrak{z})^2 d\mathfrak{k}^2.$$

Beachtet man nun, dass die Abwickelung auf die Ebene in diesem Fall mit der conformen Abbildung identisch ist, so ergiebt sich sofort, dass die Fläche (X, Y, Z) auf die Ebene (Ξ, H) conform abgebildet wird, wenn man setzt*):

$$\Xi = \mathfrak{l} \cdot \cos\mathfrak{k} + \int \mathfrak{z} \sin\mathfrak{k}\, d\mathfrak{z}, \qquad \mathsf{H} = \mathfrak{l} \sin\mathfrak{k} - \int \mathfrak{z} \cos\mathfrak{k}\, d\mathfrak{z}.$$

Durch factorenweise Integration ergiebt sich daraus die für die folgenden Untersuchungen zweckmässigere Form der Abwickelungsgleichungen:

$$\Xi = p \cdot \cos\mathfrak{k} + \int \cos\mathfrak{k}\, d\mathfrak{z}, \qquad \mathsf{H} = p \cdot \sin\mathfrak{k} + \int \sin\mathfrak{k}\, d\mathfrak{z}.$$

Hieraus findet man als Gleichung der geodätischen Linien der abwickelbaren Fläche:

$$p \sin(k - k_0) + \int \sin(k - k_0)\, d\mathfrak{z} = h,$$

und für die Coordinaten x, y, z eines Punktes einer geodätischen Linie erhält man die Gleichungen:

$$x = \mathfrak{x} + a \frac{h - \int \sin(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_0)\, d\mathfrak{s}}{\sin(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_0)},$$

$$y = \mathfrak{y} + b \frac{h - \int \sin(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_0)\, d\mathfrak{s}}{\sin(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_0)},$$

$$z = \mathfrak{z} + c \frac{h - \int \sin(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_0)\, d\mathfrak{s}}{\sin(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_0)}.$$

Lässt man die willkürliche Constante h variiren, während $\mathfrak{k}_0$ einen festen Werth behält, so bekommt man in der Ebene (Ξ, H) eine Schar paralleler Geraden, auf der abwickelbaren Fläche eine Schar geodätischer Parallelcurven.

*) Vgl. Darboux a. a. O. T. I. S. 85.

Nunmehr werde angenommen, dass die Fläche (X, Y, Z) algebraisch sei; $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ mögen dann wieder als algebraische Functionen einer unabhängigen Veränderlichen q angesehen werden. Ist jetzt eine geodätische Linie dieser Fläche algebraisch, so folgt aus den Gleichungen für x, y, z, falls diese Linie keine der erzeugenden Geraden ist, — und dieser Fall wird von jetzt ab ausdrücklich ausgeschlossen — dass nothwendig eine Relation der Form:

$$(\mathfrak{A}) \qquad h - \int \sin(\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_0)\, d\mathfrak{z} = A(q) \sin(\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_0)$$

besteht, in welcher $A(q)$ eine algebraische Function von q ist. Aus dieser Gleichung folgt durch Differentiation:

$$\sin(\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_0)\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dq} + \frac{dA}{dq}\right) + \cos(\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_0)\, A \frac{d\mathfrak{t}}{dq} = 0,$$

und da $A \frac{d\mathfrak{t}}{dq}$ nicht identisch verschwinden kann, so ist $\operatorname{tg}(\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_0)$ eine algebraische Function von q. Besitzt die Fläche eine algebraische geodätische Linie, so ist mithin nothwendig $\sin(\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_0)$ eine algebraische Function von q; dann aber gilt nach $(\mathfrak{A})$ dasselbe von $\int \sin(\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_0)\, d\mathfrak{z}$; gilt es aber vom Integral, so folgt rückwärts durch Differentiation, dass es auch von $\sin(\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_0)$ gilt. Ist also eine geodätische Linie, die zu einem bestimmten Werthsystem $(\mathfrak{t}_0, h)$ der willkürlichen Constanten gehört, algebraisch, so ist nothwendig $\int \sin(\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_0)\, d\mathfrak{z}$ algebraisch. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend, und da sie die Constante h gar nicht enthält, so ist damit der wichtige Satz gewonnen:

Ist eine geodätische Linie einer algebraischen abwickelbaren Fläche eine algebraische Raumcurve, so sind auch ihre sämmtlichen geodätischen Parallelcurven algebraisch.

Nimmt man jetzt im Besonderen an, dass die abwickelbare Fläche die Evolutenfläche einer algebraischen Raumcurve ist, so ist oben gezeigt worden, dass, sobald eine der Evoluten eine algebraische Curve ist, alle Evoluten diese Eigenschaft besitzen. Nach dem eben bewiesenen Satze sind dann auch die geodätischen Parallelcurven algebraisch. Erinnert man sich nun der Construction der Evolute $E, E', E'', \ldots$ so wird man sofort erkennen, dass die Evoluten mit ihren geodätischen Parallelcurven die Gesammtheit der geodätischen Linien der Fläche (abgesehen von den erzeugenden Geraden) bilden, das heisst:

Ist eine abwickelbare Fläche Evolutenfläche einer algebraischen Curve, deren Evoluten algebraisch sind, so sind sämmtliche geodätische Linien dieser Fläche algebraisch.

Bei der Formulirung dieses Satzes durfte der Zusatz „Fläche mit

Rückkehrkante" weggelassen werden, da der entsprechende Satz für Cylinder und Kegel oben bewiesen wurde.

Die Evoluten einer algebraischen Curve waren nach dem dritten Abschnitte dann und nur dann, algebraische Curven, wenn der Sinus der totalen Torsion der Evolvente algebraisch von den Coordinaten abhing. Die Bedingungen, welche in diesem Abschnitte für die Existenz algebraischer geodätischer Linien auf algebraischen abwickelbaren Flächen ermittelt wurden, bezogen sich auf die Natur der Rückkehrkante der betrachteten Fläche. Im Falle der Evolutenflächen ist die Rückkehrkante identisch mit der Curve der Mitelpunkte der Schmiegungskugeln für die gegebene Raumcurve. Dann aber zeigen die geometrischen Betrachtungen des dritten Abschnittes, dass $d\vartheta = d\mathfrak{k}$ ist*), sodass $\sin(\vartheta - \vartheta_0)$ und $\sin(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_0)$ bei geeigneter Wahl des Anfangspunktes der Zählung mit einander identisch werden. Dass es bei den Evolutenflächen schon genügt, wenn $\sin(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_0)$ eine algebraische Function von q ist, beruht darauf, dass bei diesen Flächen eine Schar geodätischer Linien mittelst einer einzigen Quadratur bestimmbar ist, während bei der allgemeinen abwickelbaren Fläche zur Bestimmung einer geodätischen Linie zwei Quadraturen erforderlich sind. Entsprechend ergiebt sich bei den Evolutenflächen aus der Existenz einer einzigen algebraischen geodätischen Linie, dass alle geodätischen Linien der Fläche algebraisch sind, bei den allgemeinen abwickelbaren Flächen aber kann man erst dann erschliessen, dass $\int \sin(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_0)\, d\mathfrak{z}$ für beliebige Werthe von $\mathfrak{k}_0$ eine algebraische Function von q ist, wenn man dies für zwei specielle Werthe von $\mathfrak{k}_0$ weiss, wenn also die Existenz von zwei algebraischen geodätischen Linien bekannt ist, die nicht geodätische Parallelcurven sein dürfen.

Zum Schluss soll noch gezeigt werden, dass die Bedingung dafür, dass sämmtliche geodätische Linien einer algebraischen abwickelbaren Fläche algebraische Curven sind, eine einfache geometrische Bedeutung besitzt. Es wird durch:

$$\Xi = \int \cos\mathfrak{k}\, d\mathfrak{z}, \quad \mathsf{H} = \int \sin\mathfrak{k}\, d\mathfrak{z}$$

die Curve in der Ebene (Ξ, H) dargestellt, welcher auf der Fläche die Curve $p = 0$ entspricht, also die Curve, in welche die Rückkehrkante der Fläche bei der Biegung in die Ebene (Ξ, H) übergeht. Da nun jene Bedingung besagt, dass Ξ und H algebraische Functionen von q sein sollen, so folgt:

*) Nach Lancret (Correspondance sur l'Ecole polytechnique, T. I. S. 51 an XIII) rührt diese Bemerkung von Fourier her, ebenso die reciproke: dass der Torsionswinkel der Curve der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln gleich dem Contingenzwinkel der gegebenen Curve im entsprechenden Punkte ist.

Sind sämmtliche geodätische Linien einer algebraischen abwickelbaren Fläche algebraisch, so geht die Rückkehrkante bei der Abwickelung der Fläche auf eine Ebene in eine ebene algebraische Curve über,

und als Corollar dazu ergiebt sich:

Hat eine algebraische Raumcurve algebraische Evoluten, so geht die Curve der Mittelpunkte ihrer Schmiegungskugeln bei der Abwickelung der Evolutenfläche auf eine Ebene in eine ebene algebraische Curve über.

Halle a./S., im December 1892.

Ein Beitrag zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen mit einer Anwendung auf Zahlentheorie.

Von

Heinrich Weber in Göttingen.

§ 1.

Die Schläfli'schen Modulargleichungen.

In meinem Buche „*Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*“ (Braunschweig 1890) habe ich für die Darstellung der Transformationstheorie drei Functionen des Periodenverhältnisses $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ benutzt, die mit den Jacobi'schen Moduln k, k' durch die Gleichungen zusammenhängen:

$$(1)\qquad f(\omega) = \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[12]{kk'}},\quad f_1(\omega) = \sqrt[6]{2}\sqrt[12]{\frac{k'^2}{k}},\quad f_2(\omega) = \sqrt[6]{2}\sqrt[12]{\frac{k^2}{k'}}.$$

Zwischen diesen Functionen bestehen die identischen Relationen

$$(2)\qquad \begin{aligned} f_1^{\,8} + f_2^{\,8} &= f^8, \\ f f_1 f_2 &= \sqrt{2}, \end{aligned}$$

und die Transformation erster und zweiter Ordnung ist in den Formeln enthalten:

$$(3)\qquad \begin{aligned} f(\omega+1) &= e^{-\frac{\pi i}{24}} f_1(\omega), & f\left(-\tfrac{1}{\omega}\right) &= f(\omega), \\ f_1(\omega+1) &= e^{-\frac{\pi i}{24}} f(\omega), & f_1\left(-\tfrac{1}{\omega}\right) &= f_2(\omega), \\ f_2(\omega+1) &= e^{\frac{\pi i}{12}} f_2(\omega), & f_2\left(-\tfrac{1}{\omega}\right) &= f_1(\omega), \end{aligned}$$

$$(4)\qquad \begin{aligned} f_1(2\omega)\, f_2(\omega) &= \sqrt{2}, \\ f(\omega)\, f\left(\tfrac{\omega-1}{\omega+1}\right) &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Aus (3) lassen sich die allgemeinen Formeln für die lineare Transformation gewinnen, von denen ich eine, die in § 35 meines erwähnten Buches abgeleitet ist, hier anführe.

Sind α, β, γ, δ ganze Zahlen, die der Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

und ausserdem der Congruenz

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \equiv 0 \pmod 2$$

genügen, so ist

$$f\left(\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \alpha\omega}\right) = \varepsilon f(\omega), \tag{5}$$

wenn ε eine 24^{te} Einheitswurzel ist und näher bestimmt wird durch

$$\varepsilon = \left(\frac{2}{\alpha - \beta}\right) e^{-\frac{2\pi i}{3}\left(\alpha(\gamma-\beta)-(\alpha^2-1)\beta\delta\right)} e^{-\frac{3\pi i}{8}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma-\delta)}. \tag{6}$$

Die Functionen f, f_1, f_2 sind also nach der Bezeichnung von Klein Modulfunctionen 48^{ter} Stufe.

Ist nun n eine Primzahl, grösser als 3, so besteht zwischen den Grössen

$$u = f(\omega), \quad v = f(n\omega)$$

eine algebraische Gleichung, die in Bezug auf u und v symmetrisch, für jede der beiden Grössen vom $n+1^{\text{ten}}$ Grade ist und rationale Coëfficienten hat. Die übrigen Wurzeln dieser Gleichung sind

$$v_h = f\left(\frac{h+\omega}{n}\right), \quad h \equiv 0 \pmod{48}, \tag{7}$$

wenn h ein vollständiges Restsystem nach dem Modul n durchläuft und durch 48 theilbar angenommen wird. Diese Gleichung habe ich die *Schläfli'sche Modulargleichung* genannt.

Ich beschäftige mich in dieser Mittheilung mit dem Falle dass

$$n \equiv -1 \pmod{24}, \tag{8}$$

und besonders mit den beiden Primzahlen $n = 23, 47$, bemerke aber, dass dieselbe Methode auch für andere Primzahlen mit Nutzen angewandt werden dürfte. In diesen Fällen kann man, wie ich in § 77 meines Buches gezeigt habe, der Modulargleichung folgende Form geben: Man setze

$$A = \left(\frac{u}{v}\right)^{12} + \left(\frac{v}{u}\right)^{12}, \quad B = uv + \frac{2}{uv}; \tag{9}$$

dann hat die Modulargleichung die Gestalt

$$A^{\frac{n+1}{24}} - B^{\frac{n-1}{2}} + \Phi(A, B) = 0, \tag{10}$$

wo $\Phi(A, B)$ eine ganze rationale Function von A und B ist, von den Graden

$$\frac{n+1}{24} - 1, \quad \frac{n-1}{2} - 1$$

in Bezug auf diese beiden Variablen.

Für $n = 23$ ist also Φ von A unabhängig und vom 10^{ten} Grade in Bezug auf B, für $n = 47$ ist Φ linear in A und vom 22^{ten} Grade in B.

§ 2.

Hilfsmittel zur Berechnung der Coëfficienten der Modulargleichung.

Früher pflegte man die Coëfficienten der Modulargleichung dadurch zu berechnen, dass man in die mit unbestimmten Coëfficienten geschriebene Modulargleichung für die Functionen u, und v Reihenentwicklungen einsetzte, und dann die nöthige Anzahl linearer Gleichungen für die Coëfficienten dadurch erhielt, dass man die Coëfficienten der einzelnen Potenzen gleich Null setzte.

Einen anderen Weg habe ich für die Transformation 23^{ten} Grades in meinem Buche eingeschlagen (§ 99), und dieser Weg ist es, den ich hier noch etwas weiter verfolgen will. Er beruht darauf, dass man aus der Theorie der complexen Multiplication für besondere Werthe von A die zugehörigen Werthe von B, oder wenigstens die Gleichungen, durch die diese Werthe bestimmt werden, berechnen kann, und so direct zur Kenntniss der Function $\Phi(A, B)$ gelangt. Für die Fälle $n = 23$, $n = 47$ führt dieser Weg leicht zum Ziel, und zwar für $n = 23$ in zwei verschiedenen Formen, deren Vergleichung ein interessantes Resultat ergiebt.

Wenn wir

$$u^{12} = \pm v^{12} \tag{11}$$

setzen, so wird

$$A = \pm 2, \tag{12}$$

und wenn wir für jeden dieser beiden Werthe die zugehörigen Werthe von B, deren es $n - 1 : 2$ giebt, kennen, so können wir nach (10) für den Fall $n = 23$ die Function ϕ, die von A unabhängig ist, in zwei verschiedenen Formen berechnen, und für $n = 47$, wo Φ in Bezug auf A linear ist, erhalten wir zwei Gleichungen, um die beiden Coëfficienten dieser linearen Function vollständig zu berechnen.

Wir haben also die Bedingung aufzusuchen, dass für einen der Werthe (7) die Relation (11) befriedigt ist. Nach (5), (6) ist hierfür die hinreichende (und wie sich anderweitig beweisen lässt auch nothwendige) Bedingung

$$\frac{h+\omega}{n} = \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega} \tag{13}$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta \equiv 0 \pmod 2. \tag{14}$$

Es ist also ω die Wurzel einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Coëfficienten, die wir in der Form

$$a\omega^2 + \sigma b\omega + c = 0 \tag{15}$$

annehmen wollen, worin a, b, c ganze Zahlen, $\sigma = 1$ oder $= 2$ und $a, \sigma b, c$ *ohne gemeinsamen Theiler* sind, und wenn $\sigma = 1$ ist, auch b ungerade vorausgesetzt werden kann.

Aus (13) aber folgt

$$\beta\omega^2 + (\alpha + \beta h - n\delta)\,\omega + h\alpha - n\gamma = 0,$$

und die Vergleichung mit (15) ergiebt, wenn x ein noch unbestimmter ganzzahliger Factor ist.

$$\beta = ax, \quad \alpha + \beta h - n\delta = \sigma b x,$$
$$h\alpha - n\gamma = cx, \quad \alpha - \beta h + n\delta = 2y,$$

worin y eben durch die letzte Gleichung definirt ist, und wegen (14) eine ganze Zahl sein muss. Ebenso ergiebt sich aus der zweiten Gleichung, dass, wenn x ungerade ist, $\sigma = 2$ sein muss. Wir erhalten nun hieraus

$$(16)\qquad \begin{array}{ll} \alpha = \frac{\sigma b x}{2} + y, & h\alpha - n\gamma = cx \\ \beta = ax, & h\beta - n\delta = \frac{\sigma b x}{2} - y, \end{array} \qquad h \equiv 0 \pmod{48},$$

und wenn wir die Determinante bilden und

$$4ac - \sigma^2 b^2 = \sigma^2 m$$

setzen:

$$(17)\qquad n = \frac{\sigma^2 m}{4} x^2 + y^2.$$

Wenn m so bestimmt ist und ausserdem

$$(a + c)\,x \equiv 0 \pmod 2,$$

so lassen sich die Gleichungen (16) und (14) befriedigen und aus (5), (6) ergiebt sich

$$(18)\qquad f\left(\frac{h+\omega}{n}\right) = \varepsilon f(\omega),$$

also

$$(19)\qquad \begin{aligned} A &= (-1)^{y+\frac{(a+c)x}{2}} \cdot 2, \\ B &= w^2 + \frac{2}{w^2}, \end{aligned}$$

wenn

$$(20)\qquad w^2 = \varepsilon f(\omega)^2,$$

und hierin ist

$$(21)\qquad \omega = \frac{-\sigma b + \sigma\sqrt{-m}}{2a},$$

so dass B aus den Gleichungen für die complexe Multiplication bestimmt werden kann.

Ist x *ungerade*, so ist $\sigma = 2$ und $a + c$ gerade, also, da $a, \sigma b, c$ keinen gemeinsamen Theiler haben sollen, a und c ungerade, also nach (17) (da $n \equiv -1$)

$$m \equiv -1 - y^2, \quad ac \equiv b^2 - 1 - y^2 \pmod 4,$$

also

$$b \equiv y \pmod 2$$

und folglich

$$b^2 \equiv y^2 \pmod 4,$$

also

$$ac \equiv -1 \pmod 4$$

oder

$$a + c \equiv 0 \pmod 4,$$

und daher nach (19)

$$A = 2(-1)^y.$$

Ist aber x gerade, so muss $\sigma = 1$ sein, und x kann nicht durch 4 theilbar sein, da sonst nach (17)

$$n \equiv y^2 \pmod 4,$$

was der vorausgesetzten Congruenz

$$n \equiv -1 \pmod 4$$

widerspricht; also ist b ungerade und mithin m ungerade, y gerade, also

$$ac \equiv \frac{m+1}{4} \equiv \frac{y}{2} \pmod 2.$$

Wenn wir also voraussetzen, dass a und c nicht beide gerade sind, so folgt hieraus nach (19)

$$A = 2(-1)^{\frac{y}{2}+1}.$$

Für unsere Aufgabe haben nur die beiden Werthe $x = 1$ und $x = 2$ Interesse. Beschränken wir uns darauf und nehmen ausserdem an, *dass a und c niemals beide gerade sind*, und a nicht durch n theilbar ist, so können wir, wenn r eine ganze Zahl bedeutet,

$$y = rx, \quad x\sigma = 2$$

setzen und unsere Formeln gehen in folgende über:

$$\begin{gathered} \alpha = b + rx, \quad h\alpha - n\gamma = cx, \\ \beta = ax, \quad h\beta - n\delta = b - rx, \end{gathered} \qquad h \equiv 0 \pmod{48},$$

$$x^2ac - b^2 = m, \quad m = n - x^2r^2,$$

$$\omega = \frac{-b+\sqrt{-m}}{ax}, \tag{22}$$

$$A = 2(-1)^{r+s+1},$$

$$B = w^2 + \frac{2}{w^2}, \quad w^2 = \varepsilon f(\omega)^2. \tag{23}$$

Zur Bestimmung von h erhält man aus (22) die Congruenz

$$hax \equiv b - rx \pmod n. \tag{24}$$

Verwandelt man r in $-r$, so bleibt m ungeändert, während sich h ändert, wenn nicht $r = 0$ ist.

§ 3.

Die reellen Werthe von B.

Die Werthe von B, wie sie in (23) festgestellt sind, genügen als algebraische Zahlen der complexen Multiplication gewissen ganzzahligen Gleichungen, deren Grad der Zahl der Classen erster oder zweiter Art der Determinante $-m$ gleich ist. Die verschiedenen Wurzeln dieser Gleichungen entsprechen den verschiedenen nicht äquivalenten Formen der Determinante $-m$. Um diese Gleichungen aufzustellen, müssen wir die Werthe von B etwas genauer betrachten, wobei es übrigens genügt, wenn wir für jede Discriminante *eine* specielle Form betrachten, wenn wir nur über die Realität und das Vorzeichen von B urtheilen können.

In dem Falle $x = 1$ können wir uns auf die Betrachtung der Form

$$a = 1, \quad b = -r, \quad c = n$$

beschränken, wodurch wir aus (23) und (6) erhalten

$$w^2 = f(\sqrt{-m})^2, \quad f_1(\sqrt{-m})^2, \tag{25}$$

worin das erste bei geradem r und ungeradem m, das zweite bei ungeradem r und geradem m gilt.

Es ist also w^2 und mithin auch B *reell und positiv.*

Für $x = 2$ werden die Werthe von w^2 nicht reell; unter den Werthen von B ist aber ein reeller positiver, den wir aufsuchen müssen.

Schreiben wir zu diesem Zweck nach (4) B in der Form

$$B = \varepsilon f(\omega)^2 + \varepsilon^{-1} f\left(\frac{\omega - 1}{\omega + 1}\right)^2. \tag{26}$$

Wenn nun ω der Gleichung

$$a\omega^2 + b\omega + c = 0 \tag{27}$$

genügt, so ergiebt sich für

$$\omega' = \frac{\omega - 1}{\omega + 1}$$

die Gleichung

$$(a - b + c)\,\omega'^2 + 2(a - c)\,\omega' + (a + b + c). \tag{28}$$

Wenn r und mithin a und c ungerade sind, so ist diese Gleichung *primitiv* und ist, nach der Gauss'schen Bezeichnung, von der ersten Art; es ergiebt sich also dann für B kein Werth, der nicht schon in dem Falle $x = 1$ mit behandelt ist. Ist aber r gerade, so hat diese Gleichung den Theiler 2.

Sie wird zu (27) *entgegengesetzt*, also $f(\omega')$ conjugirt imaginär zu $f(\omega)$, wenn

$$a - b + c = 2a,$$

also

$$b = c - a$$

angenommen wird; dies führt für m zu der Bestimmung

$$4ac - (c - a)^2 = m.$$

Ohne uns auf die allgemeine Untersuchung dieser Gleichung hier einzulassen, bemerken wir nur, dass sie für die einzigen hier in Betracht kommenden Fälle durch folgende Annahmen befriedigt ist:

$$\begin{aligned} m &= 7, \quad (a, b, c) = (1, 1, 2), \\ m &= 23, \quad (a, b, c) = (2, 1, 3), \\ m &= 31, \quad (a, b, c) = (2, 3, 5), \\ m &= 47, \quad (a, b, c) = (3, 1, 4), \end{aligned}$$

und die Berechnung von B nach den Formeln (22), (23), (6) führt für diese Fälle zu folgenden Werthen:

$$(27) \qquad \begin{aligned} m &= 7, \quad B = f_1\left(\frac{9+\sqrt{-7}}{2}\right)^2 + f_1\left(\frac{-9+\sqrt{-7}}{2}\right)^2, \\ m &= 23, \quad B = f_1\left(\frac{3+\sqrt{-23}}{4}\right)^2 + f_1\left(\frac{-3+\sqrt{-23}}{4}\right)^2, \\ m &= 31, \quad B = f_1\left(\frac{15+\sqrt{-31}}{4}\right)^2 + f_1\left(\frac{-15+\sqrt{-31}}{4}\right)^2, \\ m &= 47, \quad B = f_1\left(\frac{5+\sqrt{-47}}{6}\right)^2 + f_1\left(\frac{-5+\sqrt{-47}}{6}\right)^2. \end{aligned}$$

Dass diese Werthe positiv sind, ergiebt sich aus der Discussion der Function

$$f_1(\xi + ia)^2 + f_1(-\xi + ia)^2$$

für ein beliebiges positives constantes a. Diese Function ist für reelle Werthe von ξ reell, ist positiv für $\xi = 0$, und verschwindet für $\xi = 6$ aber für keinen kleineren Werth.

Diese Grössen B sind Wurzeln von irreducibeln algebraischen Gleichungen der Grade 1, 3, 3, 5, die immer *nur eine* reelle Wurzel haben, die übrigen Wurzeln erhält man, wenn man in den Ausdruck für w^2 statt ω die Wurzel einer zu einer anderen Classe gehörigen Form setzt.

Für die wirkliche Ausführung der Rechnung ist es bequemer, in den Fällen $m = 23, 31, 47$ für B nicht die Wurzeln (27) sondern die zur Hauptform gehörigen Wurzeln zu benutzen. Diese sind, wenn wir $m = 7$ nochmals hinzufügen:

$$
\begin{aligned}
m &= 7, \quad B = f_1\left(\tfrac{9+\sqrt{-7}}{2}\right)^2 + \frac{2}{f_1\left(\tfrac{9+\sqrt{-7}}{2}\right)^2},\\
m &= 23, \quad B = f_1\left(\tfrac{9+\sqrt{-23}}{2}\right)^2 + \frac{2}{f_1\left(\tfrac{9+\sqrt{-23}}{2}\right)^2},\\
m &= 31, \quad B = f_1\left(\tfrac{21+\sqrt{-31}}{2}\right)^2 + \frac{2}{f_1\left(\tfrac{21+\sqrt{-31}}{2}\right)^2},\\
m &= 47, \quad B = f_1\left(\tfrac{21+\sqrt{-47}}{2}\right)^2 + \frac{2}{f_1\left(\tfrac{21+\sqrt{-47}}{2}\right)^2}.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

§ 4.

Die Aufstellung der Gleichungen für B.

In meinem vorhin erwähnten Buche habe ich Gleichungen aufgestellt, deren Wurzeln

$$f(\sqrt{-m}) \text{ bei geradem } m,$$
$$f_1(\sqrt{-m}) \text{ bei ungeradem } m$$

sind. In den Fällen $\sigma = 2$, wo es sich um Formen erster Art handelt, ist oben (25) B direct durch diese Grössen ausgedrückt, und die Berechnung der Gleichungen für B aus den Formeln, die im Anhang meines Buches zusammengestellt sind, bietet keinerlei Schwierigkeiten.

Man findet so die Gleichungen

$m = 7$, $B - 3 = 0$,
$m = 11$, $B^3 + 2B^2 - 10B - 22 = 0$,
$m = 14$, $B^2 - 4B + 2 = 0$,
$m = 19$, $B^3 - 6B^2 + 10B - 6 = 0$,
$m = 22$, $B - 4 = 0$,
$m = 23$, $B^3 - 5B^2 + 4B - 1 = 0$,
$m = 31$, $B^3 - 17B - 27 = 0$,
$m = 38$, $B^3 - 22B - 40 = 0$,
$m = 43$, $B^3 - 26B - 54 = 0$,
$m = 46$, $B^2 - 4B - 14 = 0$,
$m = 47$. $B^5 - 4B^4 - 22B^3 + 35B^2 + 82B - 121 = 0$.

Etwas umständlicher ist die Rechnung für $\sigma = 1$, wo die Formen von der zweiten Art sind; darüber sei hier noch folgendes bemerkt.

Wir setzen, indem wir die Ausdrücke (28) anwenden (und x jetzt in einem anderen Sinne brauchen wie oben)

$$\sqrt{2}x = f(\sqrt{-m}).$$

Dann haben wir in den vier Fällen (28) für x die Gleichungen

$$(30)\qquad \begin{aligned} m &= 7, & x &- 1 = 0,\\ m &= 23, & x^3 &- x - 1 = 0,\\ m &= 31, & x^5 &- x^2 - 1 = 0,\\ m &= 47, & x^5 &- x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$(31)\qquad \begin{aligned} v &= f\left(\frac{3b+\sqrt{-m}}{2}\right), \quad b = 3 \text{ für } m = 7, 23,\\ v_1 &= f_1\left(\frac{3b+\sqrt{-m}}{2}\right), \quad b = 7 \text{ für } m = 31, 47. \end{aligned}$$

Nach (3) und (4) ist aber,

$$f_2\left(\frac{3b+\sqrt{-m}}{2}\right) f(\sqrt{-m}) = e^{\frac{b\pi i}{8}}\sqrt{2},$$

also

$$f_2\left(\frac{3b+\sqrt{-m}}{2}\right) = \frac{e^{\frac{b\pi i}{8}}}{x},$$

und demnach folgt aus (2)

$$v^8 - v_1^8 = -\frac{1}{x^6},$$

$$v^8 v_1^8 = -16x^8,$$

also, wenn t eine unbestimmte Grösse ist

$$(t - v_1^8)(t + v^8) = t^2 - \frac{t}{x^6} + 16x^8.$$

Wenn wir also aus der Gleichung

$$(32)\qquad 16x^{16} + t^2x^8 - t = 0$$

und aus einer der Gleichungen (30) x eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung, die in t vom Grade 2, 6, 6, 10 ist, und die eine Wurzel v_1^8 hat.

Es zeigt sich aber, dass diese Gleichung nur von der Verbindung

$$t + \frac{16}{t}$$

abhängig gemacht und also in eine Gleichung für B^4 verwandelt werden kann. Aus dieser Gleichung lässt sich ein Factor abspalten, der eine Gleichung für B^2 liefert, und daraus wieder einer für B. Die Auswahl des richtigen Factors wird eben dadurch bestimmt, dass eine seiner Wurzeln reell und positiv sein muss.

Die Elimination wird am leichtesten dadurch vollzogen, dass man aus (30) zunächst eine Gleichung für x^8 ableitet, und dann (32) als quadratische Gleichung für x^8 auffasst.

So sind folgende vier Gleichungen berechnet.

$$m = 7, \quad B - 1 = 0,$$
$$m = 23, \quad B^3 - 5B^2 + 8B - 5 = 0,$$
$$m = 31, \quad B^3 + 4B^2 - B - 13 = 0,$$
$$m = 47, \quad B^5 + 8B^4 + 14B^3 - 41B^2 - 162B - 145 = 0.$$

§ 5.

Die Modulargleichung für den 23ten und 47ten Transformationsgrad.

Wenn wir die Resultate, die wir gewonnen haben, zusammenstellen, so erhalten wir folgende Uebersicht

$n = 23.$	$A = +2,$	$m = 23$ $m = 19$ $m = 7$	$\sigma = 2,$
	$A = -2,$	$m = 22$ $m = 14$	$\sigma = 2,$
		$m = 13$ $m = 7$	$\sigma = 1,$
$n = 47.$	$A = +2,$	$m = 47$ $m = 43$ $m = 31$ $m = 11$	$\sigma = 2,$
	$A = -2,$	$m = 46$ $m = 38$ $m = 22$	$\sigma = 2,$
		$m = 47$ $m = 31$	$\sigma = 1.$

Die Modulargleichung ist für $n = 23$ in Bezug auf A linear, in Bezug auf B vom 11ten Grad, für $n = 47$ in Bezug auf A quadratisch, in Bezug auf B vom 23ten Grad.

Für $n = 23$ setzen wir die Modulargleichung in eine der beiden Formen

$$(33) \qquad \begin{matrix} A - 2 = \Phi_1(B), \\ A + 2 = \Phi_2(B). \end{matrix} \qquad n = 23.$$

Für $n = 47$ setzen wir sie in die Form

$$(34) \qquad A^2 - 4 = \frac{A+2}{4}\Phi_3(B) - \frac{A-2}{4}\Phi_4(B).$$

Dann sind Φ_1, Φ_2 ganze rationale Functionen vom 11ten Grad, Φ_3, Φ_4 vom 23ten Grad, in denen die höchste Potenz den Coefficienten 1 hat. Diese Functionen sind aber, da wir die Werthe von B für $A = \pm 2$ kennen, (oder wenigstens die rationalen Gleichungen, deren Wurzeln sie sind) völlig bekannt. Es ist nur noch zu beachten, dass jeder Factor, der einem Werthe $m < n$ entspricht, doppelt vorkommt, und nur die Factoren, die dem Werthe $m = n$ entsprechen, einfach.

Hiernach ist

$$\Phi_1(B) = (B-3)^2(B^3-6B^2+10B-6)^2\,(B^3-5B^2+4B-1),$$
$$\Phi_2(B) = (B-1)^2\,(B^2-4B+2)^2\,(B-4)^2\,(B^3-5B^2+8B-1),$$

$$\Phi_3(B) = (B^3+2B^2-10B-22)^2\,(B_3-17B-27)^2 \times$$
$$(B^3-26B-54)^2\,(B^5-4B^4-22B^3+35B^2+82B-121),$$
$$\Phi_4(B) = (B-4)^2\,(B^3-22B-40)^2\,(B^2-4B-14)^2$$
$$(B^3+4B-B-13)^2(B^5+8B^4+14B^3-41B^2-162B-145).$$

§ 6.

Anwendung auf die Pell'sche Gleichung.

Es hat sich im Vorhergehenden die Modulargleichung für die Transformation 23ten Grades in zwei verschiedenen Formen ergeben, von denen die erste bereits in meinem Buche mitgetheilt ist. Aber die Vergleichung der beiden Formen ergiebt ein merkwürdiges Resultat.

Es folgt nämlich aus den beiden Gleichungen (33) die *Identität*

$$\Phi_2(B) - \Phi_1(B) = 4,$$

die wir in der Form schreiben wollen

$$X^2M - Y^2N = 1 \tag{35}$$

wenn

$$2X = (B-1)\,(B^2-4B+2)\,(B-4),$$
$$2Y = (B-3)\,(B^3-6B^2+10B-6),$$
$$M = B^3 - 5B^2 + 8B - 5,$$
$$N = B^3 - 5B^2 + 4B - 1.$$

Setzt man für B irgend eine beliebige ganze Zahl, so gehen

$$X,\quad Y,\quad M,\quad N$$

in ganze Zahlen

$$\xi,\quad \eta,\quad \mu,\quad \nu$$

über, die der Gleichung

$$\xi^2\mu - \eta^2\nu = 1 \tag{36}$$

genügen. Diese Gleichungen sind aber specielle Fälle der Pell'schen Gleichung.

Die Pell'sche Gleichung ist, wenn D irgend eine positive nicht quadratische ganze Zahl ist

$$x^2 - Dy^2 = 1, \tag{37}$$

und soll in ganzen Zahlen gelöst werden. Wenn D eine zusammengesetzte Zahl $= \mu\nu$ ist, so kann man in manchen Fällen, aber bei weitem nicht in allen, die Gleichung (36) in ganzen Zahlen ξ, η lösen und man erhält daraus eine Lösung von (37), wenn man

$$x + \sqrt{D}\, y = (\xi\sqrt{\mu} + \eta\sqrt{\nu})^2$$

setzt.

Solche lösbare Gleichungen (34) und zugleich ihre Lösung ergiebt die Gleichung (35) in beliebiger Menge, wenn man für B eine beliebige ganze Zahl setzt.

Für $B = 0$ erhält man z. B.

$$9^2 - 5 \cdot 4^2 = 1.$$

Für $B = 2$ ergiebt sich

$$1^2 \cdot 5 - 2^2 = 1,$$

und für $B = 7$

$$\xi = 207, \quad \eta = 226,$$
$$\nu = 149, \quad \nu = 25 \cdot 5;$$

es sondert sich also im letzten Fall von ν noch ein Quadrat ab, was mit η^2 vereinigt werden kann, und man erhält

$$207^2 \cdot 149 - 1130^2 \cdot 5 = 1.$$

Erhebt man

$$207\sqrt{149} + 1130\sqrt{5}$$

ins Quadrat, so erhält man die Lösung der Pell'schen Gleichung

$$x^2 - 745y^2 = 1,$$

nämlich

$$x = 12769001, \quad y = 467820,$$

und dies ist in der That nach der Legendre'schen Tafel die kleinste Lösung. In den Beispielen die ich berechnet habe, ergab sich immer die kleinste Lösung, indessen ist es doch sehr zweifelhaft, ob dies allgemein gilt. Man kommt natürlich bald auf sehr grosse Zahlen, die über den Bereich der vorhandenen Tafeln hinausgehen.*)

Eine Identität derselben Art, noch etwas einfacher, lässt sich auch aus der Transformation 11^{ten} Grades ableiten:

$$(B-1)^2 (B^3+2B^2+2B+2) - (B+1)^2 (B^3-2B^2+2B-2) = 4.$$

Göttingen im Februar 1893.

*) Legendre, Zahlentheorie Bd. I. Degen, Canon Pellianus, Kopenhagen 1817. Degen giebt zwei den unsrigen ähnliche Identitäten an, die sich ebenso zur Lösung der Pell'schen Gleichung anwenden lassen:

$$x(x-3)^2 - (x-4)(x-1)^2 = 4,$$
$$(x^3+6x^2+9x+2)^2 - x(x+4)(x+3)^2(x+1)^2 = 4.$$

Ueber Functionen von Vectorgrössen, welche selbst wieder Vectorgrössen sind. Eine Anwendung invariantentheoretischer Methoden auf eine Frage der mathematischen Physik.

Von

Heinrich Burkhardt in Göttingen.

§ 1.

Fragestellung.

Herr P. Drude ist durch seine vergleichende Untersuchung der verschiedenen Lichttheorien*) auf folgende Frage geführt worden:

Gegeben seien eine beliebige Anzahl von Vectorgrössen, Functionen der Lage eines oder mehrerer Punkte; man soll auf die allgemeinste Weise Functionen derselben und ihrer Differentialquotienten nach den Coordinaten bestimmen, welche selbst wieder Vectorgrössen sind.

Beschränkt man diese Aufgabe auf die Bestimmung solcher Vectoren, deren Componenten rationale ganze Functionen der Componenten der gegebenen Vectoren sind — auf die Bestimmung „*rationaler ganzer Vectorfunctionen*", wie wir uns im folgenden ausdrücken wollen —, so gestattet sie eine einfache Lösung mit Hilfe gewisser *invariantentheoretischer* Methoden, welche bis jetzt wohl nirgends in den Dienst der mathematischen Physik getreten sind. In der Sprache der Invariantentheorie würde nämlich die dergestalt eingeschränkte Aufgabe folgendermassen lauten:

Der Betrachtung zu Grunde gelegt sei die *orthogonale Gruppe* in 3 Variabeln, d. h. die Gesammtheit derjenigen homogenen linearen Substitutionen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x' &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z, \\ y' &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z, \\ z' &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z, \end{aligned} \qquad (\alpha_{ik} = \alpha_{ki})$$

deren Coefficienten den bekannten Relationen:

*) Göttinger Nachrichten, Jahrg. 1892, p. 366.

(2) $\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1, \quad \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0,$ etc.

genügeleisten. Gegeben seien ferner eine beliebige Anzahl Reihen von je 3 Variabeln:

(3) $$x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \ldots x_m, y_m, z_m$$

welche gleichzeitig den Substitutionen (1) unterworfen werden; ferner eine beliebige Anzahl Reihen von je 3 Functionen dieser Variabeln:

(4) $$u_1, v_1, w_1;\ u_2, v_2, w_2;\ \ldots u_n, v_n, w_n,$$

welche so beschaffen sind, dass die Functionen jeder Reihe sich ebenso wie die x, y, z (zu ihnen „cogredient“) unter sich substituiren, wenn diese den Substitutionen der Gruppe (1) unterworfen werden. *Man sucht alle Tripel von solchen rationalen ganzen Functionen der u, v, w und ihrer Differentialquotienten nach den x, y, z, welche dabei ebenfalls dieselben Substitutionen erfahren.*

Ein einfachstes Tripel solcher Functionen ist z. B.:

(5) $$v_1 w_2 - w_1 v_2, \quad w_1 u_2 - u_1 w_2, \quad u_1 v_2 - v_1 u_2.$$

Seien U, V, W irgend welche Functionen der verlangten Art, ξ, η, ζ Grössen, welche sich zu den x, y, z „contragredient“ substituiren, so ist es eine in der Invariantentheorie wohlbekannte und vielbenützte Thatsache, dass der Ausdruck:

(6) $$U\xi + V\eta + W\zeta$$

sich nicht ändert, wenn die U, V, W irgend eine (auch eine den Bedingungen (2) nicht genügende) Substitution (1) und die ξ, η, ζ gleichzeitig die zu dieser duale Substitution erfahren. Aber jede den Bedingungen (2) genügende Substitution ist mit der zu ihr dualen identisch; man braucht deswegen zwischen cogredienten und contragredienten Variabeln hier überhaupt nicht zu unterscheiden und erhält demgemäss folgenden Satz, dessen Richtigkeit übrigens auch unabhängig von jenem allgemeinen invariantentheoretischen Ansatz eine einfache Rechnung bestätigt:

Nimmt man ein $(n+1)^{tes}$ System cogredienter Grössen u_0, v_0, w_0 (die Componenten eines $(n+1)^{ten}$ Vectors) hinzu und bildet eine Function der $(n+1)$ Variabelnreihen:

(7) $$u_0, v_0, w_0;\ u_1, v_1, w_1;\ u_2, v_2, w_2;\ \ldots u_n, v_n, w_n,$$

welche die u_0, v_0, w_0 nur linear enthält, und welche in sich übergeht, wenn die Variabeln aller dieser Reihen cogredient den Substitutionen der orthogonalen Gruppe unterworfen werden, so bilden die Coefficienten von u_0, v_0, w_0 in dieser Function ein Functionentripel der verlangten Eigenschaft; und alle Functionen, welche diese Eigenschaft besitzen, können auf diesem Wege erhalten werden.

Eine Function der in diesem Satze bezeichneten Art wird als *eine*

*Invariante**) *der* $(n+1)$ *Werthsysteme* (7) *gegenüber der orthogonalen Gruppe* oder als *eine scalare Function von* $(n+1)$ *Vectoren* bezeichnet.

§ 2.

Die einfachsten rationalen ganzen Invarianten der orthogonalen Gruppe.

Wir betrachten nunmehr zunächst den Fall, dass es sich um *Functionen der u, v, w allein, nicht auch ihrer Differentialquotienten handelt.* Um solche zu erhalten, dürfen wir anknüpfen an einen Satz, der in den neueren Untersuchungen über Metrik im Raume eine fundamentale Rolle gespielt hat**): alle Invarianten der Gruppe der euklidischen Bewegungen des Raumes lassen sich ausdrücken durch solche, welche nur zwei Variabelnreihen (die Coordinaten zweier Punkte) enthalten; diese sind ihrerseits Functionen je einer einzigen:

$$\Omega_{ik} = (u_i - u_k)^2 + (v_i - v_k)^2 + (w_i - w_k)^2. \tag{8}$$

In unserem Falle haben wir es mit derjenigen Untergruppe dieser

---

*) Bei Gelegenheit dieser Bezeichnung sei folgende Bemerkung grundsätzlicher Art gestattet. In der allgemeinen Theorie des Hrn. Lie (vgl. z. B. Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. I (Leipzig 1888) p. 95) wird als *Invariante* eine Function der *Variabeln* bezeichnet, welche von den Transformationen der betr. Gruppe in sich übergeführt wird. Die gewöhnlich im engeren Sinne als Invariantentheorie bezeichnete algebraische Disciplin unterwirft Formen mit allgemeinen Coefficienten den Transformationen der von ihr untersuchten Gruppe und versteht unter einer *Invariante* schlechthin eine invariante Function dieser *Coefficienten*, während sie solche Functionen der *Variabeln allein* als *identische Covarianten*, solche der *Variabeln und der Coefficienten* als *Covarianten* schlechthin bezeichnet. Soweit handelt es sich nur um eine Verschiedenheit der Terminologie; aber darüber hinaus haben es die algebraischen Invariantentheoretiker bequem gefunden, die Variabeln selbst als Coefficienten neuer (linearer) Formen aufzufassen und dergestalt für ihr Gebiet die Theorie der Covarianten (einschliesslich der identischen) auf die der Invarianten (das Wort in ihrem Sinne genommen) zurückzuführen. Die Vortheile, welche diese Auffassungsweise namentlich für die *Aussprache* der Sätze gewährt, sollen nicht bestritten werden; aber dass diesen Vortheilen bei der „allgemeinen projectiven Gruppe" nicht grössere Nachtheile gegenüberstehen, beruht wesentlich auf der geringen Zahl der identischen Covarianten dieser Gruppe und es darf daraus nicht geschlossen werden, dass das gleiche auch bei anderen Gruppen stattfindet. *Schliesslich ist doch der Begriff der identischen Covariante ein einfacherer und elementarerer als der der Invariante einer Form*, und ich kann mich daher der namentlich von Hrn. Study (vgl. Methoden zur Theorie der ternären Formen (Leipzig 1889) p. 7 ff.) verfochtenen Auffassung nicht anschliessen, welche in dieser Zurückführung einen Fortschritt zu grösserer innerer Harmonie sieht und sie demgemäss immer vornehmen will. Für das hier behandelte Problem wäre sie sicher unzweckmässig.

**) Zuerst wohl bei Hrn. Helmholtz, Göttinger Nachrichten 1868, p. 200.

Gruppe zu thun, welche aus allen solchen Substitutionen derselben besteht, die den Punkt (0, 0, 0) festlassen; wir haben also ausser den Functionen Ω auch noch:

$$(9) \qquad S_{ii} = \Omega(u_i, v_i, w_i;\ 0, 0, 0) = u_i^2 + v_i^2 + w_i^2$$

zu berücksichtigen und werden dann, um bei unserer homogenen Substitutionsgruppe auch nur mit Functionen zu thun zu haben, welche in jeder einzelnen Variabelnreihe homogen sind, an Stelle von Ω_{ik} zweckmässig:

$$(10) \qquad S_{ik} = \tfrac{1}{2}(S_{ii} + S_{kk} - \Omega_{ik}) = u_i u_k + v_i v_k + w_i w_k$$

einführen.

Aber jener allgemeine Satz darf nun nicht etwa so verstanden werden, dass jede rationale ganze Invariante unserer Gruppe sich *rational und ganz* durch die S_{ii} und S_{ik} ausdrücken lässt. Vielmehr haben — wie selbstverständlich — auch die Determinanten:

$$(11) \qquad D_{hik} = \begin{vmatrix} u_h & v_h & w_h \\ u_i & v_i & w_i \\ u_k & v_k & w_k \end{vmatrix}$$

Invarianteneigenschaft; und diese sind nicht selbst durch die S rational ausdrückbar, sondern nur ihre Quadrate und ihre Producte zu je zweien. Es ist nämlich nach dem Multiplicationssatz der Determinanten:

$$(12) \qquad D_{hik} D_{lmn} = \begin{vmatrix} S_{hl} & S_{hm} & S_{hn} \\ S_{il} & S_{im} & S_{in} \\ S_{kl} & S_{km} & S_{kn} \end{vmatrix}.$$

Neben dieser Relation bemerken wir für spätere Verwendung sogleich noch die folgende:

$$(13) \qquad D_{hik} S_{lm} - D_{ikl} S_{hm} + D_{kih} S_{lm} - D_{lhi} S_{km} = 0,$$

deren Richtigkeit man erkennt, wenn man ihre linke Seite in Gestalt der identisch verschwindenden Determinante:

$$\begin{vmatrix} u_h & v_h & w_h & S_{hm} \\ u_i & v_i & w_i & S_{im} \\ u_k & v_k & w_k & S_{km} \\ u_l & v_l & w_l & S_{lm} \end{vmatrix}$$

schreibt.

Der wesentliche Satz nun, der in § 4 zu beweisen sein wird, ist der folgende: *Jede rationale ganze Invariante der orthogonalen Gruppe mit beliebig vielen Reihen von Veränderlichen (jede Scalarfunction beliebig vieler Vectoren) lässt sich rational und ganz durch diese S und D ausdrücken, deren jede höchstens drei Variabelnreihen (Vectoren) enthält.* Der Beweis wird sich auf einen Hilfssatz stützen, der in § 3

abgeleitet wird, vorher sei noch kurz an die geometrische Bedeutung der eingeführten Grössen erinnert:

S_{ii} ist das Quadrat der Länge des Vectors (i), S_{ik} das Product aus der Länge des einen der Vectoren (i) und (k) in die der Projection des andern auf ihn, D_{hik} das sechsfache Volumen der Pyramide, welche die Vectoren (h), (i), (k) zu Kanten hat.

§ 3.

Ein Hilfssatz.

Der in diesem Paragraphen aufzustellende Hilfssatz besteht in einer Adaptirung der sogenannten *„zweiten Gordan'schen Reihenentwicklung"**) für unsere Zwecke. Vorausgeschickt sei: wenn F eine Scalarfunction der Vectoren (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2) und eventuell noch irgend welcher anderer Vectoren ist, so ist auch die *Polare:*

$$F_1 = u_2 \frac{\partial F}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial F}{\partial v_1} + w_2 \frac{\partial F}{\partial w_1} \tag{14}$$

ein Scalarfunction. Aus F_1 entsteht durch Wiederholung desselben Processes die „zweite Polare" F_2, u. s. f. Ferner ist ebenfalls eine Scalarfunction die Form:

$$\begin{aligned} DF = {} & u_0\left(\frac{\partial^2 F}{\partial v_1 \partial w_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial w_1 \partial v_2}\right) + v_0\left(\frac{\partial^2 F}{\partial w_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial w_2}\right) \\ & + w_0\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial v_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial v_1 \partial u_2}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

wenn (u_0, v_0, w_0) ein beliebiger neuer Vector ist; und das Gleiche gilt von den Functionen D^2F, $D^3F \ldots$ u. s. f., die durch Wiederholung des Processes (15) entstehen. Aus diesen Functionen $D^0F = F$, D^1F, $D^2F \ldots$ erhält man „Normalformen" $G_0, G_1, G_2 \ldots$, wenn man in ihnen (u_1, v_1, w_1) und (u_2, v_2, w_2) durch die Componenten eines weiteren neuen Vectors (u, v, w) ersetzt. Ist dabei F vom Grade m in (u_1, v_1, w_1), vom Grade n in (u_2, v_2, w_2), so wird G_i vom Grade $m + n - 2i$ in den (u, v, w), vom Grade i in den (u_0, v_0, w_0), während die Grade in etwa sonst noch vorkommenden Variabelnreihen durch die vorgenommenen Ableitungsprocesse nicht geändert sind. *G_0 ist also von demselben Gesammtgrad wie F, hat aber eine Reihe Veränderlicher weniger; die übrigen G haben ebensoviele Reihen Veränderlicher, aber geringeren Gesammtgrad.*

Aus jeder Normalform G_i wird nun weiter eine Function H_i abgeleitet, indem die Operation:

---

*) Gordan, dieser Ann. Bd. 5, p. 95; vgl. die ausführlichere Darstellung bei Study, ternäre Formen p. 60.

(16) $(v_1 w_2 - w_1 v_2)\frac{\partial G}{\partial u_0} + (w_1 u_2 - u_1 w_2)\frac{\partial G}{\partial v_0} + (u_1 v_2 - v_1 u_2)\frac{\partial G}{\partial w_0}$

(welche in gewissem Sinne als Umkehrung von (15) angesehen werden kann), i-mal wiederholt wird; aus jeder dieser Functionen H_i wird die $(n-i)^{te}$ Polare in Bezug auf (u, v, w) unter Einführung von (u_2, v_2, w_2) genommen und nachher (u, v, w) durch (u_1, v_1, w_1) ersetzt. So entstehen Functionen K_i; und der Gordan'sche Satz sagt nun aus:

Jede beliebige rationale ganze Function lässt sich linear durch die mittelst des angegebenen Verfahrens aus ihr hervorgehenden Functionen K_i in der Form:

(17) $$F = \sum \beta_i K_i$$

darstellen. Die β_i bedeuten dabei rationale Zahlen, welche in für uns gleichgültiger Weise von den Zahlen m, n, i abhängen.

§ 4.

Beweis der Vollständigkeit des Invariantensystems.

Auf Grund dieser Reihenentwicklung kann nun der Beweis für den in § 2 angekündigten Satz folgendermassen durch vollständige Induction geführt werden:

Zunächst bemerken wir, dass jede unserer Gruppe gegenüber invariante Function, welche in den Variabeln irgend einer Reihe nicht homogen ist, zerlegt werden kann in eine Summe von Gliedern, deren jedes einzelne für sich invariant und in diesen Variabeln homogen ist; *wir dürfen uns also auf solche Functionen beschränken, welche in jeder Variabelnreihe für sich homogen sind.*

Ferner beachten wir: durch die Polarenoperation (14) wird aus S_{11}, S_{1i}, D_{1ik} bezw. $2S_{12}$, S_{2i}, D_{2ik}; durch die Operation (16) wird aus S_{00}, S_{0i}, D_{0ik} bezw. $2D_{012}$, D_{i12}, $S_{1i}S_{2k} - S_{2i}S_{1k}$ (letzteres nach dem Satz von der Multiplication „rechteckiger" Systeme; übrigens durch einfache Ausrechnung zu bestätigen); *durch beide Operationen geht also ein Product von Formen S und D wieder in eine Summe von Producten solcher Formen über.*

Nunmehr zeigen wir: Wenn der angekündigte Satz richtig ist für alle Functionen von $(n+1)$ Vectoren, *deren Gesammtgrad eine bestimmte Zahl N nicht übersteigt, und für alle Functionen von n oder weniger Vectoren, so gilt er auch noch für solche Functionen von $(n+1)$ Vectoren, deren Gesammtgrad $= N+1$ ist.*

Denn ist F eine solche Function, so ist von den nach den Vorschriften des § 3 aus ihr zu bildenden Functionen G die erste G_0 eine Function von nur n Vectoren, die andern sind von einem Gesammtgrad $\leqq N$. Sie alle sind also nach Voraussetzung gleich Summen von

Producten von Functionen S und D; nach der zweiten der hier vorausgeschickten Bemerkungen gilt dann dasselbe von den aus ihnen zu bildenden Functionen H und K. Dann ergiebt aber Gleichung (17) dasselbe für F, w. z. b. w.

Andererseits ist durch elementare Ueberlegungen die Richtigkeit des Satzes einzusehen:

Alle rationalen ganzen homogenen Invarianten unserer Gruppe mit nur einer Variabelnreihe u_1, v_1, w_1 sind Potenzen von S_{11}.

Hiervon ausgehend gelangt man mit Hilfe des eben bewiesenen Satzes successive zu Functionen von immer wachsendem Gesammtgrad und immer wachsender Variabelnzahl und damit zur Erkenntniss der Allgemeingültigkeit des angekündigten Satzes.

Derselbe gestattet jedoch noch eine bemerkenswerthe Umformung in doppelter Beziehung, wenn man die Relationen (12) und (13) zur Reduction der zunächst erhaltenen Ausdrücke verwendet. Man findet nämlich:

Jede rationale ganze Invariante der orthogonalen Gruppe von geradem Gesammtgrad lässt sich rational und ganz durch die S allein ausdrücken, jede solche Invariante von ungeradem Gesammtgrade als eine Summe von Producten, deren jedes einen Factor D ausser Factoren S enthält. Und dabei braucht man von den D nur diejenigen zu benutzen, deren einer Index einen bestimmten Werth l hat.

§ 5.

Aufstellung aller rationalen ganzen Vectorfunctionen.

Nach allen diesen Vorbereitungen können wir nunmehr zur Aufstellung der allgemeinsten Form einer rationalen ganzen Vectorfunction schreiten. Halten wir nämlich den Satz des § 1 zusammen mit dem letzten Satz des § 4, indem wir dabei den in letzterem auftretenden Index l mit dem in ersterem bevorzugten Index 0 identificiren, so gewinnen wir folgendes Hauptresultat:

Alle Vectoren, deren Componenten rationale ganze Functionen der Componenten gegebener Vectoren sind, lassen sich darstellen als Summen von Gliedern entweder der Form:

$$u_i S, \quad v_i S, \quad w_i S \tag{18}$$

oder der Form:

$$(v_i w_k - w_i v_k) S, \quad (w_i u_k - u_i w_k) S, \quad (u_i v_k - v_i u_k) S, \tag{19}$$

je nachdem ihr Gesammtgrad ungerade oder gerade ist; unter S ist dabei ein Product von Functionen S_{ik} (in allen drei Componenten dasselbe) verstanden.

Oder anders ausgedrückt:

Die allgemeinste Art, aus gegebenen Vectoren andere abzuleiten, deren Componenten sich rational und ganz durch die Componenten der gegebenen ausdrücken, besteht in Wiederholung und Combination der folgenden drei Operationen:

1. *Vereinigung zweier Vectoren zu einem dritten, der auf ihrer Ebene senkrecht steht und dessen Länge ihrer Masszahl nach gleich ist dem Flächeninhalt des Parallelogramms, von dem sie Seiten sind;*

2. *Multiplication eines Vectors mit der aus zweien zu bildenden scalaren Grösse S* (von den drei hier auftretenden Vectoren können auch zwei oder alle drei einander gleich sein);

3. *geometrische Addition zweier Vectoren durch Parallelogrammconstruction.*

Dabei braucht die erste dieser Operationen nur mit den *gegebenen* (nicht mit aus ihnen abgeleiteten) Vectoren vorgenommen zu werden; und ebenso sind die unter (2) erwähnten Grössen S nur aus den gegebenen Vectoren zu bilden.

§ 6.

Beziehungen zu andern invariantentheoretischen Untersuchungen.

Spricht man den Satz des § 4 folgendermassen aus:

Alle rationalen ganzen Invarianten der orthogonalen Gruppe lassen sich durch eine endliche Anzahl solcher Invarianten rational und ganz ausdrücken, —

so sieht man, wie er sich unter die allgemeinen Resultate über „*Endlichkeit von Formensystemen*“ subsumirt, welche Hr. Hilbert in seiner fundamentalen Abhandlung im 36. Bande dieser Annalen (1890) entwickelt hat. In der That hat ihn auch Hr. Hilbert dort p. 532 als Beispiel angeführt und kurz skizzirt, wie sich nach seinen Methoden der Beweis gestaltet.

In einem Punkte gehen übrigens (ganz abgesehen von der wirklichen Aufstellung der Grundformen des Systems) die Resultate des § 3 über die Hilbert'schen Formulirungen hinaus. Bei Hilbert ist nämlich die Anzahl der Variabeln, resp. der cogredienten Variabelnreihen, stets eine zwar willkürliche, aber bestimmte endliche. Lässt man diese Anzahl unbegrenzt zunehmen, indem man immer neue und neue Variabelnreihen den vorher schon betrachteten zufügt, so sind auch immer neue und neue Formen in die Basis des Systems aufzunehmen. Bezeichnet man aber Formen, welche durch Vertauschung der verschiedenen Variabelnreihen in einander übergehen, als zu demselben *Typus* gehörig, so kann man die weitere Frage stellen, ob die

Zahl der verschiedenen Typen von Grundformen mit wachsender Variabelnzahl unbeschränkt wächst, oder ob schliesslich keine neuen Typen mehr auftreten. Die Resultate des § 4 zeigen, dass in unserem Fall das erstere eintritt: schon bei vier Variabelnreihen treten keine neuen Typen mehr auf, und dabei bleibt es auch bei weiterer Vergrösserung der Variabelnzahl.

Die Resultate des § 4 gestatten aber auch noch eine andere bemerkenswerthe Formulirung. Die Substitutionen unserer orthogonalen Gruppe können nämlich auch charakterisirt werden als diejenigen homogenen linearen Substitutionen der Determinante $+1$, welche die ternäre quadratische Form

$$x^2 + y^2 + z^2 \tag{20}$$

in sich überführen. Bildet man nun von einer allgemeinen ternären quadratischen Form F die sämmtlichen Covarianten mit beliebig vielen Variabelnreihen, welche sie gegenüber der Gesammtgruppe der projectiven Transformationen besitzt, und ersetzt in ihnen die allgemeinen Coefficienten von F durch die numerischen Coefficienten der Form (20), so erhält man bekanntlich eine Invariante der orthogonalen Gruppe in dem § 1 definirten Sinne. Dass aber auch *jede solche Invariante auf dem eben angegebenen Wege erhalten werden kann*, das ist die in Aussicht genommene neue Formulirung des Satzes von § 4.

Ein allgemeines Princip, welchem sich der so formulirte Satz unterordnet, ist von Hrn. Klein in seinem Erlanger Programm*) in folgender Fassung ausgesprochen worden:

„Es sei eine Mannigfaltigkeit und zu ihrer Behandlung eine auf sie bezügliche Transformationsgruppe gegeben. Es werde das Problem vorgelegt, die in der Mannigfaltigkeit enthaltenen Gebilde hinsichtlich eines gegebenen Gebildes zu untersuchen. So kann man entweder dem System der Gebilde das gegebene hinzufügen, und es fragt sich dann nach den Eigenschaften des erweiterten Systems im Sinne der gegebenen Gruppe; oder man lasse das System unerweitert, beschränke aber die Transformationen, die man bei der Behandlung zu Grunde legt, auf diejenigen in der gegebenen Gruppe enthaltenen, welche das gegebene Gebilde ungeändert lassen (und die nothwendig wieder eine Gruppe bilden)."

In seinen späteren Arbeiten hat sich Hr. Klein von diesem Princip vielfach bei Aufstellung specieller Invariantensysteme leiten lassen.

Man könnte nun unser Resultat einfach als einen Specialfall dieses Princips auffassen und demgemäss einen besondern Beweis desselben für unnöthig ansehen wollen. Aber das würde unzutreffend sein; wir

*) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, (Erlangen 1872) p. 9.

haben es hier nicht mit dem allgemeinsten Begriff eines invarianten Gebildes, sondern mit dem sehr präcisen einer rationalen und ganzen Invariante zu thun, und wenn man diesen statt jenen in das Princip einführt, so reichen nicht nur die zu seinem Beweis dienenden einfachen Ueberlegungen keineswegs mehr aus, sondern es verliert überhaupt seine Allgemeingültigkeit. Es würde *nicht zulässig* sein, an Stelle jener etwas unbestimmten Formulirung etwa die folgende zu setzen:

„Sei eine Gruppe Γ von linearen Substitutionen dadurch definirt, dass sie alle diejenigen und nur diejenigen Substitutionen enthält, welche eine bestimmte Form F vom n^{ten} Grade in sich überführen. Man bilde einerseits das System P aller rationalen ganzen Covarianten einer allgemeinen Form n^{ten} Grades Φ gegenüber der Gruppe sämmtlicher linearer Substitutionen, andererseits das System Q aller rationalen ganzen Functionen, welche von Γ in sich transformirt werden. Das erste System geht in das zweite über, wenn man in ihm die Coefficienten der allgemeinen Form Φ durch die von F ersetzt."

Das würde in doppelter Hinsicht zu falschen Resultaten führen können. *Einerseits* nehmen wir an, eine Invariante J von F besitze einen numerischen Werth: dann wird eine Form des Systems P, welche durch andere Formen desselben sich rational und bis auf den Nenner J auch ganz ausdrückt, übergehen in eine Form von Q, welche durch andere sich rational und ganz ausdrückt, also bei Seite gelassen werden kann. Dann wird P eine Form enthalten, zu der in Q keine entsprechende vorkommt. *Andererseits* kann eine unzerlegbare Form von P übergehen in eine Form von Q, welche rational in Factoren zerlegbar ist; die letzteren sind dann Formen von Q, welchen keine entsprechenden in P zur Seite stehen. Das letztere wird insbesondere dann eintreten können, wenn die Form F auf ein irrationales kanonisches Coordinatensystem bezogen vorgelegt ist. (Man beachte z. B. die Verhältnisse, welche bei der Gruppe der Bewegungen der Euklidischen Ebene eintreten, wenn die unendlich fernen Kreispunkte einzeln adjungirt sind).

Dass in unserem speciellen Fall keine der beiden hiemit bezeichneten Möglichkeiten eintritt, bedurfte demnach eines besonderen Beweises, wie er in den §§ 3, 4 geführt worden ist. —

Auch Hr. Study hat die Invariantentheorie specieller Gruppen und namentlich die der Gruppe derjenigen linearen Substitutionen, welche eine ternäre quadratische Form in sich transformiren, zum Gegenstand seiner Untersuchungen gemacht und darüber gelegentlich Andeutungen veröffentlicht.*) Seinen freundlichen mündlichen und

*) Gordan-Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheorie Bd. II (1887) p. 155 Fussnote; Study, Methoden zur Theorie der ternären Formen (1889) p. 178

schriftlichen Mittheilungen entnehme ich mit seiner Zustimmung insbesondere noch den Satz, dass *die Gleichungen* (12) *und* (13) *das volle System der ersten Syzygien zwischen den Formen D und S bilden.*

§ 7.

Beziehungen zu Grassmann's Ausdehnungslehre.

Die Ableitung eines Vectors aus zwei andern durch Bildung der Functionen (5) entspricht in gewissem Sinne *Grassmann's äusserer Multiplication zweier Strecken* (Vectoren). Grassmann fast nämlich die Vectoren auf als extensive Grössen mit 3 Einheiten und definirt das äussere Product zweier solcher Grössen durch:*)

$$(21) \qquad [(u_1 e_1 + v_1 e_2 + w_1 e_3)(u_2 e_1 + v_2 e_2 + w_2 e_3)]$$
$$= (v_1 w_2 - w_1 v_2) e_2 e_3 + (w_1 u_2 - u_1 w_2) e_3 e_1 + (u_1 v_2 - v_1 u_2) e_1 e_2 .$$

Uebrigens repräsentirt ein solches Product bei Grassmann zunächst nicht wieder einen Vector, sondern eine Grösse zweiter Stufe, nämlich eben das von den beiden gegebenen Vectoren eingeschlossene Parallelogramm nach seinem Flächeninhalt und nach der Stellung seiner Ebene. Wollte man es wieder als Vector auffassen, so müsste man:

$$(22) \qquad e_2 e_3 = e_1, \quad e_3 e_1 = e_2, \quad e_1 e_2 = e_3$$

setzen;**) *damit würde man eine Multiplication definiren, die nicht nur nicht commutativ, sondern auch nicht associativ wäre.* Das wäre kein Hinderniss für ihre Verwendung; aber wesentlich würde sein zu bemerken: *nicht alle rationalen ganzen Vectorfunctionen gegebener Vectoren können durch blosse Wiederholung dieser Operation und Verbindung derselben mit der geometrischen Addition abgeleitet werden.* Dass das schon bei 3 gegebenen Vectoren nicht der Fall ist, davon überzeugt man sich wie folgt: Seien die gegebenen Vectoren kurz mit V_1, V_2, V_3 bezeichnet; zufolge § 5 kann man aus ihnen drei verschiedene Vectoren ableiten, welche in den Componenten jedes einzelnen der drei gegebenen linear sind; nämlich:

$$(23) \qquad S_{12} V_3, \quad S_{23} V_1, \quad S_{31} V_2;$$

und zwischen diesen besteht keine lineare Relation mit numerischen

---

(das Hesse'sche Uebertragungsprincip betr.); Berichte der sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1890, p. 172f.; dieser Annalen Bd. 39, p. 557.

*) Lineale Ausdehnungslehre (1844, wiederabgedruckt Leipzig 1878). art. 28ff. Später hat Grassmann den Terminus „äusseres Product" auf Producte von Grössen höherer Stufe eingeschränkt und das Product (21) als „combinatorisches" bezeichnet. (Ausdehnungslehre, Berlin 1862, art. 52ff.; art. 78ff.).

**) In Grassmann's Sprache würde das heissen: man geht von der Grösse zweiter Stufe zu ihrer Ergänzung in Bezug auf das Hauptgebiet (e_1, e_2, e_3) über. (Ausdehnungslehre von 1862, art. 86, 89).

Coefficienten, wenn eine solche nicht schon zwischen den gegebenen Vectoren besteht (d. h. sie liegen nicht in einer Ebene, wenn die gegebenen nicht in einer Ebene liegen). Andererseits giebt die durch (22) definirte Multiplication zwar auch drei nicht nur durch das Vorzeichen verschiedene Producte aus drei Vectoren, nämlich:

$$(24) \qquad \big[[V_1 V_2] V_3\big], \quad \big[[V_2 V_3] V_1\big], \quad \big[[V_3 V_1] V_2\big];$$

aber diese drei sind nicht von einander linear unabhängig, sondern ihre (geometrische) Summe ist identisch Null,*) sie reichen also zur Darstellung aller Vectorfunctionen der bezeichneten Art nicht aus. Umsoweniger wird das entsprechende für eine grössere Anzahl gegebener Vectorfunctionen der Fall sein.

Die Bildung der Invariante S_{12} aus zwei Vectoren V_1, V_2 erscheint bei Grassmann**) als *innere Multiplication* dieser Vectoren. Würde man diese Operation zu der durch (21) definirten noch hinzunehmen, so würde man zur Bildung aller rationalen ganzen Vectorfunctionen ausreichen, erhielte aber eine grosse Anzahl von Bildungen, die durch lineare Relationen verbunden sind. Um aus diesen von einander linear unabhängige auszuscheiden, müsste man ähnlich wie am Schlusse von § 5 verfahren, also namentlich die durch (22) definirte Multiplication nur auf die gegebenen Vectoren, nicht auf schon aus ihnen abgeleitete anwenden.

§ 8.

Beziehungen zu Hamilton's Quaternionencalcul.

Im System der Hamilton'schen Quaternionen werden die beiden Grassmann'schen Multiplicationsarten in eine zusammengefasst. Dort wird nämlich das Product zweier Vectoren nicht wieder als ein Vector aufgefasst, sondern eben als eine *Quaternion*, d. h. als Summe aus einem scalaren und einem Vectorbestandtheil: der erstere ist entgegengesetzt gleich Grassmann's innerem Product, der letztere gleich seinem äusseren Product (mit dem unter (22) vorgenommenen Uebergang zur Ergänzung). Es soll nun gezeigt werden, *dass sich in der That alle rationalen ganzen Vectorfunctionen von beliebig vielen Vectoren durch die Vectorbestandtheile ihrer im Sinne Hamilton's gebildeten Producte ausdrücken lassen.* Man wird von der Beantwortung dieser Frage die

*) D. h. sie liegen in einer Ebene (die der vierten Ebene der durch V_1, V_2, V_3 bestimmten Pyramide parallel ist) und sind den Seiten eines Dreiecks parallel und gleich. Uebrigens stehen sie zu den Vectoren (23) in Beziehungen wie: $\big[[V_1 V_2] V_3\big] = S_{13} V_2 - S_{23} V_1$. — In Grassmann's eigenem Ansatz ist das combinatorische (äussere) Product von 3 Vectoren eine *scalare* Grösse (unser D_{123}).

**) Ausdehnungslehre von 1862. art. 137ff., insbes. 143.

Beurtheilung des Werthes der Quaternionen wesentlich abhängig machen müssen; gleichwohl ist sie weder von Hamilton, noch von seinen Schülern aufgeworfen worden.

Um den ausgesprochenen Satz zu beweisen, zeigen wir zunächst, dass er für Functionen von 2 und von 3 Vectoren gilt, welche in den Componenten jedes dieser Vectoren linear sind; dann dass er für Functionen derselben Art von $n+2$ Vectoren gelten muss, wenn er für solche von n Vectoren gilt. Dabei mögen, wie in der Quaternionentheorie üblich, kleine griechische Buchstaben als Zeichen für Vectoren und die Buchstaben S, V bezw. als Zeichen für den Scalar- und den Vectortheil eines Productes benutzt werden.

Für Functionen von zwei Vectoren ist der Satz nach den Resultaten von § 5 und der Definition des Vectortheils eines Products selbstverständlich.

Für die Functionen von 3 Vectoren (23) hat man in: *)

$$\alpha S(\beta\gamma) = \tfrac{1}{2}\{V(\alpha\beta\gamma) + V(\beta\gamma\alpha)\} \tag{25}$$

die zu beweisende Darstellung explicite.

Die angekündigte vollständige Induction ist für ungerade und für gerade n getrennt zu führen. Sei zunächst für eine *ungerade* Anzahl $(2m-1)$ von Vectoren:

$$\alpha, \beta, \gamma \ldots \varkappa, \lambda$$

bereits gezeigt, dass alle Producte der Form (19) sich durch die Vectortheile der im Sinne der Quaternionentheorie verstandenen Producte jener $(2m-1)$ Vectoren linear ausdrücken lassen. Es sollen also Gleichungen der Form bestehen:

$$\alpha S(\beta\gamma) \ldots S(\varkappa\lambda) = \sum c V(\alpha\beta\gamma \ldots \varkappa\lambda), \tag{26}$$

in welchen rechts die Summe über gewisse Permutationen von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa, \lambda$ zu erstrecken ist und die c numerische Coefficienten (rationale Brüche, deren Nenner Potenzen von 2 sind) bedeuten. Die beiden Seiten der Glchg. (26) multipliciren wir rechts mit $S(\mu\nu)$ und ersetzen zunächst $V(\alpha\beta\gamma \ldots \varkappa\lambda)\, S(\mu\nu)$ durch den nach (25) gleichbedeutenden Ausdruck:

$$\tfrac{1}{2} V\big(V(\alpha\beta\gamma \ldots \varkappa\lambda) \cdot \mu\nu\big) + \tfrac{1}{2} V\big(\mu\nu\, V(\alpha\beta\gamma \ldots \varkappa\lambda)\big).$$

Es ist aber: **)

$$\cdot V(\alpha\beta\gamma \ldots \varkappa\lambda) = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma \ldots \varkappa\lambda) + \tfrac{1}{2}(\lambda\varkappa \ldots \gamma\beta\alpha); \tag{27}$$

*) Man vgl. etwa P. Kelland u. P. G. Tait, introduction to quaternions (2d ed. London 1882), art. 67, Glchg. 7.

**) Vgl. G. Dillner, dieser Ann. Bd. 11 p. 173 Gl. 17).

also folgt aus (26):

$$\alpha S(\beta\gamma)\ldots S(\varkappa\lambda)\,S(\mu\nu)$$
$$= \tfrac{1}{4}\sum c\{V(\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa\lambda\mu\nu) + V(\lambda\varkappa\ldots\gamma\beta\alpha\mu\nu) + V(\mu\nu\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa\lambda)$$
$$+ V(\mu\nu\lambda\varkappa\ldots\gamma\beta\alpha\},$$

ein Ausdruck von derselben Gestalt wie (26), w. z. b. w.

Ebenso ist der Beweis für eine *gerade* Anzahl von Vectoren zu führen; es tritt dabei nur in Glchg. (27) statt einer Summe eine Differenz auf.

Da nun für Functionen von 2 und von 3 Vectoren der ausgesprochene Satz bereits bewiesen ist, so muss er allgemein gelten.

Uebrigens ist bei grösseren Werthen von n die Anzahl der linear unabhängigen Vectorfunctionen beträchtlich kleiner, als die der nicht nur durch das Vorzeichen unterschiedenen Vectortheile von im Sinne der Quaternionentheorie genommenen Vectorproducten; die letzteren müssen also durch zahlreiche lineare Relationen verbunden sein.*) Somit können wir das Resultat dieser Untersuchung folgendermassen zusammenfassen:

Die Quaternionentheorie liefert allerdings alle rationalen ganzen Vectorfunctionen gegebener Vectoren durch die Vectorbestandtheile der Producte derselben; aber sie liefert eine grosse Anzahl überzähliger Bildungen, welche durch mannigfache — bis jetzt nicht allgemein aufgestellte — *Relationen mit einander verbunden sind.*

§ 9.

Differentialinvarianten der orthogonalen Gruppe und scalare Differentialoperatoren.

Es bleibt nun noch die Frage nach solchen Invarianten der orthogonalen Gruppe zu erledigen, welche auch Differentialquotienten nach den Coordinaten enthalten. Diese werden uns geliefert durch ein Princip, das namentlich von den englischen Invariantentheoretikern seit den ersten Arbeiten Boole's ausgiebig benutzt worden ist:**) dass nämlich die Differentialsymbole:

$$\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}$$

zu den Variabeln x, y, z *contragredient* sind. Für unsere Gruppe ist zwischen cogredienten und contragredienten Variabeln überhaupt kein

*) Aehnliche Verhältnisse bestehen übrigens auch für die Producte von Quaternionen selbst; vgl. Hölder, Göttinger Nachrichten, Jahrg. 1889 p. 34.

**) Vgl. z. B. Salmon's höhere Algebra, art. 130.

Unterschied, sodass wir die Anwendung jenes Princips auf unseren Fall folgendermassen formuliren können:

Ersetzt man in einer Scalarfunction von Vectoren die Componenten eines Vectors durch die Differentialsymbole $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ *und entwickelt den erhaltenen Ausdruck nach den für das Operiren mit solchen Symbolen geltenden Regeln**), *so erhält man eine Scalarfunction von Vectoren und ihren Ableitungen nach den Coordinaten, welche diese Ableitungen nur linear enthält;* und umgekehrt: *jede Function der letzteren Art geht in eine nicht verschwindende Function der ersteren Art über, wenn man statt der Differentialsymbole Componenten eines neuen Vectors setzt, kann also auf die angegebene Weise erhalten werden.*

Functionen, welche Producte und Potenzen von Differentialquotienten enthalten, werden dann bekanntermassen**) dadurch gewonnen, dass man zunächst mehrere Reihen unabhängiger Veränderlicher $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots$ einführt, nach diesen differentiirt und nach Ausführung der Differentiationen $x_1 = x_2 = \cdots; y_1 = y_2 = \cdots; z_1 = z_2 = \cdots$ setzt.

Lassen wir diesen allgemeinen Fall bei Seite und beschränken uns auf den für die Anwendungen wichtigen einfachen Fall, in welchem *nur Differentialquotienten nach den Variabeln einer Reihe und diese nur in der ersten Potenz vorkommen*, so können wir die Untersuchung noch folgendermassen weiterführen:

Ersetzen wir in einer *Summe* von Scalarfunctionen eine Reihe Vectorcomponenten durch Differentialsymbole, so erhalten wir dasselbe, als wenn wir diese Operation an den einzelnen Summanden vornehmen und die Resultate addiren. Ersetzen wir ferner in einem *Product* von Scalarfunctionen die Componenten eines Vectors durch Differentialsymbole, so erhalten wir einen Differentialoperator, der dasselbe Resultat giebt, wie die successive Anwendung derjenigen Operatoren, welche durch Einführung der Differentialsymbole in je einen Factor des Products entstehen. Daraus folgt: *Alle solchen scalaren Differentialoperatoren lassen sich durch Combination und Wiederholung derjenigen herstellen, welche aus den Fundamentalinvarianten* S_{ik} *und* D_{hik} *durch Einführung der Differentialsymbole hervorgehen.*

Nun sind zwei Fälle möglich: diejenigen Variabeln, welche differentiirt werden sollen, sind entweder in demselben Factor des Products enthalten, wie die Differentialsymbole, oder in einem andern. Im ersteren Falle erhalten wir einfache *Scalarfunctionen von Differential-*

---

*) $\frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ etc.

**) Vgl. z. B. Salmon art. 151 ff.

quotienten von Vectoren (Differentialinvarianten der orthogonalen Gruppe), nämlich aus S_{ik}:

$$\sigma_k = \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} + \frac{\partial w_k}{\partial z} \quad (28)$$

*) und aus D_{hik}

$$\Phi_{hk} = u_h\left(\frac{\partial w_k}{\partial y} - \frac{\partial v_k}{\partial z}\right) + v_h\left(\frac{\partial u_k}{\partial z} - \frac{\partial w_k}{\partial x}\right) + w_h\left(\frac{\partial v_k}{\partial x} - \frac{\partial u_k}{\partial y}\right). \quad (29)$$

Im zweiten Falle dagegen erhalten wir *scalare Differentialoperatoren* (Differentialparameter im Sinne von Lamé**). Aus S_{ik} nämlich gewinnen wir, wenn wir nur die Componenten des i^{ten} Vectors durch Differentialsymbole ersetzen, den Operator:

$$\psi_k = u_k \frac{\partial}{\partial x} + v_k \frac{\partial}{\partial y} + w_k \frac{\partial}{\partial y}; \quad (30)$$

wenn wir aber statt der Componenten beider Vectoren Differentialsymbole einführen:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (31)$$

Aus D_{hik} aber geht, wenn man die Elemente nur einer Zeile dieser Determinante durch Differentialsymbole ersetzt, ein Operator ψ_{hk} hervor, der von ψ_k sich nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle der Vectorcomponenten u_k, v_k, w_k die Ausdrücke (5) stehen; ersetzt man die Elemente zweier Zeilen durch Differentialsymbole, so entsteht ein identisch verschwindender Operator. Demnach können wir sagen:

Alle rationalen ganzen Scalarfunctionen beliebig vieler Vectoren, welche Differentialquotienten nach einer Variabelnreihe linear enthalten, sind Summen von Termen, welche entstehen, indem man ein symbolisches Product von Scalarfunctionen der vier Typen:

$$S_{ik},\ D_{hik},\ \sigma_k,\ \Phi_{hk}$$

und von Operatoren der drei Typen:

$$\psi_k,\ \psi_{hk},\ \Delta$$

nach bekannten Regeln entwickelt.

Dabei genügt es (vgl. den Schluss von § 4), nur solche Producte zu berücksichtigen, welche nicht mehr als einen Factor von einem der drei Typen D_{hik}, Φ_{hk}, ψ_{hk} enthalten; und auch von diesen nur diejenigen, in welchen einer der Indices einen bestimmten Werth hat.

*) Sind $u_k v_k w_k$ Componenten der Verrückung in einem elastischen Medium, so ist σ_k bekanntlich die Verdichtung.

**) Leçons sur les coordonnées curvilignes (1859) p. 6.

§ 10.

Rationale ganze Vectorfunctionen, welche Differentialquotienten linear enthalten.

Nunmehr können wir wie in § 5 von Scalarfunctionen zu Vectorfunctionen übergehen; dabei beschränken wir uns ebenso wie in den letzten Entwicklungen auf solche Functionen, welche die Differentialquotienten nur linear enthalten; und um nicht zu weit geführt zu werden, wollen wir von den Reductionen keinen Gebrauch machen, welche sich aus den Schlussbemerkungen von § 4 und § 9 ergeben.

Setzen wir in den Formeln (29)—(31) den Index $h = 0$ und nehmen wie in § 5 die Coefficienten von u_0, v_0, w_0, so finden wir, dass folgende Grössen Vectorcomponenten sind:

aus Φ_{ik}:

$$(32)\quad 2\lambda_k = \frac{\partial w_k}{\partial y} - \frac{\partial v_k}{\partial z},\quad 2\mu_k = \frac{\partial u_k}{\partial z} - \frac{\partial w_k}{\partial x},\quad 2\nu_k = \frac{\partial v_k}{\partial x} - \frac{\partial u_k}{\partial y};\ ^{*})$$

aus ΔS_{0k}:

$$(33)\qquad \Delta u_k,\ \Delta v_k,\ \Delta w_k;\ ^{**})$$

aus $\psi_0 \sigma_k$:

$$(34)\qquad \frac{\partial \sigma_k}{\partial x},\ \frac{\partial \sigma_k}{\partial y},\ \frac{\partial \sigma_k}{\partial z};\ ^{***})$$

aus $\psi_i S_{0k}$:

$$(35)\quad \begin{cases} u_i \dfrac{\partial u_k}{\partial x} + v_i \dfrac{\partial u_k}{\partial y} + w_i \dfrac{\partial u_k}{\partial z}, \\ u_i \dfrac{\partial v_k}{\partial x} + v_i \dfrac{\partial v_k}{\partial y} + w_i \dfrac{\partial v_k}{\partial z}, \\ u_i \dfrac{\partial w_k}{\partial x} + v_i \dfrac{\partial w_k}{\partial y} + w_i \dfrac{\partial w_k}{\partial z}; \end{cases}$$

aus $\psi_0 S_{ik}$:

$$(36)\quad \begin{cases} u_i \dfrac{\partial u_k}{\partial x} + v_i \dfrac{\partial v_k}{\partial x} + w_i \dfrac{\partial w_k}{\partial x}, \\ u_i \dfrac{\partial u_k}{\partial y} + v_i \dfrac{\partial v_k}{\partial y} + w_i \dfrac{\partial w_k}{\partial y}, \ ^{\dagger}) \\ u_i \dfrac{\partial u_k}{\partial z} + v_i \dfrac{\partial v_k}{\partial z} + w_i \dfrac{\partial w_k}{\partial z}. \end{cases}$$

---

*) Sind u, v, w Verrückungscomponenten, so sind λ, μ, ν die zugehörigen Drehungscomponenten (vgl. etwa Voigt, elementare Mechanik, § 26, Glchgen. 4″; § 86, Glchgen. 127′).

) und *). Die Grössen (33), (34) treten z. B. in den Differentialgleichungen der Bewegung eines elastischen isotropen Mediums bezw. mit der einen und der andern Elasticitätsconstante multiplicirt auf (a. a. O. § 38, Glchgen. 161).

†) Specielle Grössen dieser Art treten z. B. bei der Untersuchung von Wirbelbewegungen in einer incompressibeln Flüssigkeit auf (a. a. O. § 32, Glchgen. 89, 90, 90′).

Alle sonst noch zu bildenden Vectorfunctionen lassen sich auf die hier aufgezählten zurückführen; auch von den Formeln (35) und (36) kann noch die eine entbehrt werden, indem

$$(37)\quad \tfrac{1}{2}(\psi_0 S_{ik} - \psi_i S_{0k}) = u_0(v_i v_k - w_i \mu_k) + v_0(w_i \lambda_k - u_i v_k) + w_0(u_i \mu_k - v_i \lambda_k)$$

ist. Demgemäss kann das Resultat dieses Paragraphen und damit unserer ganzen Untersuchung folgendermassen formulirt werden:

Alle rationalen ganzen Vectorfunctionen beliebig vieler gegebener Vectoren und ihrer Differentialquotienten nach den Coordinaten, welche die letzteren nur linear enthalten, können erhalten werden durch Wiederholung und Combination der folgenden Operationen:

1) Geometrische Addition zweier Vectoren nach dem Parallelogrammgesetz;

2) Geometrische Multiplication zweier Vectoren (der Flächeninhalt des von ihnen eingeschlossenen Parallelogramms, aufgetragen auf der zu ihrer Ebene senkrechten Axe);

3) Bildung einer der drei Scalarfunctionen: S_{ii} (Quadrat der Länge eines Vectors), σ_i (Verdichtung, wenn der Vector i eine Verrückung vorstellt), S_{ik} (Product der Länge eines Vectors in die Projection eines andern auf ihn), und Multiplication eines Vectors mit einer dieser Scalarfunctionen;

4) Bildung der Drehungscomponenten λ, μ, ν, der Differentialquotienten der Verdichtung nach den Coordinaten $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial z}$, der Ausdrücke Δu, Δv, Δw aus *einem* Vector;

5) Bildung der Grössen (35) oder (36) aus *zwei* Vectoren.

Als besonders bemerkenswerth erscheint bei dieser Lösung der von Hrn. Drude gestellten Aufgabe der Umstand, dass alle Vectorfunctionen beliebig vieler Variabeln mit linear vorkommenden Differentialquotienten beliebig hoher Ordnung durch Operationen erzeugt werden können, von welchen jede einzelne höchstens zwei Vectoren in Verbindung setzt und höchstens zweimalige Differentiation verlangt.

Zum Schlusse sei es noch gestattet, auf zwei auch für die Anwendungen interessante Verallgemeinerungen der vorgelegten Aufgabe hinzuweisen, deren Lösung wesentlich mit denselben Mitteln gelingen muss.

Man kann einmal bei der orthogonalen homogenen Gruppe in 3 Variabeln stehen bleiben, aber nach Functionen fragen, welche sich wie die Quadrate und Producte von Vectoren, oder, was hier dasselbe ist, wie die Coefficienten einer quadratischen ternären Form verhalten.

Dabei würden die § 6 a. E. erwähnten weitergehenden Untersuchungen von Hrn. Study zur Verwendung kommen. — Von physikalischen Grössen gehören hieher insbesondere die Componenten von „strain" und „stress" in isotropen Medien.

Solche Functionen haben schon 1855/56 W. J. M. Rankine und W. Thomson mit invariantentheoretischen Mitteln, unter Anlehnung an die ersten Publicationen Sylvester's und Cayley's untersucht (Philosophical Transactions of the R. Society of London, vol. 146, pt. I. II); von neueren Untersuchungen würden die von C. Niven im 27. Bde. der Philos. Trans. of the R. Soc. of Edinburgh (1876), von W. J. C. Sharp im 13. Bde. der Proceedings of the London Mathematical Society 1882, und von B. Élie (la fonction vectorielle, thèse de Bordeaux 1892, insbes. p. 27 ff.) zu vergleichen sein.

Andererseits kann man die Gruppe *aller* Bewegungen des (Euklidischen) Raumes zu Grunde legen; dann sind von physikalischem Interesse insbesondere solche Grössen, welche sich dieser Gruppe gegenüber wie die Componenten einer Schraubung (im Sinne Sir R. St. Ball's) verhalten.

Göttingen, Januar 1893.

Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π.*)

Von

David Hilbert in Königsberg i. Pr.

Man nehme an, die Zahl e genüge der Gleichung n^{ten} Grades

$$a + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0,$$

deren Coefficienten $a, a_1, \ldots, a_n$ ganze rationale Zahlen sind. Wird die linke Seite dieser Gleichung mit dem Integral

$$\int_0^\infty = \int_0^\infty z^\varrho [(z-1)\,(z-2)\cdots(z-n)]^{\varrho+1} e^{-z} dz$$

multiplicirt, wo ϱ eine ganze positive Zahl bedeutet, so entsteht der Ausdruck

$$a\int_0^\infty + a_1 e\int_0^\infty + a_2 e^2\int_0^\infty + \cdots + a_n e^n\int_0^\infty$$

und dieser Ausdruck zerlegt sich in die Summe der beiden folgenden Ausdrücke:

$$P_1 = a\int_0^\infty + a_1 e\int_1^\infty + a_2 e^2\int_2^\infty + \cdots + a_n e^n\int_n^\infty,$$

$$P_2 = a_1 e\int_0^1 + a_2 e^2\int_0^2 + \cdots + a_n e^n\int_0^n.$$

Die Formel

$$\int_0^\infty z^\varrho e^{-z} dz = \varrho!$$

zeigt, dass das Integral $\int_0^\infty$ eine ganze rationale durch $\varrho!$ theilbare Zahl ist und ebenso leicht folgt, wenn man bezüglich die Substitutionen $z = z' + 1, z = z' + 2, \ldots, z = z' + n$ anwendet, dass

$$e\int_1^\infty, e^2\int_2^\infty, \ldots, e^n\int_n^\infty$$

ganze rationale durch $(\varrho+1)!$ theilbare Zahlen sind. Daher ist auch

*) Abdruck aus Nr. 2 der Göttinger Nachrichten v. J. 1893.

P_1 eine durch $\varrho!$ theilbare ganze Zahl und zwar gilt, wie man sieht, nach dem Modul $\varrho+1$ die Congruenz

$$\frac{P_1}{\varrho!} \equiv \pm a(n!)^{\varrho+1}. \qquad (\varrho+1) \tag{1}$$

Andererseits ist, wenn mit K bezüglich k die absolut grössten Werthe bezeichnet werden, welche die Functionen

$$z(z-1)(z-2)\ldots(z-n)$$

bezüglich

$$(z-1)(z-2)\ldots(z-n)e^{-z}$$

in dem Intervalle $z=0$ bis $z=n$ annehmen:

$$\left|\int^1\right| < kK\varrho, \quad \left|\int^2\right| < 2kK\varrho, \cdots \left|\int^n\right| < nkK\varrho$$

und hieraus folgt, wenn zur Abkürzung

$$\varkappa = \{|a_1 e| + 2|a_2 e^2| + \cdots + n|a_n e^n|\}k$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$|P_2| < \varkappa K\varrho. \tag{2}$$

Nun bestimme man eine ganze positive Zahl ϱ, welche *erstens* durch die ganze Zahl $a \,.\, n!$ theilbar ist und für welche *zweitens* $\varkappa \frac{K^\varrho}{\varrho!} < 1$ wird. Es ist dann $\frac{P_1}{\varrho!}$ infolge der Congruenz (1) eine nicht durch $\varrho+1$ theilbare und daher nothwendig von 0 verschiedene ganze Zahl und da überdies $\frac{P_2}{\varrho!}$ infolge der Ungleichung (2) absolut genommen kleiner als 1 wird, so ist die Gleichung

$$\frac{P_1}{\varrho!} + \frac{P_2}{\varrho!} = 0$$

unmöglich.

Man nehme an, es sei π eine algebraische Zahl und zwar genüge die Zahl $\alpha_1 = i\pi$ einer Gleichung n^{ten} Grades mit ganzzahligen Coefficienten. Bezeichnen wir dann mit $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die übrigen Wurzeln dieser Gleichung, so muss, da $1 + e^{i\pi}$ den Werth 0 hat, auch der Ausdruck

$$(1+e^{\alpha_1})(1+e^{\alpha_2})\cdots(1+e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_N}$$

den Werth 0 haben und hierin sind, wie man leicht sieht, die N Exponenten $\beta_1, \ldots, \beta_N$ die Wurzeln einer Gleichung N^{ten} Grades mit ganzzahligen Coefficienten. Sind überdies etwa die M Exponenten $\beta_1, \ldots, \beta_M$ von 0 verschieden, während die übrigen verschwinden, so sind diese M Exponenten $\beta_1, \ldots, \beta_M$ die Wurzeln einer Gleichung M^{ten} Grades von der Gestalt

$$f(z) = bz^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_M = 0,$$

deren Coefficienten ebenfalls ganze rationale Zahlen sind und in welcher

insbesondere der letzte Coefficient b_M von Null verschieden ist. Der obige Ausdruck erhält dann die Gestalt

$$a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_M},$$

wo a eine ganze positive Zahl ist.

Man multiplicire diesen Ausdruck mit dem Integral

$$\int_0^\infty = \int_0^\infty z^\varrho [g(z)]^{\varrho+1} e^{-z} dz,$$

wo ϱ wiederum eine ganze positive Zahl bedeutet und wo zur Abkürzung $g(z) = b^M f(z)$ gesetzt ist; dann ergiebt sich

$$a\int_0^\infty + e^{\beta_1}\int_0^\infty + e^{\beta_2}\int_0^\infty + \cdots + e^{\beta_M}\int_0^\infty$$

und dieser Ausdruck zerlegt sich in die Summe der beiden folgenden Ausdrücke:

$$P_1 = a\int_0^\infty + e^{\beta_1}\int_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2}\int_{\beta_2}^\infty + \cdots + e^{\beta_M}\int_{\beta_M}^\infty,$$

$$P_2 = e^{\beta_1}\int_0^{\beta_1} + e^{\beta_2}\int_0^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_M}\int_0^{\beta_M},$$

wo allgemein das Integral $\int_{\beta_i}^\infty$ in der complexen z-Ebene vom Punkte $z = \beta_i$ längs einer zur Axe der reellen Zahlen parallelen Geraden bis zu $z = +\infty$ hin und das Integral $\int_0^{\beta_i}$ vom Punkte $z = 0$ längst der geraden Verbindungslinie bis zum Punkte $z = \beta_i$ hin zu erstrecken ist.

Das Integral $\int_0^\infty$ ist wieder gleich einer ganzen rationalen durch $\varrho!$ theilbaren Zahl und zwar gilt, wie man sieht, nach dem Modul $\varrho + 1$ die Congruenz

$$\frac{1}{\varrho!}\int_0^\infty \equiv b^{\varrho M + M} b_M^{\varrho+1}. \qquad (\varrho+1)$$

Mittelst der Substitution $z = z' + \beta_i$ und wegen $g(\beta_i) = 0$ ergiebt sich ferner

$$e^{\beta_i}\int_{\beta_i}^\infty = \int_0^\infty (z'+\beta_i)^\varrho [g(z'+\beta_i)]^{\varrho+1} e^{-z'} dz' = (\varrho+1)!\, G(\beta_i),$$

wo $G(\beta_i)$ eine ganze ganzzahlige Function von β_i bedeutet, deren Grad in β_i unterhalb der Zahl $\varrho M + M$ bleibt und deren Coefficienten sämmtlich durch $b^{\varrho M+M}$ theilbar sind. Da $\beta_1, \ldots, \beta_M$ die Wurzeln

der ganzzahligen Gleichung $f(z) = 0$ sind und mithin durch Multiplication mit dem ersten Coefficienten b zu *ganzen* algebraischen Zahlen werden, so ist

$$G(\beta_1) + G(\beta_2) + \cdots + G(\beta_M)$$

nothwendig eine *ganze rationale* Zahl. Hieraus folgt, dass der Ausdruck P_1 gleich einer ganzen rationalen durch $\varrho!$ theilbaren Zahl wird und zwar gilt nach dem Modul $\varrho + 1$ die Congruenz

$$\frac{P_1}{\varrho!} \equiv a b^{\varrho M + M} b_M^{\varrho+1}. \qquad (\varrho + 1) \tag{3}$$

Andererseits ist, wenn mit K bezüglich k die grössten absoluten Beträge bezeichnet werden, welche die Functionen $zg(z)$ bezüglich $g(z)e^{-z}$ auf den geradlinigen Integrationsstrecken zwischen $z = 0$ bis $z = \beta_i$ annehmen:

$$\left| \int_0^{\beta_i} \right| < |\beta_i| k K^\varrho \qquad (i = 1, 2, \ldots, M)$$

und hieraus folgt, wenn zur Abkürzung

$$\varkappa = \{ |\beta_1 e^{\beta_1}| + |\beta_2 e^{\beta_2}| + \cdots + |\beta_M e^{\beta_M}| \} k$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$|P_2| < \varkappa K^\varrho. \tag{4}$$

Nun bestimme man eine ganze positive Zahl ϱ, welche *erstens* durch $a b b_M$ theilbar ist und für welche *zweitens* $\varkappa \frac{K^\varrho}{\varrho!} < 1$ wird. Es ist dann $\frac{P_1}{\varrho!}$ in Folge der Congruenz (3) eine nicht durch $\varrho + 1$ theilbare und daher nothwendig von 0 verschiedene ganze Zahl und da überdies $\frac{P_2}{\varrho!}$ in Folge der Ungleichung (4) absolut genommen kleiner als 1 wird, so ist die Gleichung

$$\frac{P_1}{\varrho!} + \frac{P_2}{\varrho!} = 0$$

unmöglich.

Es ist leicht zu erkennen, wie auf dem eingeschlagenen Wege ebenso einfach auch der allgemeinste Lindemann'sche Satz über die Exponentialfunction sich beweisen lässt.

Königsberg i. Pr., den 5. Januar 1893.

Beweis der Transcendenz der Zahl *e*.

Von

A. Hurwitz in Zürich.*)

Einer brieflichen Mittheilung von Herrn Hilbert verdanke ich die Kenntniss seines neuen, überaus einfachen Beweises für die Transcendenz der Zahl *e*.

Ich habe nun bemerkt, dass man bei diesem Beweise die Benutzung der Integrale vermeiden kann, so dass der Beweis sich nur noch auf die ersten Elemente der Differentialrechnung stützt. In den folgenden Zeilen möchte ich mir erlauben, diese Modification des Hilbert'schen Beweises kurz mitzutheilen**).

Bezeichnet $f(x)$ eine ganze rationale Function r^{ten} Grades von x, und setzt man zur Abkürzung

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(r)}(x), \tag{1}$$

so ist der Differentialquotient von $e^{-x}F(x)$ gleich $-e^{-x}f(x)$. Zufolge des bekannten Satzes:

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(\vartheta x)\ (0 < \vartheta < 1).$$

besteht daher die Gleichung

$$e^{-x}F(x) - F(0) = -xe^{-\vartheta x}f(\vartheta x),$$

oder

$$F(x) - e^{x}F(0) = -xe^{(1-\vartheta)x}f(\vartheta x), \quad (0<\vartheta<1). \tag{2}$$

Angenommen nun, die Zahl e genüge der Gleichung

$$C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \cdots + C_n e^n = 0, \tag{3}$$

wobei $C_0, C_1, C_2, \ldots C_n$ ganze Zahlen bedeuten, von denen die erste C_0, unbeschadet der Allgemeinheit, als von Null verschieden und positiv vorausgesetzt werde.

Ich wende nun die Gleichung (2) auf die Function

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p\,(2-x)^p \cdots (n-x)^p$$

*) Abgedruckt aus Nr. 4 der Göttinger Nachrichten v. J. 1893.

**) Herr Hilbert hat übrigens, wie ich von ihm neuerdings erfahre, auch schon gelegentlich eines Vortrages Andeutungen gegeben, wie man die Integrale (und zugleich das Differenziren) bei seinem Beweise vermeiden kann, indem man die Integrale durch Grenzwerthe ersetzt.

an, wo p eine Primzahl bedeutet, die grösser als die grössere der beiden Zahlen n und C_0 ist. Setzt man dann der Reihe nach $x = 1, 2, \ldots n$, so ergiebt sich

$$(4) \qquad \begin{cases} F(1) - e\,F(0) = \varepsilon_1, \\ F(2) - e^2 F(0) = \varepsilon_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ F(n) - e^n F(0) = \varepsilon_n, \end{cases}$$

wo

$$\varepsilon_k = -k \cdot e^{(1-\vartheta)k} \frac{(\vartheta k)^{p-1}(1-\vartheta k)^p \ldots (n-\vartheta k)^p}{(p-1)!} \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

mit wachsendem p unter alle Grenzen sinkt. Man erhält aber nach (1) den Werth von $F(k)$ offenbar, indem man $f(k+h)$ nach Potenzen von h entwickelt, und sodann die Potenz $h, h^2, h^3, \ldots$ bezüglich durch $1!, 2!, 3!$, ersetzt. Daher sind

$$F(1), F(2), \ldots F(n)$$

ganze Zahlen, die durch p theilbar sind, $F(0)$ eine durch p nicht theilbare ganze Zahl.

Aus den Gleichungen (4) folgt nun mit Rücksicht auf (3):

$$C_1 F(1) + C_2 F(2) + \cdots + C_n F(n) + C_0 F(0) = C_1 \varepsilon_1 + C_2 \varepsilon_2 + \cdots + C_n \varepsilon_n.$$

Da die rechte Seite mit wachsendem p unter alle Grenzen sinkt, die linke Seite aber stets eine ganze Zahl ist, so muss

$$(5) \qquad C_1 F(1) + C_2 F(2) + \cdots + C_n F(n) + C_0 F(0) = 0$$

sein, wenn man die Primzahl p genügend gross wählt. Die Gleichung (5) ist aber unmöglich, da auf der linken Seite eine durch p nicht theilbare ganze Zahl steht. Die Annahme e genüge einer Gleichung der Gestalt (3), führt also auf einen Widerspruch, die Annahme ist also unzulässig; mit anderen Worten: e ist eine transcendente Zahl.*)

Zürich, den 18. Januar 1893.

---

*) Herr Gordan hat kürzlich eine Abänderung des obigen Beweises gegeben, bei welcher nur von der Reihenentwicklung der Function e^x Gebrauch gemacht wird. Vgl. Comptes Rendus 1893. [Juli 1893].

Transcendenz von e und π.

Von

P. Gordan in Erlangen.

Hermite hat die Transcendenz von e und Lindemann die von π bewiesen, d. h. sie haben gezeigt, dass keine ganze Function mit ganzzahligen Coefficienten e oder π zur Wurzel hat.

Neuerdings haben Hilbert und Hurwitz Vereinfachungen des Beweises angebracht, in Folge deren er sich folgendermassen gestaltet.

Die Function e^x ist durch die Reihe definirt:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots$$

Dieselbe geht, wenn man die symbolische Bezeichnung einführt:

$$r! = h^r$$

und mit dieser Grösse und einer beliebigen ganzen Zahl c_r multiplicirt, in die Formel über:

$$c_r h^r e^x = c_r (x+h)^r + c_r x^r u_r \ldots \tag{1}$$

wo u_r die Reihe:

$$u_r = \frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{r+1 \cdot r+2} + \cdots$$

bedeutet. Ist:

$$\xi = \text{mod. } x$$

so hat man:

$$\text{mod. } u_r < e^\xi$$

und wenn man:

$$u_r = q_r e^\xi$$

setzt:

$$\text{mod. } q_r < 1.$$

Aus der Formel (1) folgen nun die folgenden:

$$c_r h^r e^x = c_r (x+h)^r + c_r x^r q_r e^\xi,$$

$$e^x \sum_{r=0}^{r=s} c_r h^r = \sum_{r=0}^{r=s} c_r (x+h)^r + e^\xi \sum_{r=0}^{r=s} c_r q_r x^r$$

und, wenn man:

$$\sum_{r=0}^{r=s} c_r x^r = \varphi(x); \qquad \sum_{r=0}^{r=s} c_r q_r x^r = \psi(x)$$

setzt:

$$e^x \varphi(h) = \varphi(x+h) + e^x \psi(x). \tag{2}$$

Giebt es nun eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten:

$$\sum_{x=0}^{x=n} C_x e^x = 0,$$

so wird aus Formel (2):

$$0 = \sum_{x=0}^{x=n} C_x \varphi(x+h) + \sum_{x=0}^{x=n} C_x \psi(x) e^x. \tag{3}$$

Wählt man für φ die Function:

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} (1-x, 2-x \ldots n-x)^p$$

und für p eine Primzahl grösser als die Zahlen m und C_0, so werden in F. (3) die Grössen:

$$\varphi(h+x)$$

ganze Zahlen.

$$\varphi(h+1),\ \varphi(h+2) \ldots \varphi(h+n)$$

haben den Factor p,

$$C_0 \varphi(h)$$

hat ihn nicht.

Lässt man p wachsen, so werden φ und ψ beliebig klein, Formel (3) ist unmöglich und die Zahl e transcendent.

Wäre ix die Wurzel einer Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten

$$c(x-w_1)(x-w_2) \ldots (x-w_\varrho) = 0, \tag{4}$$

so hätte man die Formel:

$$(1+e^{w_1})(1+e^{w_2}) \cdots (1+e^{w_\varrho}). \tag{5}$$

Befinden sich unter den Summen

$$w_x;\ w_i + w_x;\ w_i + w_x + w_\lambda \ldots$$

$C-1$ verschwindende Grössen und bezeichnet man die übrigen durch:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ldots \alpha_n$$

und ihre Moduln durch:

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots a_n,$$

so wird Formel (5):

$$0 = C + \sum_{x=1}^{x=n} e^{\alpha_x}. \tag{6}$$

Sowohl die symmetrischen Functionen der cw_x als auch die der $c\alpha_x$ sind ganze Zahlen.

Nach Formel (2) wird dann:

$$0 = C\varphi(h) + \sum_{x=1}^{x=n} \varphi(\alpha_x + h) + \sum_{x=1}^{x=n} e^{\alpha_x} \psi(\alpha_x). \tag{7}$$

Dieses Mal sei:

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} c^{np+p-1}(x-\alpha_1 \cdot x-\alpha_2 \cdots x-\alpha_n)^p$$

und p eine Primzahl grösser als die Zahlen:

$$C;\ n;\ c;\ c^n \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n.$$

Die Grössen $\varphi(h)$ und $\sum_{x=1}^{x=n} \varphi(\alpha_x + h)$ sind ganze Zahlen:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \varphi(\alpha_x + h)$$

hat den Factor p; $C\varphi(h)$ aber nicht.

Wächst p, so werden die Moduln von φ und ψ beliebig klein.

Die Formel (7) ist unmöglich und daher π eine transcendente Zahl.

Erlangen im Mai 1893.

Ueber symmetrische Functionen von mehreren Reihen von Veränderlichen.

Von

Fr. Junker in Urach.

In der Theorie der symmetrischen Functionen von einer Reihe von Veränderlichen (Elementen) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$ handelt es sich darum, die allgemeinste symmetrische Function

$$\sum x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \ldots x_i^{a_i}$$

durch die Elementarfunctionen

$$\Sigma x_1,\ \Sigma x_1 x_2,\ \Sigma x_1 x_2 x_3, \ldots,\ \Sigma x_1 x_2 x_3 \ldots x_r$$

darzustellen, eine Aufgabe, die jetzt als vollständig gelöst angesehen werden kann.

Eine ähnliche Frage lässt sich auch für die symmetrischen Functionen von zwei Reihen von Elementen

$$x_1 y_1,\ x_2 y_2,\ x_3 y_3, \ldots, x_r y_r$$

oder allgemein für die Functionen von mehr Reihen von solchen stellen. Die Lösung dieser Frage ist jedoch nicht so einfach, indem hier, wie wir sehen werden, bereits für die Elementarfunctionen dieser Gruppen von Elementen besondere Beziehungen bestehen.

Bei einer Reihe von Veränderlichen ist die Zahl der Elemente gleich der Anzahl der Elementarfunctionen. Die letzteren werden deshalb auch für jeden Werth der Veränderlichen vollständig unabhängig von einander sein müssen. Hat man jedoch zwei Reihen von Elementen, so ist deren Anzahl kleiner als die der Elementarfunctionen. Unter letzteren verstehen wir die folgenden symmetrischen Functionen:

$$\Sigma x_1,\ \Sigma y_1;\ \Sigma x_1 x_2,\ \Sigma x_1 y_2,\ \Sigma y_1 y_2;\ \Sigma x_1 x_2 x_3,\ \Sigma x_1 x_2 y_3,\ \Sigma x_1 y_2 y_3,$$
$$\Sigma y_1 y_2 y_3; \ldots; \Sigma x_1 x_2 x_3 \ldots x_r\ \Sigma x_1 x_2 x_3 \ldots x_{r-1} y_r, \ldots, \Sigma y_1 y_2 y_3 \ldots y_r,$$

also im Ganzen $\binom{r+2}{r} - 1 = \frac{r}{2}(r+3)$ Grössen. Wir schliessen deshalb, dass letztere nicht unabhängig von einander sein können, sondern

durch gewisse identische Relationen untereinander zusammenhängen müssen.

Die Frage nach diesen Relationen ist bis jetzt noch von Niemand behandelt worden, wenngleich die Theorie der symmetrischen Functionen von mehreren Reihen von Elementen schon einige interessante Bearbeitungen gefunden hat.

Mit Hülfe der binären symmetrischen Functionen gelang es schon Poisson, die einförmigen Functionen von mehreren Reihen von Elementen, welche von der Form $\Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} z_1^{\gamma_1} \ldots$ sind, durch elementare darzustellen.

Im Jahre 1852 hat Schläfli in seiner Abhandlung über die Resultante eines Systems von mehreren algebraischen Gleichungen*) auf indirectem Wege gezeigt, dass sich jede mehrförmige symmetrische Function von beliebig vielen Reihen

$$\sum x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \ldots \times x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \ldots \times \ldots \times x_r^{\alpha_r} y_r^{\beta_r} \ldots$$

durch nur einförmige und mithin auch durch elementare Functionen darstellen lässt. Bei dieser Gelegenheit hat auch Schläfli, wohl als der erste, darauf hingewiesen, dass zwischen den Elementarfunctionen von mehreren Reihen von Elementen identische Relationen bestehen, mit deren Hülfe man gewisse Ausdrücke der ersteren umformen könne. Ueber die Natur und die Anzahl dieser Identitäten sowie über die Art und Weise ihrer Darstellung hat er jedoch nichts angegeben.

In neuerer Zeit hat Herr Macmahon**) die symmetrischen Functionen von zwei Reihen von Elementen eingehender behandelt und interessante Sätze über dieselben aufgestellt. Da jedoch Herr Macmahon diese Functionen ohne Annahme einer bestimmten Anzahl von Elementen betrachtete, so ist ihm auch die Frage nach den Relationen zwischen den Elementarfunctionen fern geblieben, wiewohl einige derselben schon früher bekannt waren (siehe § 17).

In einem früheren Aufsatz (Annalen, Bd. 38) habe ich im Anschluss an meine Dissertation und auf Anregung von Herrn Brill eine Methode entwickelt, welche die Bildung der Relationen für beliebig viele Reihen gestattet. Ich bin aber damals auf die Erledigung der Frage nach sämmtlichen (unabhängigen) Relationen, sowie auf die weiteren nach den niedrigsten und höchsten Relationen nicht eingegangen, welche für eine bestimmte Anzahl von Elementen vorhanden sind. Um dieselben beantworten zu können, ist es nöthig, weiter auszuholen und auf die Darstellung der symmetrischen Functionen durch elementare und einförmige einzugehen; es wird sich nämlich zeigen, dass diese

*) Siehe Anmerkung in § 5.

**) Siehe Anmerkung in § 4.

in innigem Zusammenhang mit den Relationen steht und dass sich die letzteren geradezu von den ersteren herleiten lassen. Ich beabsichtige deshalb, im folgenden *Methoden* und *Operationen zu entwickeln, welche zur Darstellung sämmtlicher symmetrischen Functionen* und *der Relationen zwischen den einförmigen und elementaren Functionen führen.* Die Untersuchung zerfällt in zwei Theile. In dem ersten werden die mehrförmigen symmetrischen Functionen für beliebig viele Reihen behandelt und Beziehungen zwischen diesen und den einförmigen, bezw. den elementaren Functionen entwickelt, welche in jedem einzelnen Fall Veranlassung zur Aufstellung von 6 verschiedenen Tabellen geben. Dieselben sind auf Anregung von Herrn Brill in ausgedehntem Masse ausgeführt worden; sie sollen in einem späteren Aufsatz systematisch zusammengestellt werden, so dass sie jederzeit leicht benutzt werden können. Der zweite Theil beschäftigt sich mit der Darstellung der Relationen zwischen den elementaren und einförmigen Functionen, sowie mit der Erledigung der vorgenannten Fragen. Um die Fruchtbarkeit der Methoden an practischen Beispielen zu zeigen, sind die Relationen des ternären Gebiets bis zum Gewicht 9 gebildet worden.

I. Theil.

Symmetrische Functionen.

Bevor wir in den Gegenstand selbst eintreten, wird es nöthig sein, die gebrauchten Bezeichnungen und einige neue Benennungen vorauszuschicken, um in einem Gebiet, das bis jetzt noch wenig im Zusammenhang behandelt ist, eine leichte Fassung der Sätze und Beweise zu ermöglichen.

1. Definitionen und Erklärungen.

§ 1.

Das System der Gruppen und Reihen.

Im Nachfolgenden sei mit den Buchstaben

$$x, y, z, \ldots, w$$

eine Anzahl (n) von Grössen bezeichnet, welche im allgemeinen von einander unabhängig sein, aber doch zu einer Gruppe $P(xyz \ldots w)$ zusammengefasst werden sollen, innerhalb welcher jede ihren bestimmten Platz einnimmt. Mehrere (r) derartige Gruppen, welche sich durch untere Indices von einander unterscheiden, bilden ein *System* S, welches dargestellt sein möge durch:

$$(1)\qquad \begin{cases} P_1(x_1 y_1 z_1 \ldots w_1), \\ P_2(x_2 y_2 z_2 \ldots w_2), \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ P_r(x_r y_r z_r \ldots w_r). \end{cases}$$

Für r Gruppen von je n Elementen ist die Zahl der Elemente des ganzen Systems rn.

Alle Elemente der verschiedenen Gruppen des Systems S, welche durch denselben Buchstaben ausgedrückt sind, sollen eine Reihe von gleichnamigen (oder gleichwerthigen) *Elementen bilden.*

Eine solche ist z. B.

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_r.$$

Da jede Gruppe des Systems (1) n Elemente besitzt, so erhalten wir die n Reihen von je r gleichnamigen Elementen:

$$(2)\qquad \begin{cases} R_1(x_1 x_2 x_3 \ldots x_r), \\ R_2(y_1 y_2 y_3 \ldots y_r), \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ R_n(w_1 w_2 w_3 \ldots w_r). \end{cases}$$

§ 2.

Die symmetrischen Functionen.

Eine ganze Function der Elemente des Systems (1), *welche sich nicht ändert, wenn man die Elemente irgend einer Gruppe mit den entsprechenden irgend einer andern vertauscht, ist eine symmetrische Function dieser Gruppen.*

Beispielsweise ist

$$\Sigma x_1^2 y_2 z_3 = x_1^2 y_2 z_3 + x_1^2 y_3 z_2 + x_2^2 y_3 z_1 + x_2^2 y_1 z_3 + x_3^2 y_1 z_2 + x_3^2 y_2 z_1$$

eine symmetrische Function der drei Gruppen von je drei Elementen

$$P_1(x_1 y_1 z_1),$$
$$P_2(x_2 y_2 z_2),$$
$$P_3(x_3 y_3 z_3).$$

Die Summe der Exponenten sämmtlicher Elemente irgend eines Glieds einer symmetrischen Function wird als *Gewichtssahl* oder kurz als *Gewicht* derselben bezeichnet.

Für die angegebene Function

$$\Sigma x_1^2 y_2 z_3$$

ist das Gewicht

$$2 + 1 + 1 = 4.$$

Jede symmetrische Function kann sowohl hinsichtlich der Zahl der Gruppen als auch hinsichtlich der Zahl der verschiedenen Reihen betrachtet werden, welche sie in irgend einem Glied enthält.

Treten in einem solchen die Elemente von r verschiedenen Gruppen auf, so soll sie dem herkömmlichen Gebrauche gemäss eine *r-förmige* oder *r-theilige* (symmetrische) Function heissen. Eine solche ist

$$(1) \qquad J = \sum x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \cdots \times x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \cdots \times \cdots \times x_r^{\alpha_r} y_r^{\beta_r} \cdots .$$

Die r Functionen

$$J_i^{q_i} = x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i} z_i^{\gamma_i} \ldots,$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, r)$$

aus denen jedes Glied zusammengesetzt ist, nenne ich Theile oder Theilfunctionen der Function

$$J = \sum J_1^{q_1} J_2^{q_2} J_3^{q_3} \ldots J_r^{q_r},$$

und die Zahlen

$$q_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \cdots$$

Theilgewichte der letzteren.

Das Totalgewicht oder kurz das Gewicht der Function J ist dann angegeben durch

$$Q = q_1 + q_2 + \cdots + q_r = \sum_1^r q_1 .$$

Je nachdem eine symmetrische Function in irgend einem Glied nur die Elemente von einer, von zwei, von drei, ..., von r Gruppen enthält, unterscheiden wir demnach einförmige, zweiförmige, dreiförmige, ..., r-förmige (eintheilige, zweitheilige, dreitheilige, ..., r-theilige) symmetrische Functionen.

Setzen wir an Stelle der Elemente $x, y, z, t, \ldots$ die Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots, \underline{10}, \underline{11}, \ldots$ so können wir eine r-förmige Function auch angeben durch

$$J = (1^{\alpha_1} 2^{\beta_1} 3^{\gamma_1} \ldots,\ 1^{\alpha_2} 2^{\beta_2} 3^{\gamma_2} \ldots, \ldots,\ 1^{\alpha_r} 2^{\beta_r} 3^{\gamma_r} \ldots)$$

oder

$$= (\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1 \ldots,\ \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2 \ldots, \ldots,\ \alpha_r\ \beta_r\ \gamma_r \ldots),$$

wo die r Theilfunctionen durch Kommata von einander getrennt sind.

Eine symmetrische Function, welche linear hinsichtlich der Elemente jeder Gruppe ist, für welche also die Theilgewichte

$$q_1 = q_2 = q_3 = \cdots = q_r = 1$$

sämmtlich gleich 1 sind, soll eine (r-förmige) *Elementarfunction* heissen.

So ist z. B.

$$\Sigma x_1 x_2 y_3 z_4 = (1, 1, 2, 3,) = x_1 x_2 y_3 z_4 + x_1 x_2 y_4 z_3 + x_1 x_3 y_4 z_2 + \cdots$$

eine 4-förmige Elementarfunction von 4 oder mehr Gruppen

$$P_i(x_i y_i z_i).$$

Ich bezeichne in der Folge diese Functionen

mit $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ oder mit $a_{1234\cdots}$,

wo die Stellung der unteren Indices beliebig ist und die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... nur bezw. den Reihen

$$x_1 x_2 x_3 \ldots; \; y_1 y_2 y_3 \ldots; \; z_1 z_2 z_3 \ldots; \; t_1 t_2 t_3 \ldots$$

entsprechen sollen. Es ist deshalb beispielsweise

$$\Sigma x_1 x_2 y_3 z_4 = a_{1123} = a_{1132} = a_{1213} = a_{1231} = \cdots$$

Der leichteren Uebersicht halber mögen hier einige derselben zusammengestellt werden:

$$\Sigma x_1 = a_1,$$

$$\begin{array}{lll} \Sigma x_1 x_2 = a_{11}, & \Sigma x_1 y_2 = a_{12}, & \Sigma y_1 y_2 = a_{22}, \\ \Sigma x_1 x_2 x_3 = a_{111}, & \Sigma y_1 y_2 y_3 = a_{222}, & \Sigma z_1 z_2 z_3 = a_{333}, \\ \Sigma y_1 y_2 z_3 = a_{223}, & \Sigma z_1 z_2 x_3 = a_{331}, & \Sigma x_1 x_2 y_3 = a_{112}, \\ \Sigma y_1 z_2 z_3 = a_{233}, & \Sigma z_1 x_2 x_3 = a_{311}, & \Sigma x_1 y_2 y_3 = a_{122}, \\ & \Sigma x_1 y_2 z_3 = a_{123}, & \end{array}$$

. . . . . .

. . . . . .

Für ein System von r Gruppen von je n Elementen erhalten wir

$\binom{n}{1}$ Elementarfunctionen vom Gewicht 1,

$\binom{n}{2}$ „ „ „ 2,

. . . . . .

. . . . . .

$\binom{n}{r}$ „ „ „ r.

Die Anzahl aller Elementarfunctionen einschliesslich derjenigen vom Gewicht r ist demnach

$$e = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+r}{r} - 1.$$

Da die einförmigen symmetrischen Functionen in mannigfacher Beziehung den elementaren als gleichberechtigt gegenüberstehen, so sollen sie in ähnlicher Weise durch den deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}$ bezeichnet und die verschiedenen Reihen $x, y, z, \ldots$, welche in denselben auftreten, ebenfalls durch untergesetzte Indices angegeben werden.

Nach dieser Bezeichnung ist beispielsweise die (einförmige) Function $\Sigma x_1^2 y_1 z_1^2$ ausgedrückt durch

$$\Sigma x_1^2 y_1 z_1^2 = \mathfrak{a}_{11233}.$$

Betrachten wir eine symmetrische Function hinsichtlich der Zahl der verschiedenen Reihen von Elementen, welche in einem Glied auftreten, so können wir von *einreihigen*, *zweireihigen*, ..., *mehrreihigen* Functionen sprechen.

Die Function $\Sigma x_1 x_2 y_3 z_4$ ist beispielsweise eine dreireihige vierförmige (elementare) Function.

Die Summe der Exponenten aller gleichnamigen Elemente eines Glieds bezeichnen wir als *Reihengewicht* derselben hinsichtlich einer gewissen Reihe.

Für die τ-reihige Function (1) erhalten wir die Reihengewichte:

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = \Sigma\alpha_1, \\ p_2 &= \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r = \Sigma\beta_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_\tau &= \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_r = \Sigma\sigma_1, \end{aligned}$$

welche addirt auch das Totalgewicht derselben geben:

$$Q = \sum_1^\tau p_1.$$

Eine symmetrische Function vom Gewicht Q kann einreihig (binär), zweireihig (ternär), ... und höchstens Q-reihig sein. In letzterem Falle enthält sie die Elemente jeder Reihe linear.

Eine symmetrische Function, welche linear hinsichtlich der Elemente jeder Reihe ist, die sie enthält, nenne ich eine *primitive**) Function. Für dieselben sind die Reihengewichte

$$p_1 = p_2 = p_3 = \cdots = p_\tau = 1.$$

Alle symmetrischen Functionen, welche dieselben Reihengewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots, p^\tau$ besitzen, sollen *gleichwerthige* Functionen heissen. Dieselben bilden stets eine Gruppe von solchen, unter denen sich einförmige, zweiförmige, ..., Q-förmige Functionen befinden.

Für $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ erhalten wir beispielsweise eine Gruppe von 4 gleichwerthigen Functionen vom Gewicht 3:

$$\begin{gathered} \Sigma x_1^2 y_1, \\ \Sigma x_1^2 y_2, \quad \Sigma x_1 y_1 x_2, \\ \Sigma x_1 x_2 y_3. \end{gathered}$$

---

*) Herr Schläfli gebraucht diese Bezeichnung auch für die Elementarfunctionen.

2. Die einförmigen und die elementaren Functionen.

§ 3.

Die einreihigen einförmigen (binären) symmetrischen Functionen.

Bekanntlich lassen sich die Summen der Potenzen (einreihige einförmige Functionen):

$$\Sigma x_1,\ \Sigma x_1^2,\ \Sigma x_1^3,\ \ldots,\ \Sigma x_1^r$$

durch die Elementarfunctionen

$$\Sigma x_1,\ \Sigma x_1 x_2,\ \Sigma x_1 x_2 x_3,\ \ldots,\ \Sigma x_1 x_2 x_3 \ldots x_r$$

und umgekehrt die letzteren durch die ersteren als ganze Functionen derselben ausdrücken. Die hiebei resultirenden Formeln nenne ich die „Newton'schen".*) Dieselben sind allgemein enthalten in de[illegible] folgenden:

$$(-1)^{\varkappa-1}\frac{1}{\varkappa}\sum x_1^{\varkappa} = \sum (-1)^{\Sigma\lambda-1}\frac{(\Sigma\lambda-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots}a_{x_1}^{\lambda_1}a_{x_2}^{\lambda_2}\cdots,$$

$$(1)\qquad (-1)^{\varkappa-1}a_{\varkappa} = \sum \frac{(-1)^{\Sigma\lambda-1}}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots}\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{1}{\varkappa_2}\right)^{\lambda_2}\cdots \cdot (\Sigma x_1^{\varkappa_1})^{\lambda_1}\cdot(\Sigma x_1^{\varkappa_2})^{\lambda_2}\cdots,$$

wo $a_{\varkappa} = \Sigma x_1 x_2 x_3 \ldots x_{\varkappa}$ ist und die Zahlen λ und $\varkappa$ der Bedingung genügen müssen

$$(2)\qquad \begin{cases} \lambda_1\varkappa_1 + \lambda_2\varkappa_2 + \cdots = \varkappa, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \leqq \varkappa. \end{cases}$$

§ 4.

Die mehrreihigen einförmigen und die elementaren Functionen.

Um mehrreihige einförmige Functionen durch elementare darzustellen, setze man mit Poisson

$$t = \lambda x + \mu y + \nu z + \cdots,$$

wo $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ litterale Zahlen sind und bilde die Elementarfunctionen

$$(1)\qquad \begin{cases} \Sigma t_1 = \lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3 + \cdots, \\ \Sigma t_1 t_2 = \lambda^2 a_{11} + \lambda\mu a_{12} + \lambda\nu a_{13} + \cdots + \mu^2 a_{22} + \cdots, \\ \Sigma t_1 t_2 t_3 = \lambda^3 a_{111} + \lambda^2\mu a_{112} + \lambda^2\nu a_{113} + \cdots + \lambda\mu\nu a_{123} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ersetzt man in Formel (1) von § 3 die einförmige Function $\Sigma x_1^{\varkappa}$ durch

$$\Sigma(\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1 + \cdots)^{\varkappa}$$

*) Newton hat wohl als der erste an Stelle der beiden Endformeln (1) Recursionsformel von der Form (5) und (6) in § 4 aufgestellt; jene aber selbst nicht angegeben.

und die Functionen $a_{x_1}, a_{x_2}, \ldots$ durch $\Sigma t_1 t_2 \ldots t_{x_1}$, $\Sigma t_1 t_2 \ldots t_{x_2}, \ldots$ und ordnet beiderseits nach Potenzen und Producten von $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ so erhalten wir eine Identität, welche nur bestehen kann, wenn die Coefficienten der letzteren auf beiden Seiten einander gleich sind.

Ist die Zahl der Grössen $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ gleich oder grösser als $\varkappa$, so erhalten wir durch Gleichsetzen der Coefficienten der genannten Producte *sämmtliche* einförmige symmetrische Functionen vom Gewicht $\varkappa$ ausgedrückt durch Elementarfunctionen.

Für die zweireihigen Functionen hat Herr Macmahon*) die Formeln angegeben

$$(2)\begin{cases}(-1)^{\varkappa+\lambda-1}\dfrac{(\varkappa+\lambda-1)!}{\varkappa!\,\lambda!}\sum x_1^{\varkappa}y_1^{\lambda}=\sum(-1)^{\Sigma\pi-1}\dfrac{(\Sigma\pi-1)!}{\pi_1!\,\pi_2!\ldots}a_{x_1\lambda_1}^{\pi_1}a_{x_2\lambda_2}^{\pi_2}\cdots,\\ (-1)^{\varkappa+\lambda-1}a_{\varkappa\lambda}=\sum\left\{\dfrac{(x_1+\lambda_1-1)!}{x_1!\,x_2!}\right\}^{\pi_1}\cdot\left\{\dfrac{(x_2+\lambda_2-1)!}{x_2!\,\lambda_2!}\right\}^{\pi_2}\cdots\\ \qquad\cdots\dfrac{(-1)^{\Sigma\pi-1}}{\pi_1!\,\pi_2!\ldots}\left\{\sum x_1^{x_1}y_1^{\lambda_1}\right\}^{\pi_1}\cdot\left\{\sum x_1^{x_2}y_1^{\lambda_2}\right\}^{\pi_2}\cdots,\end{cases}$$

welche sich leicht auf den Fall von mehr Reihen erweitern lassen.

Setzen wir an Stelle der zweigliedrigen Function $t=\lambda x+\mu y$ die $\tau+1$-gliedrige $t=1+\lambda x+\mu y+\nu z+\cdots$, wo τ die Anzahl der Grössen $x, y, z, \ldots$ angeben soll, so erhalten wir eine Identität:

$$(3)\begin{cases}(1+\lambda x_1+\mu y_1+\cdots)(1+\lambda x_2+\mu y_2+\cdots)\cdots(1+\lambda x_r+\mu y_r+\cdots)\\ \qquad=1+\lambda a_1+\mu a_2+\nu a_3+\cdots\\ \qquad+\lambda^2 a_{11}+\lambda\mu a_{12}+\lambda\nu a_{13}+\cdots\\ \qquad+\lambda^3 a_{111}+\lambda^2\mu a_{112}+\lambda\mu\nu a_{123}+\cdots,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{cases}$$

in welcher rechts sämmtliche Elementarfunctionen linear auftreten.

Logarithmirt man beiderseits und entwickelt nach Potenzen von $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, so folgt:

$$(4)\begin{cases}\lambda a_1+\mu a_2+\cdots-\frac{1}{2}\{\lambda^2 a_{11}+2\lambda\mu a_{12}+\cdots\}\\ +\frac{1}{3}\{\lambda^3 a_{111}+3\lambda^2\mu a_{112}+\cdots+6\lambda\mu\nu a_{123}+\cdots\}-\cdots\\ =\log\{1+\lambda a_1+\cdots+\lambda^2 a_{11}+\lambda\mu a_{12}+\cdots+\lambda^3 a_{111}+\cdots\}.\end{cases}$$

Durch Vergleichen der Coefficienten von $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ auf beiden Seiten erhalten wir hieraus sämmtliche einförmige Functionen ausgedrückt durch Elementarfunctionen:

---

*) Macmahon: „Memoir on Symmetric Functions of the Roots of Systems of Equations." Phil. Trans. vol. (1890). pag. 487.

$$(5)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 = a_1, \\ \mathfrak{a}_{11} = a_1^2 - 2a_{11}, \\ \mathfrak{a}_{12} = a_1 a_2 - 2a_{12}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{a}_{111} = a_1^3 - 3a_1 a_{11} + 3a_{111}, \\ \mathfrak{a}_{112} = a_1^2 a_2 - a_1 a_{12} - a_2 a_{11} + a_{112}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{a}_{123} = a_1 a_2 a_3 - \frac{1}{2} a_1 a_{23} - \frac{1}{2} a_2 a_{31} - \frac{1}{2} a_3 a_{12} + \frac{1}{2} a_{123}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Potenzirt man die beiden Seiten der Gleichung (4), so folgt:

$$1 + \lambda a_1 + \mu a_2 + \cdots + \lambda^2 a_{11} + \lambda\mu a_{12} + \cdots + \lambda^3 a_{111} + \lambda^2\mu a_{112} + \cdots = f(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{12}, \ldots),$$

so ergeben sich die weiteren Formeln:

$$(6)\quad \begin{cases} a_1 = \mathfrak{a}_1, \\ a_{11} = \frac{1}{2}\mathfrak{a}_1^2 - \frac{1}{2}\mathfrak{a}_{11}, \\ a_{12} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_{12}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{111} = \frac{1}{6}\mathfrak{a}_1^3 - \frac{1}{2}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11} + \frac{1}{3}\mathfrak{a}_{111}, \\ a_{112} = \frac{1}{2}\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{12} - \frac{1}{2}\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{a}_{112}, \\ a_{123} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{23} - \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{31} - \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_{12} + 2\mathfrak{a}_{123}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Den speciellen Formeln von Herrn Macmahon entsprechen die beiden allgemeinen:*)

$$(7)\quad \begin{cases} (-1)^{\varkappa+\lambda+\mu+\cdots-1}\frac{(\varkappa+\lambda+\mu+\cdots-1)!}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\cdots}\sum x_1^{\varkappa} y_1^{\mu} z_1^{\nu}\cdots \\ \qquad = \sum (-1)^{\Sigma\pi-1}\frac{(\Sigma\pi-1)!}{\pi_1!\,\pi_2!\cdots} a^{\pi_1}_{\varkappa_1\lambda_1\mu_1\cdots} a^{\pi_2}_{\varkappa_2\lambda_2\mu_2\cdots}\cdots, \\ (-1)^{\varkappa+\lambda+\mu+\cdots-1} a_{\varkappa\lambda\mu\cdots} = \sum \left\{\frac{(\varkappa_1+\lambda_1+\mu_1+\cdots-1)!}{\varkappa_1!\,\lambda_1!\,\mu_1!\cdots}\right\}^{\pi_1} \\ \cdot \left\{\frac{(\varkappa_2+\lambda_2+\mu_2+\cdots-1)!}{\varkappa_2!\,\lambda_2!\,\mu_2!\cdots}\right\}^{\pi_2}\cdots\frac{(-1)^{\Sigma\pi-1}}{\pi_1!\,\pi_2!\cdots}\left\{\sum x_1^{\varkappa_1} y_1^{\lambda_1} z_1^{\mu_1}\cdots\right\}^{\pi_1}\left\{\sum x_1^{\varkappa_2} y_1^{\lambda_2} z_1^{\mu_2}\cdots\right\}^{\pi_2} \end{cases}$$

wo die Zahlen $\varkappa, \lambda, \mu, \ldots; \varkappa_i, \lambda_i, \mu_i, \ldots; \pi_1, \pi_2, \ldots$ den Bedingungen genügen müssen:

*) Ein ausführlicher Beweis dieser Formeln wird demnächst gegeben werden.

$$(8)\qquad \begin{cases} \varkappa_1\pi_1 + \varkappa_2\pi_2 + \cdots = \varkappa, \\ \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2 + \cdots = \lambda, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varkappa + \lambda + \mu + \cdots = Q, \\ \varkappa_i + \lambda_i + \mu_i + \cdots = Q_i, \\ \pi_1 Q_1 + \pi_2 Q_2 + \cdots = Q, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \cdots \leqq Q. \end{cases}$$

und mit Q; Q_i, die Gewichtszahlen von $\Sigma x_1^{\varkappa} y_1^{\mu} z_1^{\nu} \ldots$ und $a_{\varkappa\lambda\mu}\ldots$; bezw. von $\Sigma x_1^{\varkappa_i} y_1^{\lambda_i} z_1^{\mu_i} \cdots$, und $a_{\varkappa_i\lambda_i\mu_i}\ldots$ bezeichnet sind.

3. Die mehrförmigen Functionen.

§ 5.

Darstellung mehrförmiger Functionen durch einförmige und elementare. Indirecte Methode.*)

Das Product Φ von i einförmigen Functionen

$$(1)\qquad \Phi = \sum x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \cdots \sum x_1^{\alpha_2} y_1^{\beta_2} \cdots \sum x_1^{\alpha_i} y_1^{\beta_i} \cdots$$

mit den Gewichtszahlen

$$q_k = \alpha_k + \beta_k + \cdots \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, i)$$

giebt ausmultiplicirt eine Summe von gleichwerthigen symmetrischen Functionen, deren Reihengewichte

$$p_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots,\ p_2 = \beta_1 + \beta_2 + \cdots,\ p_3 = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots, \cdots$$

je gleich der Summe der Reihengewichte der einzelnen Factoren sind. Unter denselben erblicken wir zunächst eine einförmige, dann eine Reihe von zweiförmigen, dreiförmigen, ..., $i-1$-förmigen Functionen und schliesslich eine i-förmige Function

$$(2)\qquad \Phi_i = \sum x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \cdots \times x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \cdots \times \cdots \times x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i} \cdots$$

von den Theilgewichten $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_i$. Diese kann somit durch die übrigen linear ausgedrückt werden. Man erhält:

$$(3)\qquad \Phi_i = \Phi + \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_{i-1},$$

wo Φ das Product (1) ist und unter $\Phi_\varkappa$ eine Summe von gleichartigen $\varkappa$-förmigen symmetrischen Functionen verstanden werden soll, welche sich bei der Multiplication ergeben. Die hier auftretenden $(i-1)$-förmigen Functionen Φ_{i-1} lassen sich ebenso durch $(i-2)$-förmige,

*) Auf diese Weise hat schon Herr Schläfli für die einfacheren Fälle mehrförmige symmetrische Functionen durch einförmige ausgedrückt. Denkschriften der kaiserl. Academie der Wissenschaften, math. naturw. Classe, Bd. IV, Wien 1852.

$(i-3)$-förmige, ..., einförmige Functionen ersetzen; jede $(i-2)$-förmige Function kann wiederum durch $(i-3)$-förmige, $(i-4)$-förmige, ..., einförmige ausgedrückt werden. Indem wir so an Stelle jeder mehrtheiligen Function eine Summe von wenigertheiligen setzen, gelangen wir schliesslich zu einer Darstellung der i-förmigen Function, in welcher nur noch einförmige Functionen vorkommen, die aus den Functionen des Products Φ zusammengesetzt sind. Es leuchtet ein, dass eine solche Darstellung Glieder von $1, 2, 3, \ldots, i-1$ und höchstens von i Factoren enthalten muss.

Sind die i Theile der Function Φ_i sämmtlich von einander verschieden, so ist die i-förmige Function dargestellt durch:

$$(4) \qquad (-1)^{i-1}\Phi = \Sigma(\tau_1-1)!\,(\tau_2-1)!\ldots(-1)^{\sigma-1}\Sigma q_{\tau_1}\,\Sigma q_{\tau_2}\ldots,$$

wo mit Σq_{τ_1}, Σq_{τ_2}, ... einförmige Functionen bezeichnet sind, welche bezw. aus τ_1, τ_2, ... Theilen der i-förmigen Function Φ_i zusammengesetzt sind, und σ die Anzahl dieser Functionen in einem Glied angiebt.

Setzt man schliesslich an Stelle der einförmigen Functionen deren Ausdrücke in den Elementarfunctionen, so ist die i-förmige Function durch nur elementare ausgedrückt.

§ 6.

Darstellung mehrförmiger Functionen durch einförmige und elementare Functionen. Directe Methode.

Zwischen den einförmigen und den elementaren Functionen besteht eine eindeutige Beziehung.

Jeder einförmigen symmetrischen Function lässt sich stets diejenige Elementarfunction eindeutig zuordnen, welche mit ihr gleichwerthig ist und umgekehrt.

Beispielsweise entspricht hienach der einförmigen Function $\Sigma x_1^2 y_1 z_1^3$ (a_{112333}) die Elementarfunction $\Sigma x_1 x_2 y_3 z_4 z_5 z_6 (a_{112333})$. Es entspricht demnach auch jedem Product von i einförmigen Functionen eindeutig ein solches von i Elementarfunctionen und umgekehrt. Hieraus fliesst aber der

Satz. *Die Zahl aller gleichwerthigen Producte von einförmigen Functionen von den Reihengewichten*

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\tau$$

ist gleich der Anzahl aller mit denselben gleichwerthigen Producte von Elementarfunctionen.

Nun lassen sich nach § 4 die einförmigen Functionen durch elementare und die elementaren durch einförmige ausdrücken. Wir werden deshalb auch die Producte der ersteren am einfachsten durch blosse Multiplication in den letzteren darstellen können.

Bezeichnen wir die Producte der einförmigen Functionen mit $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_s$ und die der Elementarfunctionen mit $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_s$, so giebt die Multiplication

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_1 = \alpha_1 A_1 + \beta_1 A_2 + \cdots + \sigma_1 A_s, \\ \mathfrak{A}_2 = \alpha_2 A_1 + \beta_2 A_2 + \cdots + \sigma_2 A_s, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{A}_s = \alpha_s A_1 + \beta_s A_2 + \cdots + \sigma_s A_s, \end{cases}$$

wo die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ einfache Zahlen sind, die sich bei der Multiplication ergeben.

Hieraus könnte man die A linear in Function der $\mathfrak{A}$ bestimmen; es ist jedoch vorzuziehen, auch die Producte A direct durch Multiplication zu bilden:

$$(2)\qquad \begin{cases} A_1 = \alpha_1' \mathfrak{A}_1 + \beta_1' \mathfrak{A}_2 + \cdots + \sigma_1' \mathfrak{A}_s, \\ A_2 = \alpha_2' \mathfrak{A}_1 + \beta_2' \mathfrak{A}_2 + \cdots + \sigma_2' \mathfrak{A}_s, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_s = \alpha_s' \mathfrak{A}_1 + \beta_s' \mathfrak{A}_2 + \cdots + \sigma_s' \mathfrak{A}_s. \end{cases}$$

Für jede Gruppe $(p_1 p_2 p_3 \ldots p_s)$ von gleichwerthigen Producten $\mathfrak{A}$ und A können wir somit 2 Tabellen aufstellen, die sich mit Vortheil zur Bildung mehrförmiger Functionen verwenden lassen.

Beispielsweise erhalten wir für die Gruppe

$$p_1 = 2,\ p_2 = 1,\ p_3 = 1$$

die Tabellen:

Tabelle I.

	$a_1^2a_2a_3$	$a_1^2a_{23}$	$a_1a_2a_{13}$	$a_1a_3a_{12}$	$a_2a_3a_{11}$	$a_{12}a_{13}$	$a_{11}a_{23}$	a_1a_{123}	a_2a_{113}	a_3a_{112}	a_{1123}
$a_1^2a_2a_3$	1										
$a_1^2a_{23}$	1	-1									
$a_1a_2a_{13}$	1		-1								
$a_1a_3a_{12}$	1			-1							
$a_2a_3a_{11}$	1				-2						
$a_{12}a_{13}$	1		-1	-1		$+1$					
$a_{11}a_{23}$	1	-1			-2		2				
a_1a_{123}	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$				$\frac{1}{2}$			
a_2a_{113}	1		-1		-1				$+1$		
a_3a_{112}	1			-1	-1					$+1$	
a_{1123}	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Tabelle II.

	$a_1^2a_2a_3$	$a_1^2a_{23}$	$a_1a_2a_{13}$	$a_1a_3a_{12}$	$a_2a_3a_{11}$	$a_{12}a_{13}$	$a_{11}a_{23}$	a_1a_{123}	a_2a_{113}	a_3a_{112}	a_{1123}
$a_1^2a_2a_3$	1										
$a_1^2a_{23}$	1	-1									
$a_1a_2a_{13}$	1		-1								
$a_1a_3a_{12}$	1			-1							
$a_2a_3a_{11}$	$\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{2}$						
$a_{12}a_{13}$	1		-1	-1		$+1$					
$a_{11}a_{23}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}$				
a_1a_{123}	1	-1	-1	-1				2			
a_2a_{113}	$\frac{1}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$				$+1$		
a_3a_{112}	$\frac{1}{2}$			-1	$-\frac{1}{2}$					$+1$	
a_{1123}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	2	1	1	-3

Wie wir einem Product von i einförmigen symmetrischen Functionen ein gleichwerthiges Product von i Elementarfunctionen zuordnen konnten und umgekehrt, so können wir auch jedem von beiden eine bestimmte gleichwerthige i-förmige Function eindeutig zuweisen und umgekehrt.

So entspricht beispielsweise jedem der gleichwerthigen Producte $a_{11}a_2a_{333}$ und $a_{11}a_2a_{333}$ eindeutig die 3-förmige Function $\Sigma x_1^2y_2z_3^3$ und umgekehrt.

Allgemein gilt der Satz:

Die Zahl aller symmetrischen Functionen von den Reihengewichten $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_s$ ist gleich der Anzahl aller gleichwerthigen Producte von einförmigen Functionen, sowie auch gleich der Anzahl aller Producte von Elementarfunctionen:

Nun lassen sich die Producte $\mathfrak{A}$ und A durch einfache Multiplication linear durch die gleichwerthigen symmetrischen Functionen S darstellen; man erhält so je s Bestimmungsgleichungen, aus welchen die letzteren umgekehrt in Function der Producte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_s$, bezw. $A_1, A_2, \ldots, A_s$ ermittelt werden können. Es ist:

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1 = \alpha_1 S_1 + \beta_1 S_2 + \cdots + \sigma_1 S_s, \\ \mathfrak{A}_2 = \alpha_2 S_1 + \beta_2 S_2 + \cdots + \sigma_1 S_s, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{A}_s = \alpha_s S_1 + \beta_s S_2 + \cdots + \sigma_s S_s, \end{cases}$$

ebenso

$$(4)\quad \begin{cases} A_1 = \alpha_1' S_1 + \beta_2' S_2 + \cdots + \sigma_1' S_s, \\ A_2 = \alpha_2' S_1 + \beta_2' S_2 + \cdots + \sigma_2' S_s, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_s = \alpha_s' S_1 + \beta_s' S_2 + \cdots + \sigma_s' S_s. \end{cases}$$

Die Bestimmung der Functionen $S_1, S_2, \ldots, S_s$ aus diesen Gleichungen ist in beiden Fällen dieselbe. Man erhält unmittelbar in Determinantenform:

$$(5)\quad \begin{cases} S_1 = \frac{1}{\Delta}(\mathfrak{A}_1 \beta_2 \gamma_3 \ldots \sigma_s) = \frac{1}{\Delta'}(A_1 \beta_2' \gamma_3' \ldots \sigma_s'), \\ S_2 = \frac{1}{\Delta}(\alpha_1 \mathfrak{A}_2 \gamma_3 \ldots \sigma_s) = \frac{1}{\Delta'}(\alpha_1' A_2 \gamma_3' \ldots \sigma_s'). \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_s = \frac{1}{\Delta}(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \ldots \mathfrak{A}_s) = \frac{1}{\Delta'}(\alpha_1' \beta_2' \gamma_3' \ldots A_s), \end{cases}$$

wo mit Δ und Δ' die Determinanten bezeichnet sind:

$$\Delta = (\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \ldots \sigma_s), \qquad \Delta' = (\alpha_1' \beta_2' \gamma_3' \ldots \sigma_s').$$

Um die Berechnung der Determinanten zu umgehen, multiplicire man die Gleichungen (3), bezw. (4) mit den Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_s$ und addire dieselben, so erhält man die beiden Identitäten:

$$(6)\quad \begin{cases} \lambda_1 \mathfrak{A}_1 + \lambda_2 \mathfrak{A}_2 + \cdots + \lambda_s \mathfrak{A}_s = S_1 \Sigma \lambda_1 \alpha_1 + S_2 \Sigma \lambda_1 \beta_1 + \cdots + S_s \Sigma \lambda_1 \sigma_1, \\ \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_s A_s = S_1 \Sigma \lambda_1 \alpha_1' + S_2 \Sigma \lambda_1 \beta_1' + \cdots + S_s \Sigma \lambda_1 \sigma_1', \end{cases}$$

welche linear sowohl hinsichtlich der Producte $\mathfrak{A}$, bezw. A als auch hinsichtlich der symmetrischen Functionen S sind.

Um hieraus eine bestimmte Function S_x zu ermitteln, bestimme man die Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_s$ so, dass der Coefficient von S_x gleich 1 und die Coefficienten aller übrigen Functionen gleich Null werden. Man erhält so nach Auflösung von s linearen Gleichungen die Functionen $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_s$ linear durch die Producte $\mathfrak{A}$, bezw. der A ausgedrückt.

Wir können diese Resultate im 4 weiteren Tabellen zusammenstellen, womit die möglichen Darstellungsweisen der gleichwerthigen symmetrischen Functionen durch die Productcombinationen der einförmigen, bezw. Elementarfunctionen und umgekehrt erschöpft sind.

Für das oben angegebene Beispiel erhalten wir zunächst die beiden Tabellen (3) und (4):

Tabelle III.

Σ	$x_1^2y_1z_1$	$x_1^2y_1z_2$	$x_1^2z_1y_2$	$x_1y_1z_1x_2$	$x_1^2y_2z_2$	$x_1y_1x_2z_2$	$x_1^2y_2z_2$	$x_1y_1x_2z_2$	$x_1z_1x_2y_2$	$y_1z_1x_2w_2$	$x_1x_2y_2z_1$
$a_1^2a_2a_3$	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2
$a_1^2a_{23}$	1			2	1					2	
$a_1a_2a_{13}$	1		1	1		1			1		
$a_1a_3a_{12}$	1	1		1		1		1			
$a_2a_3a_{11}$	1	1	1		1		1				
$a_{12}a_{13}$	1					1					
$a_{11}a_{23}$	1				1						
a_1a_{123}	1			1							
a_2a_{113}	1		1								
a_3a_{112}	1	1									
a_{1133}	1										

Tabelle IV.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}
Σ	$x_1^2y_1z_1$	$x_1^2y_1z_2$	$x_1^2z_1y_2$	$x_1y_1z_1x_2$	$x_1^2y_2z_2$	$x_1y_1x_2z_2$	$x_1^2y_2z_2$	$x_1y_1x_2z_2$	$x_1z_1x_2y_2$	$y_1z_1x_2x_2$	$x_1x_2y_2z_1$
$a_1^2a_2a_3$	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2
$a_1^2a_{23}$		1	1			2	1	2	2		2
$a_1a_2a_{13}$		1		1	1	1	1	2	1	2	2
$a_1a_3a_{12}$			1	1	1	1	1	1	2	2	2
$a_2a_3a_{11}$				1		1		1	1	1	1
$a_{12}a_{13}$					1	1	1	1	1	2	2
$a_{11}a_{23}$						1		1	1		1
a_1a_{123}							1	1	1		2
a_2a_{113}								1		1	1
a_3a_{112}									1	1	1
a_{1123}											1

Multiplicirt man die Horizontalreihen der letzten Tabelle mit den Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{11}$ und addirt dieselben, so ergiebt sich beispielsweise zur Bestimmung der Function $\Sigma x_1^2y_2z_3$ das System von 11 linearen Gleichungen:

1. $0 = \lambda_1$,
2. $0 = \lambda_2 + \lambda_3$,
3. $0 = \lambda_2 + \lambda_4$,
4. $0 = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5$,
5. $0 = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6$,
6. $0 = 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7$,
7. $1 = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6 + \lambda_8$,
8. $0 = 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9$,
9. $0 = 2\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_{10}$,
10. $0 = 2\lambda_3 + 2\lambda_4 + \lambda_5 + 2\lambda_6 + \lambda_9 + \lambda_{10}$,
11. $0 = 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 + \lambda_5 + 2\lambda_6 + \lambda_7 + 2\lambda_8 + \lambda_9 + \lambda_{10} + \lambda_{11}$,

welche aufgelöst geben:

$$\lambda_1 = 0, \quad +\lambda_2 = -\lambda_3 = -\lambda_4 = -\lambda_9 = -\lambda_{10} = \frac{1}{3},$$
$$\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_8 = -\lambda_{11} = \frac{2}{3}, \quad \lambda_7 = -\frac{4}{3}.$$

Die Function ist demnach dargestellt durch

$$\Sigma x_1^2 y_2 z_3 = \frac{1}{3}\{a_1^2 a_{23} - a_1 a_2 a_{13} - a_1 a_3 a_{12} + 2a_2 a_3 a_{11} + 2a_{12} a_{13} - 4a_{11} a_{23} + 2a_1 a_{123} - a_2 a_{113} - a_3 a_{112} - 2a_{1123}\}.$$

Sind die sämmtlichen Functionen $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{11}$ durch einförmige, bezw. Elementarfunctionen ausgedrückt, so können wir dieselben in zwei weiteren Tabellen zusammenstellen:

Tabelle V.

	$a_1^2 a_2 a_3$	$a_1^2 a_{23}$	$a_1 a_2 a_{13}$	$a_1 a_3 a_{12}$	$a_2 a_3 a_{11}$	$a_{12} a_{13}$	$a_{11} a_{23}$	$a_1 a_{123}$	$a_2 a_{113}$	$a_3 a_{112}$	a_{1123}
$\Sigma x_1^2 y_1 z_1$											1
$\Sigma x_1^2 y_1 z_2$										1	−1
$\Sigma x_1^2 z_1 y_2$									1		−1
$\Sigma x_1 y_1 z_1 x_2$								1			−1
$\Sigma x_1^2 y_2 z_2$							1				−1
$\Sigma x_1 y_1 x_2 z_2$						1					−1
$\Sigma x_1^2 y_2 z_3$					1		−1		−1	−1	2
$x_1 y_1 x_2 z_3$				1		−1		−1		−1	2
$x_1 z_1 x_2 y_3$			1			−1		−1	−1		2
$y_1 z_1 x_2 x_3$		$\frac{1}{2}$					$-\frac{1}{2}$	−1			1
$x_1 x_2 y_3 z_4$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	−1	−1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	2	1	1	−3

Tabelle VI.

	$a_1^2a_2a_3$	$a_1^3a_{23}$	$a_1^2a_2a_{13}$	$a_1^2a_3a_{12}$	$a_2a_3a_{11}^2$	$a_{11}^2a_{23}$	$a_{12}^2a_{13}$	$a_1a_{12}a_{13}$	$a_2a_{11}a_{13}$	$a_3a_{11}a_{12}$	a_{123}
$x_1^2y_1z_1$	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$x_1^2y_1z_2$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_1^2z_1y_2$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_1y_1z_1x_2$		$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_1^2y_2z_2$		$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_1y_1x_2z_2$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_1^2y_2z_3$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$x_1y_1x_2z_3$		$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$x_1z_1x_2y_3$		$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$y_1z_1x_2x_3$		$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$x_1x_2y_3z_4$											1

Um die Tabelle VI zu berechnen, benütze man die Tabelle V und entnehme die Productcombinationen der einförmigen Functionen der Tabelle II.

4. Die primitiven Functionen.

§ 7.

Transformation.

Setzt man in einer i-förmigen symmetrischen Function an Stelle der Elemente einer Reihe $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_r$ die resp. Producte $u_1v_1w_1\ldots$, $u_2v_2w_2\ldots$, $u_3v_3w_3\ldots$, $\ldots$, $u_rv_rw_r\ldots$ von mehreren andern, so geht dieselbe wieder in eine i-förmige Function von

höherem Gewicht über. Aus jeder einförmigen Function geht hierbei wieder eine solche hervor, während eine i-förmige Elementarfunction in eine höhere i-förmige Function übergeht.

Hat man eine primitive i-förmige Function, d. h. eine solche, welche linear ist hinsichtlich der Elemente jeder Reihe, die sie enthält und ist dieselbe durch einförmige Functionen dargestellt:

$$(1) \qquad J_i = f_i(\mathfrak{a}) = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \cdots + \sigma\varphi_s,$$

wo mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ die Productcombinationen der einförmigen Functionen und mit $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$ Zahlencoefficienten bezeichnet sind, so kann man demnach hieraus durch eine Transformation:

$$(2) \qquad \left.\begin{array}{l} x = x'\ y'\ z'\ \ldots \\ y = x''\ y''\ z''\ \ldots \\ z = x'''\ y'''\ z'''\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

jede beliebige höhere i-förmige (primitive) Function direct durch einförmige Functionen ausgedrückt erhalten.

Da hierbei jede einförmige Function wieder in eine solche übergeht und ebenso auch jedes Product φ derselben in eines Φ von einförmigen Functionen höheren Gewichts, so bleiben bei dieser Transformation die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sämmtlicher Glieder unverändert. Daher wird auch die transformirte Function

$$I_i = F_i(\mathfrak{a}) = \alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2 + \cdots + \sigma\Phi_s$$

dieselbe Anzahl von Gliedern besitzen wie die ursprüngliche. Umgekehrt wird man von einer höheren i-förmigen (primitiven) Function I_i zu einer niedrigeren J_i zurückkehren können, indem man an Stelle eines Products von mehreren Elementen ein solches von weniger Elementen setzt. Man gelangt auf diesem Wege schliesslich zu einer niedrigsten i-förmigen (primitiven) Function, d. h. zu einer elementaren, welche ebenfalls die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ besitzt.

Allen i-förmigen (primitiven) symmetrischen Functionen liegt eine bestimmte i-förmige primitive Elementarfunction zu Grunde, aus welcher man alle höheren i-förmigen Functionen durch eine Transformation von der Form (2) erhalten kann.

Für die einfacheren Fälle sind die primitiven Elementarfunctionen angegeben durch:

1. $\Sigma x_1 y_2 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_{12},$
2. $\Sigma x_1 y_2 z_3 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 - (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{23} + \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{31} + \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_{12}) + 2\mathfrak{a}_{123},$
3. $\Sigma x_1 y_2 z_3 t_4 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 - (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{34} + \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_{24} + \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_{23} + \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_{14} + \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_{13} + \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_{12}) + 2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{234} + \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{341} + \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_{412} + \mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_{123}) + (\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{a}_{34} + \mathfrak{a}_{13}\mathfrak{a}_{24} + \mathfrak{a}_{14}\mathfrak{a}_{23}) - 6\mathfrak{a}_{1234}.$

Aus der Formel (2) gehen alle dreiförmigen (primitiven) Functionen hervor, beispielsweise die folgende:

$$\Sigma x_1 y_1 z_1 t_2 u_2 v_3 w_3 = a_{123} a_{45} a_{67} - a_{123} a_{4567} - a_{45} a_{12367} - a_{67} a_{12345} + 2 a_{1234567},$$

indem man an Stelle von x das Product xyz, an Stelle von y tu und an Stelle von z vw setzt.

§ 8.

Coincidenz von Reihen.

Lässt man in einer τ-reihigen i-förmigen symmetrischen Function die Elemente zweier Reihen zusammenfallen, so geht dieselbe wieder in eine solche J' von denselben Theilgewichten und nur $\tau - 1$ Reihen über. Gehören die beiden coincidirenden Reihen verschiedenen Theilen der i-förmigen Function an, so können hierdurch gewisse Glieder der letzteren einander gleich werden. Ist dies für ein solches $\varkappa$ mal der Fall, so geht J über in

$$J = \varkappa \cdot J',$$

wo J' eine symmetrische Function bezeichnet, welche nur den $\varkappa^{\text{ten}}$ Theil der Glieder von J enthält.

Ist insbesondere die Function J eine primitive Elementarfunction, so gelten die Sätze:

Fallen in einer τ-reihigen Elementarfunction a die Elemente zweier Reihen zusammen, so geht dieselbe in eine solche a' von $\tau - 1$ Reihen über, welche nur halb soviel Glieder als a besitzt.

Jede Elementarfunction a, in welcher bzw. $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa'''$, ... Reihen zusammenfallen, geht in eine solche a' über, welche $k!\,k'!\,k''!\ldots$ mal weniger Glieder enthält als die Function a.

Für eine solche ist also

$$a = k!\,k'!\,k''!\ldots a'.$$

Lässt man beispielsweise in der siebenförmigen Elementarfunction $\Sigma x_1 y_2 z_3 t_4 u_5 v_6 w_7$ die Reihen x, y und z, ebenso auch die Reihen t, u, v und w zusammenfallen, so geht dieselbe über in:

$$\Sigma x_1 y_2 z_3 t_4 u_5 v_6 w_7 = 3!\,4!\ \Sigma x_1 x_2 x_3 y_4 y_5 y_6 y_7.$$
$$z = y = x, \quad w = v = u = t (= y).$$

Ist nun eine primitive i-förmige Function vom Gewicht Q und den Theilgewichten $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_i$ durch Elementarfunctionen, bezw. einförmige Functionen ausgedrückt:

$$J = \varphi(a) = f(\mathfrak{a}),$$

so können wir hieraus durch Coincidenz (und Vertauschung) von Reihen alle möglichen i-förmigen Functionen von denselben Theilgewichten erhalten, welche $Q-1$, $Q-2$, $Q-3$, . . ., 3, 2, 1 Reihen besitzen.

Um also sämmtliche symmetrische Functionen vom Gewicht Q zu erhalten, ist es nur nöthig, die aus § 6 bekannten 6 Tabellen für die primitiven Functionen vom Gewicht Q zu berechnen. Die Tabellen aller übrigen weniger reihigen Functionen gleichen Gewichts können aus denselben unmittelbar durch Coincidenz von Reihen ermittelt werden.

Lässt man beispielsweise in Tabelle VI von § 6 die Reihe s mit x, bzw. mit y coincidiren, so erhalten wir unmittelbar sämmtliche symmetrische Functionen vom Gewicht (3, 1), bzw. (2, 2) durch Elementarfunctionen ausgedrückt:

	$a_1^3 a_2$	$a_1^2 a_{12}$	$a_1 a_2 a_{11}$	$a_{11} a_{12}$	$a_1 a_{112}$	$a_2 a_{111}$	a_{1112}
$\Sigma x_1^3 y_1$	1	− 1	− 2	1	1	1	− 1
$\Sigma x_1^3 y_2$		1	− 1	− 1	− 1	2	1
$\Sigma x_1^2 y_1 x_2$			1	− 1	·	− 1	1
$\Sigma x_1^2 x_2 y_2$				1	− 1	− 1	1
$\Sigma x_1^2 x_2 y_3$					1	·	− 1
$\Sigma x_1 y_1 x_2 x_3$						1	− 1
$\Sigma x_1 x_2 x_3 y_4$							1

	$a_1^2a_2^2$	$a_1^2a_{22}$	$a_1a_2a_{12}$	$a_2^2a_{11}$	a_{12}^2	$a_{11}a_{22}$	a_1a_{122}	a_2a_{112}	a_{1122}
$\Sigma x_1^2y_1^2$	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$\Sigma x_1^2y_1y_2$		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\Sigma y_1^2x_1x_2$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\Sigma x_1^2y_2^2$		$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\Sigma x_1y_1x_2y_2$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\Sigma x_1^2y_2y_3$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$\Sigma x_1y_1x_2y_3$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
$\Sigma y_1^2x_2x_3$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$\Sigma x_1x_3y_3y_4$									1

5. Anwendung einiger Differentialprocesse.

§ 9.

Erster Process.

Bezeichnen wir mit $\varphi(a)$ die Darstellung einer $\varkappa$-förmigen symmetrischen Function durch elementare oder einförmige Functionen, so ist durch die Gleichung

$$J = \varphi(a)$$

offenbar eine Identität angegeben, in welcher beiderseits die Elemente einer gewissen Reihe, z. B. von $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_r$ homogen in einem bestimmten Grad auftreten. Dieselbe wird auch noch eine solche bleiben, wenn man beide Seiten nach den Elementen der Reihe t ableitet; es gelten deshalb die Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial t_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_m}\cdot\frac{\partial a_m}{\partial t_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\cdot\frac{\partial a_n}{\partial t_1} + \cdots, \\ \frac{\partial J}{\partial t_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_m}\cdot\frac{\partial a_m}{\partial t_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\cdot\frac{\partial a_n}{\partial t_2} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\

welche addirt offenbar eine neue symmetrische Function repräsentiren, deren Gewicht hinsichtlich einer Reihe um 1 niedriger ist als das der Function J.

Der hierbei resultirende Process

$$(1) \qquad \sum_{1,2,\cdots,r}^{i} \frac{\partial J}{\partial t_i} = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial a} \sum \frac{\partial a}{\partial t_i}$$

lässt sich auf jede symmetrische Function (bzw. Relation) anwenden und gestattet uns, aus gegebenen Functionen solche von niedrigerem Gewicht herzustellen.

§ 10.

Zweiter Process.

Multiplicirt man die Gleichungen (1) der Reihe nach mit den Elementen

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_r$$

einer neuen Reihe und addirt dieselben, so erhält man einen weiteren Process

$$(2) \qquad \sum_{1,2,\cdots,r}^{i} \frac{\partial J}{\partial t_i} s_i = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial a} \sum \frac{\partial a}{\partial t_i} s_i,$$

welcher, auf die Function J angewendet, eine neue $\varkappa$-förmige symmetrische Function von demselben Gewicht liefert, in welcher nun eine neue Reihe $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_r$ auftritt.

Kommt die Reihe $t_1 t_2 t_3 \ldots t_r$ in mehreren Theilfunctionen von J vor, so liefern die beiden Operationen $\sum \frac{\partial J}{\partial t_i}$ und $\sum \frac{\partial J}{\partial t_i} s_i$ nicht eine einzige Function, sondern eine Summe von gleichwerthigen symmetrischen Functionen. Sobald jedoch die Reihe t_i nur in einer einzigen Theilfunction auftritt, erhält man durch Anwendung der Operation (2) stets eine bestimmte $\varkappa$-förmige Function von den Theilgewichten $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\varkappa$ der Function J.

Aus jeder $\varkappa$-förmigen symmetrischen Function

$$(3) \qquad J = \Sigma x_1^{q_1} y_2^{q_2} z_3^{q_3} \ldots w_\varkappa^{q_\varkappa} = \varphi(a),$$

deren Theile einreihig sind, lässt sich mit Hilfe der Differentialoperation (2) jede beliebige mehrreihige und hieraus wiederum durch Coincidenz gewisser Reihen, jede beliebige wenigerreihige Function des Systems $(q_1 q_2 q_3 \ldots q_\varkappa)$ ermitteln.

Die Function

$$\Sigma x_1^2 y_2^2 = \tfrac{4}{3} a_1 a_2 a_{12} - \tfrac{4}{3} a_1^2 a_{22} - \tfrac{4}{3} a_2^2 a_{11} - \tfrac{2}{3} a_1 a_{122} - \tfrac{2}{3} a_2 a_{112} - \tfrac{1}{3} a_{12}^2 + \tfrac{10}{3} a_{11} a_{22} + \tfrac{2}{3} a_{1122}$$

liefert nach zweimaliger Anwendung der Operation (2) die beiden Functionen:

$$\Sigma x_1 z_1 y_2^2 = \frac{1}{3}\{2a_1a_2a_{23} + 2a_2a_3a_{12} - 4a_1a_3a_{22} - 2a_2^2a_{13} - a_{12}a_{23} + 5a_{13}a_{22} - a_1a_{223} - a_2a_{123} - a_3a_{122} + a_{1223}\},$$

$$\Sigma x_1 z_1 y_2 t_2 = \frac{1}{6}\{2a_1a_2a_{34} + 2a_1a_4a_{23} + 2a_3a_2a_{14} + 2a_3a_4a_{12} - 4a_1a_3a_{24} - 4a_2a_4a_{13} - a_{12}a_{34} - a_{14}a_{23} + 5a_{13}a_{24} - a_1a_{234} - a_2a_{134} - a_3a_{124} - a_4a_{123} + a_{1234}\},$$

woraus durch nachträgliche Vertauschung von Reihen noch die weiteren Functionen hervorgehen

$$\Sigma y_1 z_1 x_2^2, \quad \Sigma x_1 y_1 z_2^2,$$

bzw.

$$\Sigma x_1 y_1 z_2 t_2, \quad \Sigma x_1 t_1 y_2 z_2.$$

Ist insbesondere die Function J einförmig, so geht dieselbe über in

$$J = \Sigma x_1^q = \varphi(a).$$

Ist daher die Summe

$$\Sigma x_1^q = \varphi(a) = f(a)$$

durch elementare, bzw. einförmige Functionen dargestellt, so können wir aus derselben mit Hilfe der Operation (2) *sämmtliche mehrreihigen einförmigen Functionen vom Gewicht q herleiten.*

Wendet man dieselbe auf

$$\Sigma x_1^3 = a_1^3 - 3a_1a_{11} + 3a_{111}$$

zweimal an, so ergeben sich unmittelbar die beiden Formeln:

$$\Sigma x_1^2 y_1 = a_1^2a_2 - a_{11}a_2 - a_1a_{12} + a_{112},$$

$$\Sigma x_1 y_1 z_1 = a_1a_2a_3 - \frac{1}{2}\{a_1a_{23} + a_2a_{31} + a_3a_{12} - a_{123}\}.$$

II. Theil.

Die Relationen.

1. Die Relationen zwischen den Elementarfunctionen. Erste Methode.

§ 11.

Die i-förmigen Functionen gebildet für eine bestimmte Gruppenzahl r.

Die i-förmige symmetrische Function

$$J = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \cdots \times x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \cdots \times \cdots \times x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i} \cdots = \varphi(a)$$

vom Gewicht $Q = \Sigma q_1$ und den Theilgewichten $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_i$ sei auf irgend eine Weise als ganze Function der Elementarfunctionen

ausgedrückt. In der Darstellung $\varphi(a)$ werden alle möglichen Producte von elementaren Functionen auftreten, welche mit der Function J gleichwerthig sind. Wir erblicken unter denselben solche von Q, $Q-1$, $Q-2$, ..., 3, 2, 1 Factoren. Die Function $\varphi(a)$ kann deshalb auch Elementarfunctionen vom Gewicht $1, 2, 3, \ldots, Q-1$ und höchstens eine solche vom Gewicht Q enthalten, welche linear auftritt und die Reihengewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\tau$ der Function J besitzt.

Da bei der Bildung der Function $\varphi(a)$ keine Voraussetzung über irgend welche Gruppenzahl gemacht worden ist, so wird dieselbe auch Giltigkeit besitzen für jede beliebige Anzahl r von Gruppen $P_1, P_2, \ldots, P_r$, welche kleiner, gleich oder grösser als i ist.

Soll die Function J für r Gruppen gebildet werden und ist $r < Q$, so verschwinden in $\varphi(a)$ alle Glieder identisch, in welchen höhere als r-förmige Elementarfunctionen enthalten sind, da die Elemente aller weiteren Gruppen Null sind; es genügt also, in der allgemeinen Darstellung der Function $J = \varphi(a)$ die $r+1$, $r+2$, ... Q-förmigen Elementarfunctionen gleich 0 zu setzen, um die specielle für r-Gruppen giltige Function $\varphi(a)$ zu erhalten.

§ 12.

Die Relationen.

Die Darstellung $J = \varphi(a)$ ist für jede beliebige Gruppenzahl eine Identität zwischen der Function J und den Elementarfunctionen a; sie wird demnach auch noch eine solche sein müssen für $r < i$. In diesem Fall verschwinden nicht nur die $r+1$, $r+2$, ..., Q-förmigen Elementarfunctionen, sondern auch die Function J selbst. *Da es nun auch Glieder giebt, welche diese Elementarfunctionen nicht enthalten und welche deshalb auch nicht identisch zu* 0 *werden können, so bleibt von der Function* $\varphi(a)$ *eine identische Beziehung*

$$\varphi(a_1 a_2 a_3 \ldots a_r) \equiv 0 \tag{1}$$

der Elementarfunctionen vom Gewicht 1, 2, 3, ..., r *übrig, welche nichts anderes als eine Relation vom Gewicht* Q *zwischen denselben repräsentirt.* Da die i-förmige Function J für jeden Werth von $r < i$ verschwindet, so liefert $\varphi(a)$ auch ebenso viele Relationen, welche den Gruppenzahlen 2, 3, 4, ..., $i-1$ entsprechen und die Reihengewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\tau$ der Function J besitzen.

Für $\tau = 1$ ist die Function J einreihig (binär) und liefert bekanntlich keine Relation.

Für eine zweireihige Function, welche eine Reihe linear enthält, existirt ebenfalls keine Relation. Eine solche lässt sich unmittelbar linear durch i-förmige Elementarfunctionen darstellen, woraus hervor-

geht, dass jedes Glied identisch verschwindet, sobald $r < i$ wird. Eine derartige Function ist:

$$(2)\quad J = \sum t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots t_{i-1}^{a_{i-1}} s_i = \sum t_1 t_2 t_3 \dots t_{i-1} s_i \sum t_1^{a_1-1} t_2^{a_2-1} \dots t_{i-1}^{a_{i-1}-1}$$
$$- \sum t_1 t_2 t_3 \dots t_i \cdot \Big\{ \sum s_1 t_1^{a_1-2} t_2^{a_2-1} t_3^{a_3-1} \dots t_{i-1}^{a_{i-1}}$$
$$+ \sum t_1^{a_1-1} s_2 t_2^{a_2-2} t_3^{a_3-1} \dots t_{i-1}^{a_{i-1}-1} + \dots \Big\}.$$

Für alle übrigen mehrreihigen Functionen aber gilt:

Jede i-förmige, τ-reihige ($\tau > 1$) symmetrische Function liefert $i-2$ τ-reihige Relationen) vom Gewicht der angegebenen Function, welche $2, 3, 4, \dots i-1$ Gruppen angehören.*

Als Beispiel sei die 4-förmige Function

$$(3)\quad \sum y_1^2 x_2 x_3 x_4 = \frac{1}{6} \{ - III_{32} - a_1 a_{1122} + 3 a_2 a_{1112} + 3 a_{11122} \}$$

angegeben, wo III_{32} den in § 17 gefundenen Ausdruck (2) bezeichnet:

$$(4)\quad III_{32} \equiv a_1 (a_1^2 a_{22} + a_2^2 a_{11} - a_1 a_2 a_{12} - 4 a_{11} a_{22} + a_{12}^2)$$
$$- 3 a_{111} (a_2^2 - 3 a_{22}) + a_{112} (2 a_1 a_2 - 3 a_{12}) - a_{122} (a_1^2 - 3 a_{11}).$$

Die Function $\Sigma y_1^2 x_2 x_3 x_4$ hat für r Gruppen $r \binom{r-1}{3} = 4 \cdot \binom{r}{4}$ Glieder. Die kleinste Anzahl von solchen erhält sie für 4 Gruppen, nämlich 4. Für 3 Gruppen dagegen verschwinden ihre sämmtlichen Glieder identisch sowie auch diejenigen der Elementarfunctionen a_{1112}, a_{1122}, a_{11122}. Es bleiben somit von der Gleichung (3) nur noch diejenigen Glieder übrig, welche in III_{32} enthalten sind. Da diese Beziehung aber immer noch eine Identität sein muss, so erblicken wir in $III_{32} = 0$ nichts anderes als eine Relation zwischen den Elementarfunctionen der drei Gruppen $P_1 P_2 P_3$.

Für 2 Gruppen bleibt von Gleichung (3) nur die Beziehung übrig

$$a_1 II_{22} = a_1 (a_1^2 a_{22} + a_2^2 a_{11} - a_1 a_2 a_{12} - 4 a_{11} a_{22} + a_{12}^2) = 0,$$

d. h. für zwei Gruppen erhalten wir aus derselben die Relation vom Gewicht 4:

$$II_{22} = 0.$$

§ 13.

Die primitiven Relationen.

Ist die Zahl τ der verschiedenen Reihen von Elementen, welche in der Function J vorkommen, gleich dem Gewicht Q der letzteren, so ist diese linear hinsichtlich der Elemente jeder Reihe. Die einer

*) Es ist hierbei vorausgesetzt, dass eine solche Relation für weniger Gruppen auch in niedrigere Relationen zerfallen kann.

solchen Function entsprechenden Relationen mögen *primitive Relationen* heissen.

Diese verdienen hervorgehoben zu werden, *da man aus einer solchen durch Vertauschung von gewissen Elementenreihen zunächst alle gleichwerthige primitive Relationen und durch nachträgliche Coincidenz von Reihen alle wenigerreihige Relationen gleichen Gewichts erhalten kann.*

Die gleichwerthigen Relationen sind nicht sämmtlich von einander unabhängig; es zeigt sich in allen Fällen leicht, dass eine Anzahl derselben lineare Combinationen der übrigen sind. Befinden sich aber unter denselben σ unabhängige Relationen $R_1, R_2, \ldots, R_\sigma$, welche man in jedem einzelnen Fall ermitteln kann, so geben dieselben linear combinirt:

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \cdots + \lambda_\sigma R_\sigma = 0$$

eine $\sigma - 1$-fach unendliche Schaar von Relationen, aus welchen alle möglichen speciellen Relationen hergeleitet werden können. Es leuchtet ein, dass die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\sigma$ entweder einfache Zahlen oder auch beliebig hohe gleichwerthige symmetrische Functionen oder Combinationen von solchen sein können.

Für zwei Gruppen finden wir beispielsweise die drei Relationen:

$a_1a_2a_{34}$	$a_1a_3a_{24}$	$a_1a_4a_{23}$	$a_2a_3a_{14}$	$a_2a_4a_{13}$	$a_3a_4a_{12}$	$a_{12}a_{34}$	$a_{13}a_{24}$	$a_{14}a_{23}$
2	−1	−1	−1	−1	2	−4	2	2
−1	2	−1	−1	2	−1	2	−4	2
−1	−1	2	2	−1	−1	2	2	−4

Dieselben geben addirt Null:

$$R_1 + R_2 + R_3 \equiv 0$$

und repräsentiren daher auch nur eine einfach unendliche Schaar von gleichwerthigen Relationen:

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 = 0.$$

Fallen zwei Reihen zusammen, so gehen sie in eine Relation über:

$$a_1 a_2 a_{13} + a_1 a_3 a_{12} - a_1^2 a_{23} - 2a_2 a_3 a_{11} - 2a_{12} a_{13} + 4a_{11} a_{23} = 0,$$

aus welcher durch weitere Coincidenz noch die folgende hervorgeht:

$$a_1^2 a_{22} + a_2^2 a_{11} - a_1 a_2 a_{12} + a_{12}^2 - 4a_{11} a_{22} = 0.$$

§ 14.

Die niedrigsten Relationen.

Unter den verschiedenen i-förmigen Functionen, welche noch durch elementare dargestellt werden können, sind offenbar diejenigen

vom Gewicht $i+1$ die niedrigsten, indem eine solche Darstellung für eine i-förmige Function vom Gewicht i als elementare nicht weiter möglich ist. Da nun diese Function höchstens für $i-1$ Gruppen identisch verschwindet, so liefert sie auch für dieselben eine niedrigste Relation. Setzen wir an Stelle von i die Zahl $r+1$, so folgt:

Die niedrigsten Relationen, durch welche die Elementarfunctionen von r Gruppen verbunden sind, besitzen das Gewicht $r+2$ und sind enthalten in den $r+1$-förmigen symmetrischen Functionen vom Gewicht $r+2$, welchen somit die Theilgewichte

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_r, \quad q_{r+1} = 2$$

zukommen.

§ 15.

Anwendung des Differentialprocesses des § 10 auf die Relationen.

Es leuchtet ein, dass sich der in § 10 angegebene Process

$$\sum \frac{\partial J}{\partial t_1} s_1 = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial a} \sum \frac{\partial a}{\partial t_1} s_1 \tag{1}$$

mit Vortheil auch auf die Relationen anwenden lässt. Ist $\varphi = 0$ eine solche, so ist $J = 0$, womit derselbe übergeht in

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} s_1 \equiv \sum \frac{\partial \varphi}{\partial a} \sum \frac{\partial a}{\partial t_1} s_1 = 0. \tag{2}$$

Enthält die Relation φ vom Gewicht Q nur zwei Reihen, so lassen sich von derselben ausgehend mit Hülfe der Operation (2) zunächst alle übrigen zweireihigen, dann aber auch alle nur möglichen mehrreihigen Relationen vom Gewicht Q ermitteln.

Für drei Gruppen von je zwei Elementen besteht die Relation (siehe § 17):

$$III_{32} \equiv a_1 II_{22} - 3a_{111}(a_2^2 - 3a_{22}) + a_{112}(2a_1a_2 - 3a_{12}) - a_{122}(a_1^2 - 3a_{11}) = 0,$$

welche mit Hülfe der Operation $\sum \frac{\partial III_{32}}{\partial x_1} y_1 = 0$ sofort übergeht in:

$$III_{23} \equiv a_2 II_{22} - 3a_{222}(a_1^2 - 3a_{11}) + a_{122}(2a_1a_2 - 3a_{12}) - a_{112}(a_2^2 - 3a_{22}) = 0,$$

wo II_{22} die in § 17 gefundene Relation zwischen zwei Gruppen bezeichnet.

2. Die Relationen zwischen den Elementarfunctionen. Zweite Methode.

§ 16.

Allgemeine Darstellung.

1. Hat man r Gruppen

$$(1)\qquad \begin{cases} P_1(x_1 y_1 z_1 \ldots v_1), \\ P_2(x_2 y_2 z_2 \ldots v_2), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_r(x_r y_r z_r \ldots v_r) \end{cases}$$

von je n Elementen und hierzu die weitere Gruppe

$$P(xyz \ldots v),$$

so lassen sich aus je zwei Elementen der letzteren und den entsprechenden Elementen jeder Gruppe

$$P_i(x_i y_i z_i \ldots v_i)$$

$\binom{n}{2}$ zweigliedrige Determinanten

$$(2)\qquad (xy_i),\ (xz_i),\ (xt_i),\ \ldots,\ (uv_i),$$

sowie die $\binom{n}{1}$ Differenzen

$$(3)\qquad (x - x_i),\ (y - y_i),\ (z - z_i),\ \ldots,\ (v - v_i)$$

bilden, welche sämmtlich identisch verschwinden, wenn die Elemente der Gruppen P und P_i zusammenfallen.

Setzt man an Stelle von $x, y, z, \ldots; x_i, y_i, z_i, \ldots$ die homogenen Elemente $\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}, \ldots; \frac{x_i}{w_i}, \frac{y_i}{w_i}, \frac{z_i}{w_i}, \ldots$, so gehen die Differenzen (3) über in die Determinanten:

$$(4)\qquad (xw_i),\ (yw_i),\ (zw_i),\ \ldots,\ (vw_i),$$

so dass einer Gruppe P_i $\binom{n+1}{2}$ zweigliedrige Determinanten entsprechen.

Betrachtet man dieselben als Elemente einer neuen Gruppe D_i, so erhält man für $i = 1, 2, 3, \ldots, r$ das System:

$$(5)\qquad \begin{cases} D_1\{(xy_1),\ (xz_1),\ (xt_1),\ \ldots,\ (vw_1)\}, \\ D_2\{(xy_2),\ (xz_2),\ (xt_2),\ \ldots,\ (vw_2)\}, \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ D_r\{(xy_r),\ (xz_r),\ (xt_r),\ \ldots,\ (vw_r)\}, \end{cases}$$

in welchem die Elemente irgend einer Gruppe $D_\varkappa$ sämmtlich identisch

verschwinden, sobald die Gruppe $P(xyz \ldots w)$ mit der Gruppe $P_x(x_x y_x z_x \ldots w_x)$ coincidirt.

Jede r-förmige symmetrische Function der Gruppen dieses Systems ist auch eine homogene Function hinsichtlich der Elemente jeder Gruppe des Systems (1). Da nun eine solche auch unverändert bleibt, wenn man irgend zwei Gruppen P_i und P_x vertauscht, so ist sie auch eine symmetrische Function der Gruppen $P_1, P_2, \ldots, P_r$. Es gilt deshalb der Satz:

Jede symmetrische Function der Gruppen $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_r$ ist auch eine solche für die Gruppen $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_r$.

Bildet man insbesondere die r-förmigen Elementarfunctionen des Systems (5):

$$(6) \qquad \begin{cases} \Sigma(xy_1)(xy_2)(xy_3)\ldots(xy_r) = 0, \\ \Sigma(xy_1)(xy_2)(xy_3)\ldots(xw_r) = 0, \\ \Sigma(xy_1)(xy_2)(xy_3)\ldots(yw_r) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Sigma(vw_1)(vw_2)(vw_3)\ldots(vw_r) = 0, \end{cases}$$

deren Anzahl $\left(\begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ ist, so ist jede derselben linear in Bezug auf die homogenen Elemente der Gruppe (1). Da eine solche auch eine symmetrische Function derselben ist, so wird sie sich als lineare Function hinsichtlich der r-förmigen Elementarfunctionen der Gruppen $P_1 P_2 P_3 \ldots P_r$ darstellen lassen; da ferner jede Gruppe des Systems (5) die Elemente $xyz \ldots w$ linear enthält, so wird jede r-förmige Function dieser Gruppen auch eine homogene lineare Function hinsichtlich der Productcombinationen $\overset{r}{(xyz \ldots w)}$ sein.

Eine solche sei bezeichnet mit:

$$\Pi\left(\overset{r}{(xyz \ldots w)},\ a_r b_r c_r \ldots\right),$$

wo $a_r, b_r, c_r, \ldots$ r-förmige Elementarfunctionen des Systems (1) darstellen.

Da nun jede r-förmige (elementare) Function der Gruppen (5) eine homogene (lineare) Function irgend einer Gruppe D_i ist, so wird eine solche identisch verschwinden, wenn die Gruppe $P(xyz \ldots w)$ mit der Gruppe $P_i(x_i y_i z_i \ldots w_i)$ coincidirt. Das gleiche wird auch für die Functionen Π der Fall sein müssen. Es bestehen daher die Gleichungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} \Pi_i(x_1 y_1 z_1 \ldots;\ a_r b_r c_r \ldots) = 0, \\ \Pi_i(x_2 y_2 z_2 \ldots;\ a_r b_r c_r \ldots) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Pi_i(x_r y_r z_r \ldots;\ a_r b_r c_r \ldots) = 0, \end{cases}$$

welche addirt eine Summe geben:

$$(8)\qquad \sum \Pi_i \left(\overbrace{(x_1 y_1 z_1 \ldots w_1)}^{r};\ a_r b_r c_r \ldots \right) = 0,$$

in welcher neben den r-förmigen Elementarfunctionen $a_r, b_r, c_r, \ldots$ die einförmigen Functionen

$$\Sigma x_1^r,\quad \Sigma x_1^{r-1} y_1,\quad \Sigma x_1^{r-2} y_1 z_1,\quad \text{etc.}$$

vom Gewicht r homogen linear auftreten.

Drückt man die letzteren durch Elementarfunctionen aus, so geht die Summe $\Sigma\Pi_i$ offenbar in eine identische Relation zwischen denselben über; ersetzt man andererseits die r-förmigen Functionen $a_r, b_r, c_r, \ldots$ durch einförmige Functionen, so erhalten wir eine solche zwischen nur einförmigen Functionen.

2. Setzt man in einer Relation, in welcher die Reihe w homogen vom Grade ϱ auftritt, die Elemente der letzteren

$$w_1 = w_2 = w_3 = \cdots = w_r = 1,$$

so erniedrigt dieselbe ihr Gewicht um ϱ und bleibt eine solche vom Gewicht $2r - \varrho$ übrig, welche eine wirkliche ist, solange $\varrho \lesseqgtr r - 2$ und illusorisch wird für $\varrho > r - 2$.

Auch hieraus geht somit hervor, dass die niedrigsten Relationen vom Gewicht $r + 2$ sind.

Hierbei ist zu beachten, dass eine Elementarfunction:

$$E = \Sigma x_1 x_2 \ldots x_\lambda y_{\lambda+1} y_{\lambda+2} \ldots y_\mu z_{\mu+1} z_{\mu+2} \ldots w_i w_{i+1} w_{i+2} \ldots w_\varkappa,$$

welche hinsichtlich der Reihen $x, y, z, \ldots, u$ vom Gewicht i und in w vom Gewicht $\varkappa$ sein soll, für

$$w_1 = w_2 = w_3 = \cdots = w_r = 1$$

übergeht in eine solche

$$E = \binom{r-i}{\varkappa} \Sigma x_1 x_2 \ldots x_\lambda y_{\lambda+1} y_{\lambda+2} \ldots y_\mu z_{\mu+1} z_{\mu+2} \ldots u_i,$$

welche nur noch vom Gewicht i ist.

Für $r = 6$, $i = 3$, $\varkappa = 2$ geht beispielsweise die Function $\Sigma x_1 y_2 z_3 w_4 w_5$ über in

$$\sum_{w=1}^{r=6} x_1 y_2 z_3 w_4^2 w_5 = 3\,\Sigma x_1 y_2 z_3.$$

3. Da jede höhere r-förmige symmetrische Function der Gruppen $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_r$ auch eine solche der Gruppen $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_r$

ist, so lassen sich dieselben ebenfalls als homogene (lineare) Functionen von r-förmigen Functionen gleichen Gewichts der Gruppen P darstellen; da ferner eine solche auch identisch verschwindet, wenn eine Gruppe $P_i(x_i y_i z_i \ldots)$ mit $P(xyz\ldots)$ coincidirt, so folgt, dass auch *jede höhere r-förmige symmetrische Function der Gruppen D eine Relation zwischen den Elementarfunctionen der Gruppen $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_r$ liefert.*

Diese Relationen sind jedoch nicht sämmtlich von einander unabhängig. Für r Gruppen P_i von je n Elementen $x_i y_i z_i \ldots u_i$ ist bekanntlich die Zahl der Elementarfunctionen $\binom{n+r}{r}$, während die der Elemente aller Gruppen nur $r \cdot n$ ist. Es können deshalb zwischen den ersteren nur

$$s = \binom{n+r}{r} - rn$$

unabhängige Relationen vorhanden sein, aus welchen sich alle übrigen zusammensetzen lassen müssen.

4. Da jede r-förmige symmetrische Function Π_r der Gruppen $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_r$ für $r, r-1, r-2, \ldots, 3, 2$, (1) Gruppen P_i identisch verschwindet, so liefert eine solche auch unmittelbar je eine Relation für $r, r-1, r-2, \ldots, 3, 2$ Gruppen. Ist $\Sigma\Pi_r$ eine niedrigste Relation für r Gruppen vom Gewicht $r+2$, so ist sie auch eine höhere für jede beliebige Anzahl r_1 von weniger Gruppen. Man erhält eine solche am einfachsten, indem man in $\Sigma\Pi_r = 0$ alle Glieder gleich Null setzt, welche höhere als r_1-förmige Elementarfunctionen enthalten.

Will man daher sämmtliche Relationen irgend eines Gebiets ermitteln, so genügt es, alle niedrigsten Relationen für jede Anzahl von Gruppen zu bilden; alle übrigen (höheren) Relationen für weniger Gruppen sind in diesen unmittelbar enthalten.

Eine Relation $\Sigma\Pi_r$ vom Gewicht $r+2$ wird sich demnach auf die Form bringen lassen:

$$R_2 + R_3 + R_4 + \cdots + R_r = 0,$$

wo beispielsweise R_i eine Function vom Gewicht $r+2$ darstellt, in welcher noch i-förmige Elementarfunctionen aber keine höheren als solche enthalten sind. Alsdann ist

$$R_2 = 0$$

eine Relation (vom Gewicht $r+2$) für zwei,

$$R_2 + R_3' = 0$$

eine solche für drei,

$$R_2 + R_3 + R_4 = 0$$

eine solche für vier Gruppen und allgemein

$$R_2 + R_3 + \cdots + R_i = 0$$

eine Relation für i Gruppen.

Was die niedrigsten Relationen für r Gruppen anlangt, so sind dieselben dargestellt durch die r-förmigen Elementarfunctionen der Gruppen D, in welchen nur zwei von den Reihen

$$(xy_i),\ (xz_i),\ (xt_i),\ \ldots,\ (uv_i)$$

und $r-2$ Reihen der Differenzen

$$(x-x_i),\ (y-y_i),\ (z-z_i),\ \ldots,\ (v-v_i)$$

enthalten sind. Eine solche ist beispielsweise

$$\Sigma\Pi(xy_1)\,(rt_2)\,(x-x_3)\,(y-y_4)\,\ldots\,(v-v_r),$$

welche das Gewicht $r+2$ besitzt.

Da sich auf jede dieser Functionen sowie auch auf die aus denselben hervorgehenden Relationen unmittelbar die Operation

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x}y + \sum_1^r \frac{\partial\Pi}{\partial x_1}y_1 = 0, \quad \text{bezw.} \quad \sum\frac{\partial\Pi}{\partial a}\sum\frac{\partial a}{\partial x_1}y_1 = 0$$

anwenden lässt, so können wir sämmtliche mehrreihigen Relationen aus den zweireihigen (von gleichem Gewicht) erhalten. Alle zweireihigen Relationen gleichen Gewichts lassen sich ebenso aus einer einzigen einfachsten zweireihigen Function herleiten, welche hinsichtlich der beiden Reihen die Gewichtszahlen r und 2 besitzt und von der Form ist:

$$(9)\quad \begin{cases} \Sigma\Pi(xy_1)\,(xy_2)\,(x-x_3)\,(x-x_4)\,\ldots\,(x-x_r) = 0 \quad \text{oder} \\ \quad x^r a_{22} - x^{r-1}y a_{12} + x^{r-2}y^2 a_{11} \\ - x^{r-1}a_{122} + 2x^{r-2}y a_{112} - 3x^{r-3}y^2 a_{111} \\ + x^{r-2}a_{1122} - 3x^{r-3}y a_{1112} + 6x^{r-4}y^2 a_{1111} \\ - \quad . \qquad . \qquad . \\ + \quad . \qquad . \qquad . \\ \mp x^2 a_{\underbrace{111\cdots123}_{r}} \mp (r-1)xy a_{\underbrace{111\cdots12}_{r}} \pm r\tfrac{r(r-1)}{2}y^2 a_{\underbrace{111\cdots1}_{r}} = 0, \end{cases}$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem r gerade oder ungerade ist.

Da diese Function auch für weniger als r Gruppen identisch verschwindet, so liefert dieselbe auch unmittelbar eine höhere Relation vom Gewicht $r+2$ für $r-1,\ r-2,\ \ldots,\ 3,\ 2$ Gruppen. Wir werden demnach zu sämmtlichen Relationen gelangen, wenn wir der Reihe nach die niedrigsten von der Form (9) für 2, 3, 4, 5, ... Gruppen bilden.

§ 17.

Die Relationen des ternären Gebiets vom Gewicht 4, 5, 6, 7, 8 und 9.

Im folgenden bezeichne ich die Relationen mit lateinischen Ziffern welche unmittelbar die Gruppenzahl angeben sollen, für welche die Relationen Giltigkeit besitzen.

1. Für $r = 2$ erhalten wir die Function

$$\Sigma(xy_1)\,(xy_2) = 0$$

oder

$$x^2 a_{22} - xy a_{12} + y^2 a_{11} = 0,$$

welcher die Relation entspricht:

(1) $$II_{22} = a_1{}^2 a_{22} + a_2{}^2 a_{11} - a_1 a_2 a_{12} - 4 a_{11} a_{22} + a_{12}^2 = 0.$$ *)

Dies ist auch die Invariante der ternären quadratischen Form:

$$a_x{}^2 \equiv a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1 x + a_2 y + 1 = 0.$$

$$(ab)^2 \equiv II_{22} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & 2a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Für $r = 3$ ist eine niedrigste Relation enthalten in:

$$\Sigma(xy_1)\,(xy_2)\,(x - x_3) = 0$$

oder

$$x^3 a_{22} - x^2 y a_{12} + xy^2 a_{11} - x^2 a_{122} + 2xy a_{112} - 3y^2 a_{111} = 0.$$

Hieraus folgt die Relation

(2) $$III_{32}{}^*) = a_1 II_{22} + 3a_{111}(3a_{22} - a_2{}^2) + a_{112}(2a_1 a_2 - 3a_{12}) + a_{122}(3a_{11} - a_1{}^2) = 0,$$

aus welcher durch Vertauschung von x mit y noch eine weitere niedrigste Relation hervorgeht:

(3) $$III_{23}{}^*) = a_2 II_{22} + 3a_{222}(3a_{11} - a_1{}^2) + a_{221}(2a_2 a_1 - 3a_{21}) + a_{211}(3a_{22} - a_2{}^2) = 0.$$

3. Für $r = 4$ erhalten wir die niedrigsten Relationen aus

$$\Sigma(xy_1)\,(xy_2)\,(x - x_3)\,(x - x_4) = 0$$

oder

$$\begin{aligned} &x^4 a_{22} - x^3 y a_{12} + x^2 y^2 a_{11} \\ &- x^3 a_{122} + 2x^2 y a_{112} - 3xy^2 a_{111} \\ &+ x^2 a_{1122} - 3xy a_{1112} + 6y^2 a_{1111} = 0. \end{aligned}$$

*) Die Relationen vom Gewicht 4,5 hat schon Herr Brill auf anderem Wege in seinen Vorlesungen über algebraische Functionen gebildet.

Wir finden als Relation:

$$
\begin{aligned}
IV_{42} = {} & 3a_1 III_{32} - 2a_{11} II_{22} - 6a_1 a_{22} a_{111} + 6a_2 a_{12} a_{111} \\
& + 2a_1 a_{11} a_{122} - 4a_2 a_{11} a_{112} - 18 a_{111} a_{122} + 6a_{112}^2 \\
& + 6a_{1111}(3a_2^2 - 8a_{22}) - 3a_{1112}(3a_1 a_2 - 4a_{12}) \\
& + a_{1122}(3a_1^2 - 8a_{11}) = 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Wendet man hierauf die Operation $\sum \frac{\partial IV_{42}}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x_1} y_1 = 0$ an, so folgen als weitere niedrigste Relationen vom Gewicht 6

$$
\begin{aligned}
IV_{33} = {} & 3a_1 III_{23} + 3a_2 III_{32} - 2a_{12} II_{22} \\
& + 6a_1 a_{11} a_{222} + 2a_1 a_{12} a_{122} - 6a_1 a_{22} a_{112} \\
& + 6a_2 a_{22} a_{111} + 2a_2 a_{12} a_{112} - 6a_2 a_{11} a_{122} \\
& - 54 a_{111} a_{222} + 6a_{112} a_{122} \\
& + 3a_{1112}(3a_2^2 - 8a_{22}) - 4a_{1122}(3a_1 a_2 - 4a_{12}) \\
& + 3a_{1222}(3a_1^2 - 8a_{11}) = 0.
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
IV_{24} = {} & 3a_2 III_{23} - 2a_{22} II_{22} - 6a_2 a_{11} a_{222} + 6a_1 a_{12} a_{222} \\
& + 2a_2 a_{22} a_{112} - 4a_1 a_{22} a_{122} - 18 a_{222} a_{112} + 6a_{122}^2 \\
& + 6a_{2222}(3a_1^2 - 8a_{11}) - 3a_{2221}(3a_2 a_1 - 4a_{21}) \\
& + a_{2211}(3a_2^2 - 8a_{22}) = 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Setzen wir in diesen Relationen die 4-förmigen Elementarfunctionen gleich Null, so gehen dieselben in Relationen für drei Gruppen über. Alsdann ist auch noch $III_{32} = 0$, $III_{23} = 0$, so dass wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
III_{42} = {} & - a_{11} II_{22} \\
& - 3a_1 a_{22} a_{111} + 3a_2 a_{12} a_{111} + a_1 a_{11} a_{122} - 2a_2 a_{11} a_{112} \\
& - 9a_{111} a_{122} + 3a_{112}^2 = 0.
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
III_{33} = {} & - a_{12} II_{22} \\
& + 3a_1 a_{11} a_{222} + a_1 a_{12} a_{122} - 3a_1 a_{22} a_{112} \\
& + 3a_2 a_{22} a_{111} + a_2 a_{12} a_{112} - 3a_2 a_{11} a_{122} \\
& - 27 a_{111} a_{222} + 3a_{112} a_{122} = 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
III_{24} = {} & - a_{22} II_{22} \\
& - 3a_2 a_{11} a_{222} + 3a_1 a_{12} a_{222} + a_2 a_{22} a_{112} - 2a_1 a_{22} a_{122} \\
& - 9a_{222} a_{112} - 3a_{122}^2 = 0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

4. Die niedrigsten Relationen für $r = 5$ erhalten wir aus

$$\Sigma(xy_1)\,(xy_2)\,(x-x_3)\,(x-x_4)\,(x-x_5) = 0.$$

Dieselben lassen sich auf die Form bringen

$$\begin{aligned} V_{52} = &+ 2a_1 IV_{42} - 5a_{11} III_{32} + 30a_{1111}(a_1a_{22} - a_2a_{12} + 2a_{122}) \\ &+ 15a_{1112}(a_2a_{11} - 2a_{112}) - 5a_{1122}(a_1a_{11} - 6a_{111}) \\ &- 30a_{11111}(2a_2^2 - 5a_{22}) + 6a_{11112}(4a_1a_2 - 5a_{12}) \\ &- 3a_{11122}(2a_1^2 - 5a_{11}) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} V_{43} = &\, 2a_2 IV_{42} + 2a_1 IV_{33} - 5a_{12} III_{32} - 5a_{11} III_{23} \\ &- 30a_{1111}\{a_2a_{22} - 6a_{222}\} + 15a_{1112}\{2a_1a_{22} - a_2a_{12}\} \\ &+ 5a_{1122}\{5a_2a_{11} - a_1a_{12} - 6a_{112}\} - 15a_{1222}\{a_1a_{11} - 6a_{111}\} \\ &- 18a_{11112}\{2a_2^2 - 5a_{22}\} + 9a_{11122}\{4a_1a_2 - 5a_{12}\} \\ &- 9a_{11222}\{2a_1^2 - 5a_{11}\} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} V_{34} = &\, 2a_1 IV_{24} + 2a_2 IV_{33} - 5a_{12} III_{23} - 5a_{22} III_{32} \\ &- 30a_{2222}\{a_1a_{11} - 6a_{111}\} + 15a_{1222}\{2a_2a_{11} - a_1a_{12}\} \\ &+ 5a_{1122}\{5a_1a_{22} - a_2a_{12} - 6a_{122}\} - 15a_{1112}\{a_2a_{22} - 6a_{222}\} \\ &- 18a_{12222}\{2a_1^2 - 5a_{11}\} + 9a_{11222}\{4a_1a_2 - 5a_{12}\} \\ &- 9a_{11122}\{2a_2^2 - 5a_{22}\} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} V_{25} = &+ 2a_2 IV_{24} - 5a_{22} III_{23} \\ &+ 30a_{22222}\{a_2a_{11} - a_1a_{12} + 2a_{112}\} + 15a_{1222}\{a_1a_{22} - 2a_{122}\} \\ &- 5a_{1122}\{a_2a_{22} - 6a_{222}\} - 30a_{22222}\{2a_1^2 - 5a_{11}\} \\ &+ 6a_{12222}\{4a_1a_2 - 5a_{12}\} - 3a_{11222}\{2a_2^2 - 5a_{22}\} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Hieraus ergeben sich unmittelbar höhere Relationen für vier Gruppen:

$$\begin{aligned} IV_{52} = &- a_{11} III_{32} + 6a_{1111}(a_1a_{22} - a_2a_{12} + 2a_{122}) \\ &+ 3a_{1112}(a_2a_{11} - 2a_{112}) - a_{1122}(a_1a_{11} - 6a_{111}) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} IV_{43} = &- a_{12} III_{32} - a_{11} III_{23} - 6a_{1111}(a_2a_{22} - 6a_{222}) \\ &+ 3a_{1112}(2a_1a_{22} - a_2a_{12}) + a_{1122}(5a_2a_{11} - a_1a_{12} - 6a_{112}) \\ &- 3a_{1222}(a_1a_{11} - 6a_{111}) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} IV_{34} = &- a_{21} III_{23} - a_{22} III_{32} - 6a_{2222}(a_1a_{11} - 6a_{111}) \\ &+ 3a_{2221}(2a_2a_{11} - a_1a_{21}) + a_{2211}(5a_1a_{22} - a_2a_{12} - 6a_{122}) \\ &- 3a_{1112}(a_2a_{22} - 6a_{222}) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

$$(17)\quad \begin{aligned} IV_{25} = &- a_{22} III_{23} + 6a_{2222}(a_2 a_{11} - a_1 a_{12} + 2a_{112}) \\ &+ 3a_{1222}(a_1 a_{22} - 2a_{122}) - a_{1122}(a_2 a_{22} - 6a_{222}) = 0. \end{aligned}$$

Betrachtet man die Formeln (10), (11), (12) und (13), so fällt in die Augen, dass dieselben ausser den in III_{32} und III_{23} vorkommenden keine Glieder mehr enthalten, in welchen als höchste Elementarfunction eine dreiförmige auftritt. Dieselben liefern deshalb auch keine höheren Relationen für drei Gruppen mehr. Die sämmtlichen für diese Gruppenzahl bestehenden Relationen sind ausgedrückt durch die Formen:

$$III_{32},\quad III_{23},\quad III_{42},\quad III_{33},\quad III_{24},$$

von denen zwei das Gewicht 5 und die übrigen drei das Gewicht 6 besitzen. Da nun für drei Gruppen bekanntlich nur drei unabhängige Relationen vorhanden sein können, so müssen dieselben durch zwei Identitäten untereinander zusammenhängen.

5. Die niedrigsten Relationen für 6 Gruppen erhalten wir aus:

$$\Sigma(xy_1)(xy_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)(x - x_6) = 0.$$

Dieselben lassen sich mit Hülfe der früheren Relationen auf die einfache Gestalt bringen:

$$(18)\quad \begin{aligned} VI_{62} = &\tfrac{5}{3} a_1 V_{52} - 3a_{11} IV_{42} + 5a_{111} III_{32} + 10a_{1111} II_{22} \\ &- 10a_1 a_{122} a_{1111} - 80a_{1111} a_{1122} + 20a_2 a_{112} a_{1111} - 15a_2 a_{111} a_{1112} \\ &+ 5a_1 a_{111} a_{1122} + 30a_{1112}^2 - 30a_{11111}(3a_1 a_{22} - 3a_2 a_{12} + 5a_{122}) \\ &- 12a_{11112}(3a_2 a_{11} - 5a_{112}) + 9a_{11122}(a_1 a_{11} - 5a_{111}) \\ &+ 30a_{111111}(5a_2^2 - 12a_{22}) - 10a_{111112}(5a_1 a_2 - 6a_{12}) \\ &+ 2a_{111122}(5a_1^2 - 12a_{11}) = 0. \end{aligned}$$

$$(19)\quad \begin{aligned} VI_{53} = &\tfrac{5}{3} a_1 V_{43} + \tfrac{5}{3} a_2 V_{52} - 3a_{12} IV_{42} - 3a_{11} IV_{33} + 5a_{112} III_{32} \\ &+ 5a_{111} III_{23} + 10a_{1112} II_{22} \\ &- 10a_1 a_{122} a_{1112} - 30a_1 a_{222} a_{1111} - 25a_2 a_{111} a_{1122} \\ &+ 5a_1 a_{112} a_{1122} + 15a_1 a_{111} a_{1222} - 240a_{1111} a_{1222} \\ &+ 40a_{1112} a_{1122} + 30a_2 a_{122} a_{1111} + 5a_2 a_{112} a_{1112} \\ &+ 90a_{11111}(a_2 a_{22} - 5a_{222}) - 6a_{11112}(15a_1 a_{22} - 9a_2 a_{12} + 5a_{122}) \\ &+ 3a_{11122}(3a_1 a_{12} - 21a_2 a_{11} + 25a_{112}) + 27a_{11222}(a_1 a_{11} - 5a_{111}) \\ &+ 20a_{111112}(5a_2^2 - 12a_{22}) - 16a_{111122}(5a_1 a_2 - 6a_{12}) \\ &+ 6a_{111222}(5a_1^2 - 12a_{11}) = 0. \end{aligned}$$

$$
(20)\quad \left\{\begin{aligned}
VI_{44} = {}& \tfrac{5}{3} a_2 V_{43} + \tfrac{5}{6} a_1 V_{34} - \tfrac{3}{2} a_{22} IV_{42} - 3 a_{12} IV_{33} - \tfrac{3}{2} a_{11} IV_{24} \\
& + 5 a_{122} III_{32} + 5 a_{112} III_{23} + 20 a_{1122} II_{22} \\
& + 30 a_1 a_{111} a_{2222} - 60 a_1 a_{222} a_{1112} + 15 a_2 a_{122} a_{1112} - 60 a_{1112} a_{1222} \\
& \qquad - 5 a_1 a_{122} a_{1122} - 480 a_{1111} a_{2222} \\
& + 30 a_2 a_{222} a_{1111} - 60 a_2 a_{111} a_{1222} + 15 a_1 a_{112} a_{1222} + 40 a_{1122}^2 \\
& \qquad - 5 a_2 a_{112} a_{1122} \\
& + 54 a_{11112} (a_2 a_{22} - 5 a_{222}) - 9 a_{11122} (9 a_1 a_{22} - 3 a_2 a_{12} - 5 a_{122}) \\
& + 54 a_{12222} (a_1 a_{11} - 5 a_{111}) - 9 a_{11222} (9 a_2 a_{11} - 3 a_1 a_{12} - 5 a_{112}) \\
& + 12 a_{111122} (5 a_2^2 - 12 a_{22}) - 18 a_{111222} (5 a_1 a_2 - 6 a_{12}) \\
& \qquad + 12 a_{112222} (5 a_1^2 - 12 a_{11}) = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Vertauscht man in sämmtlichen Elementarfunctionen der Formeln (18) und (19) die Indices 1 und 2, so ergeben sich die weiteren Relationen

$$VI_{35} = 0 \quad \text{und} \quad VI_{26} = 0,$$

welche dieselbe Gestalt haben und deshalb weggelassen werden können. Die Relation VI_{44} ist symmetrisch hinsichtlich der beiden Elementenreihen x und y.

Für $r = 5$ ergeben sich hieraus die Relationen vom Gewicht 8:

$$
\begin{aligned}
(21)\quad V_{62} = {}& - 3 a_{11} IV_{42} + 5 a_{111} III_{32} + 10 a_{1111} II_{22} \\
& + 10 a_{1111} (-a_1 a_{122} + 2 a_2 a_{112} - 4 a_{1122}) \\
& - 15 a_{1112} (a_2 a_{111} - 2 a_{1112}) + 5 a_{1122} (a_1 a_{111} - 8 a_{1111}) \\
& - 30 a_{11111} (3 a_1 a_{22} - 3 a_2 a_{12} + 5 a_{122}) \\
& - 12 a_{11112} (3 a_2 a_{11} - 5 a_{112}) + 9 a_{11122} (a_1 a_{11} - 5 a_{111}) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(22)\quad V_{53} = {}& - 3 a_{12} IV_{42} - 3 a_{11} IV_{33} + 5 a_{112} III_{32} + 5 a_{111} III_{23} \\
& + 10 a_{1112} II_{22} \\
& + 30 a_{1111} (-a_1 a_{222} + a_2 a_{122} - 4 a_{1222}) \\
& - 5 a_{1112} (2 a_1 a_{122} - a_2 a_{112} - 4 a_{1122}) \\
& - 5 a_{1122} (5 a_2 a_{111} - a_1 a_{112} - 4 a_{1112}) \\
& + 15 a_{1222} (a_1 a_{111} - 8 a_{1111}) + 90 a_{11111} (a_2 a_{22} - 5 a_{222}) \\
& - 6 a_{11112} (15 a_1 a_{22} - 9 a_2 a_{12} + 5 a_{122}) \\
& + 3 a_{11122} (3 a_1 a_{12} - 21 a_2 a_{11} + 25 a_{112}) \\
& + 27 a_{11222} (a_1 a_{11} - 5 a_{111}) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(23)\quad V_{44} = &-\tfrac{3}{2}a_{22}IV_{42} - 3a_{12}IV_{33} - \tfrac{3}{2}a_{11}IV_{24} + 5a_{122}III_{32}\\
&+ 5a_{112}III_{23} + 20a_{1122}II_{22}\\
&\left.\begin{aligned}
&+ 30a_1a_{111}a_{2222} - 60a_1a_{222}a_{1112}\\
&+ 15a_2a_{122}a_{1112} - 5a_1a_{122}a_{1122}\\
&+ 30a_2a_{222}a_{1111} - 60a_2a_{111}a_{1222}\\
&+ 15a_1a_{112}a_{1222} - 5a_1a_{112}a_{1122}
\end{aligned}\right\} -60a_{1112}a_{1222} - 480a_{1111}a_{2222} + 40a_{1122}^2\\
&+ 54a_{11112}(a_2a_{22} - 5a_{222}) - 9a_{11122}(9a_1a_{22} - 3a_1a_{12} - 5a_{122})\\
&+ 54a_{12222}(a_1a_{11} - 5a_{111}) - 9a_{11222}(9a_2a_{11} - 3a_2a_{12} - 5a_{112}) = 0.
\end{aligned}
$$

Vertauscht man hierin die Indices 1 und 2, so ergeben sich die weiteren Formeln $V_{35} = 0$ und $V_{26} = 0$.

Ebenso erhalten wir für $r = 4$ die Relationen vom Gewicht 8:

$$
\begin{aligned}
(24)\quad IV_{62} = &+ a_{111}III_{32} + 2a_{1111}II_{22}\\
&+ 2a_{1111}(-a_1a_{122} + 2a_2a_{112} - 4a_{1122})\\
&- 3a_{1112}(a_2a_{111} - 2a_{1112}) + a_{1122}(a_1a_{111} - 8a_{1111}) = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(25)\quad IV_{53} = &+ a_{112}III_{32} + a_{111}III_{23} + 2a_{1112}II_{22}\\
&+ 6a_{1111}(-a_1a_{222} + a_2a_{122} - 4a_{1222})\\
&- a_{1112}(2a_1a_{122} - a_2a_{112} - 4a_{1122})\\
&- a_{1122}(5a_2a_{111} - a_1a_{112} - 4a_{1112}) + 3a_{1222}(a_1a_{111} - 8a_{1111}) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(26)\quad IV_{44} = &\quad 2a_{122}III_{32} + 2a_{112}III_{23} + 4a_{1122}II_{22}\\
&+ 6a_{1111}(a_2a_{222} - 8a_{2222})\\
&+ 3a_{1112}(a_2a_{122} - 4a_1a_{222} - 2a_{1222})\\
&- a_{1122}(a_1a_{122} + a_2a_{112} - 8a_{1122})\\
&+ 3a_{1222}(a_1a_{112} - 4a_2a_{111} - 2a_{1112})\\
&+ 6a_{2222}(a_1a_{111} - 8a_{2222}) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(27)\quad IV_{35} = &\quad a_{122}III_{23} + a_{222}III_{32} + 2a_{1222}II_{22}\\
&+ 6a_{2222}(-a_2a_{111} + a_1a_{112} - 4a_{1112})\\
&- a_{1222}(2a_2a_{112} - a_1a_{122} - 4a_{1122})\\
&- a_{1122}(5a_1a_{222} - a_2a_{122} - 4a_{1222}) + 3a_{1112}(a_2a_{222} - 8a_{222}) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(28)\quad IV_{26} = &+ a_{222}III_{32} + 2a_{2222}II_{22}\\
&+ 2a_{2222}(-a_2a_{112} + 2a_1a_{122} - 4a_{1122})\\
&- 3a_{1222}(a_1a_{222} - 2a_{1222}) + a_{1122}(a_2a_{222} - 8a_{2222}) = 0.
\end{aligned}
$$

6. Für 7 Gruppen finden wir 6 niedrigste Relationen vom Gewicht 9, von denen 3 angegeben werden sollen:

$$(29)\quad VII_{72} = 3a_1 VI_{62} - 14a_{11} V_{52} + 7a_{111} IV_{42} - 70a_{1111} II_{22}$$
$$+ 70a_{11111}(a_1a_{122} - 2a_2a_{112} + 5a_{1122}) + 42a_{11112}(2a_2a_{111} - 5a_{1112})$$
$$- 21a_{11122}(a_1a_{111} - 10a_{1111})$$
$$+ 210a_{111111}(2a_1a_{22} - 2a_2a_{12} + 3a_{122})$$
$$+ 70a_{111112}(2a_2a_{11} - 3a_{112}) - 14a_{111122}(2a_1a_{11} - 9a_{111})$$
$$+ 30a_{1111112}(6a_1a_2 - 7a_{12}) - 10a_{1111122}(3a_1^2 - 7a_{11})$$
$$- 210a_{1111111}(3a_2^2 - 7a_{22}) = 0.$$

$$(30)\quad VII_{63} = 3a_2 VI_{62} + 3a_1 VI_{53} - 14a_{12} V_{52} - 14a_{11} V_{43} + 7a_{112} IV_{42}$$
$$+ 7a_{111} IV_{33} - 70a_{11112} II_{22}$$
$$+ 210a_{11111}(a_1a_{222} - a_2a_{122} + 5a_{1222})$$
$$- 14a_{11112}(-5a_1a_{122} + 4a_2a_{112} + 5a_{1122})$$
$$+ 21a_{11122}(7a_2a_{111} - a_1a_{112} - 10a_{1112})$$
$$- 63a_{11222}(a_1a_{111} - 10a_{1111}) - 210a_{111111}(2a_2a_{22} - 9a_{222})$$
$$+ 70a_{111112}(6a_1a_{22} - 4a_2a_{12} + 3a_{122})$$
$$- 14a_{111122}(2a_1a_{12} - 18a_2a_{11} + 21a_{112})$$
$$- 42a_{111222}(2a_1a_{11} - 9a_{111}) - 150a_{1111112}(3a_2^2 - 7a_{22})$$
$$+ 50a_{1111122}(6a_1a_2 - 7a_{12}) - 30a_{1111222}(3a_1^2 - 7a_{11}) = 0,$$

$$(31)\quad VII_{54} = 6a_2 VI_{53} + 3a_1 VI_{44} - 28a_{22} V_{52} - 28a_{12} V_{43} - 14a_{11} V_{34}$$
$$+ 14a_{122} IV_{42} + 14a_{112} IV_{33} + 7a_{111} IV_{24} - 140a_{11122} II_{22}$$
$$- 420a_{11111}(a_2a_{222} - 10a_{2222})$$
$$+ 42a_{11112}(5a_1a_{222} - a_2a_{122} - 5a_{1222})$$
$$- 14a_{11122}(-7a_1a_{122} - a_2a_{112} + 40a_{1122})$$
$$+ 126a_{11222}(3a_2a_{111} - a_1a_{112}) - 252a_{12222}(a_1a_{111} - 10a_{1111})$$
$$- 280a_{111112}(2a_2a_{22} - 9a_{222})$$
$$+ 56a_{111122}(14a_1a_{22} - 6a_2a_{12} - 3a_{122})$$
$$+ 168a_{111222}(4a_2a_{11} - a_1a_{12} - 3a_{112})$$
$$- 168a_{112222}(2a_1a_{11} - 9a_{111}) - 200a_{1111122}(3a_2^2 - 7a_{22})$$
$$+ 120a_{1111222}(6a_1a_2 - 7a_{12}) - 120a_{1112222}(3a_1^2 - 7a_{11}) = 0.$$

Die drei übrigen VII_{45}, VII_{36}, VII_{27} erhält man hieraus durch Vertauschung der Indices 1 und 2.

Aus diesen Relationen gehen unmittelbar höhere für 6 und 5 Gruppen hervor, von denen nur die den Formeln (29), (30) und (31) entsprechenden angegeben werden sollen:

$$(32)\quad VI_{72} = -2a_{11} V_{52} + a_{111} IV_{42} - 10a_{11111} II_{22}$$
$$+ 10a_{11111}(a_1a_{122} - 2a_2a_{112} + 5a_{1122})$$
$$+ 6a_{11112}(2a_2a_{111} - 5a_{1112}) - 3a_{11122}(a_1a_{111} - 10a_{1111})$$
$$+ 30a_{111111}(2a_1a_{22} - 2a_2a_{12} + 3a_{122})$$
$$+ 10a_{111112}(2a_2a_{11} - 3a_{112}) - 2a_{111122}(2a_1a_{11} - 9a_{111}) = 0,$$

$$(33)\quad VI_{63} = -2a_{12}V_{52} - 2a_{11}V_{43} + a_{112}IV_{42} + a_{111}IV_{33} - 10a_{11112}II_{22}$$
$$+ 30a_{11111}(a_1a_{222} - a_2a_{122} + 5a_{1222})$$
$$- 2a_{11112}(-5a_1a_{122} + 4a_2a_{112} + 5a_{11122})$$
$$+ 3a_{11122}(7a_2a_{111} - a_1a_{112} - 10a_{11112})$$
$$- 9a_{11222}(a_1a_{111} - 10a_{11111}) - 30a_{111111}(2a_2a_{22} - 9a_{222})$$
$$+ 10a_{111112}(6a_1a_{22} - 4a_2a_{12} + 3a_{122})$$
$$- 2a_{111122}(2a_1a_{12} - 18a_2a_{11} + 21a_{112})$$
$$- 6a_{111222}(2a_1a_{11} - 9a_{111}) = 0,$$

$$(34)\quad VI_{54} = -4a_{21}V_{52} - 4a_{12}V_{43} - 2a_{11}V_{34} + 2a_{122}IV_{42}$$
$$+ 2a_{112}IV_{33} + a_{111}IV_{24} - 20a_{11122}II_{22}$$
$$- 60a_{11111}(a_2a_{222} - 10a_{22222})$$
$$+ 6a_{11112}(5a_1a_{222} - a_2a_{122} - 5a_{11222})$$
$$- 2a_{11122}(-7a_1a_{122} - a_2a_{112} + 40a_{11122})$$
$$+ 18a_{11222}(3a_2a_{111} - a_1a_{112}) - 36a_{12222}(a_1a_{111} - 10a_{111})$$
$$- 40a_{111112}(2a_2a_{22} - 9a_{222})$$
$$+ 8a_{111122}(14a_1a_{22} - 6a_2a_{12} - 3a_{122})$$
$$+ 24a_{111222}(4a_2a_{11} - a_1a_{12} - 3a_{112})$$
$$- 24a_{112222}(2a_1a_{11} - 9a_{111}) = 0,$$

$$(35)\quad V_{72} = a_{111}IV_{42} - 10a_{11111}II_{22}$$
$$+ 10a_{11111}(a_1a_{122} - 2a_2a_{112} + 5a_{11122})$$
$$+ 6a_{11112}(2a_2a_{111} - 5a_{11112}) - 3a_{11122}(a_1a_{111} - 10a_{11111}) = 0,$$

$$(36)\quad V_{63} = a_{112}IV_{42} + a_{111}IV_{33} - 10a_{11112}II_{22}$$
$$+ 30a_{11111}(a_1a_{222} - a_2a_{122} + 5a_{11222})$$
$$- 2a_{11112}(-5a_1a_{122} + 4a_2a_{112} + 5a_{11122})$$
$$+ 3a_{11122}(7a_2a_{111} - a_1a_{112} - 10a_{11112})$$
$$- 9a_{11222}(a_1a_{111} - 10a_{11111}) = 0,$$

$$(37)\quad V_{54} = +2a_{122}IV_{42} + 2a_{112}IV_{33} + a_{111}IV_{24} - 20a_{11122}II_{22}$$
$$- 60a_{11111}(a_2a_{222} - 10a_{22222})$$
$$+ 6a_{11112}(5a_1a_{222} - a_2a_{122} - 5a_{11222})$$
$$- 2a_{11122}(-7a_1a_{122} - a_2a_{112} + 40a_{11122})$$
$$+ 18a_{11222}(3a_2a_{111} - a_1a_{112}) - 36a_{12222}(a_1a_{11} - 10a_{111}) = 0.$$

7. Die in Nr. 1 bis Nr. 6 dieses Paragraphen entwickelten Formeln werden genügen, um uns einen Einblick in den Bau der Relationen zu verschaffen. Wir sehen, dass sich jede (höhere) Relation mit Hülfe der früheren stets auf eine einfachste Gestalt (kanonische Form) bringen lässt, aus welcher unmittelbar ersichtlich ist, für welche Gruppenzahlen dieselbe Relationen liefert. So sind beispielsweise in der Formel (18)

drei Relationen VI_{62}, V_{62}, IV_{62} vom Gewicht 8 enthalten, nämlich je eine für 6, 5 und 4 Gruppen.

Was die Anzahl der Relationen betrifft, so finden wir für 2 Gruppen nur eine Relation vom Gewicht 4, für 3 Gruppen zwei Relationen vom Gewicht 5 und drei vom Gewicht 6, für 4 Gruppen drei Relationen vom Gewicht 6, vier vom Gewicht 7 und fünf vom Gewicht 8, u. s. w. allgemein für r Gruppen:

$$\begin{aligned} r-1 &\text{ Relationen vom Gewicht } r+2,\\ r &\quad\text{„}\quad\text{„}\quad\text{„} \quad r+3,\\ r+1 &\quad\text{„}\quad\text{„}\quad\text{„} \quad r+4,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 2r-3 &\quad\text{„}\quad\text{„}\quad\text{„} \quad 2r. \end{aligned}$$

Fasst man diese Resultate zusammen, so gilt:

Die niedrigsten Relationen für r Gruppen sind vom Gewicht $r+2$; ihre Anzahl beträgt für das ternäre Gebiet $r-1$.

Die höchsten Relationen besitzen das Gewicht $2r$; ihre Anzahl ist $2r-3$.

Jede Relation vom Gewicht $r+2$, welche eine niedrigste für r Gruppen ist, liefert je eine höhere Relation desselben Gewichts für $r-1$, $r-2, \ldots, \frac{r+2}{2}$, bezw. $\frac{r+3}{2}$ Gruppen, je nachdem r gerade oder ungerade ist.

Die Gesammtzahl aller für eine bestimmte Gruppenzahl vorhandenen und von einander verschiedenen Relationen beträgt für das ternäre Gebiet

$$s = \tfrac{1}{2}(r-1)(3r-4).$$

Da nun für r Gruppen von je zwei Elementen, die Zahl der letzteren $2r$ und die der Elementarfunctionen aber $\binom{r+2}{2}$ ist, so können zwischen den letzteren auch nur

$$\sigma = \binom{r+2}{2} - 2r = \binom{r}{2}$$

unabhängige Relationen bestehen. Die oben erhaltenen s verschiedenen Relationen müssen deshalb noch durch

$$s - \sigma = (r-1)(r-2)$$

Identitäten unter einander zusammenhängen, welche, wie leicht zu erkennen ist, nicht linear sein können.

3. Die Relationen zwischen den einförmigen Functionen.

§ 18.

Allgemeine Darstellung.

a. Eine einförmige symmetrische Function ist bekanntlich für r Gruppen eine Summe von r Gliedern, welche im allgemeinen für keinen Werth von r verschwindet und stets ihre Gestalt behält. Ist daher die i-förmige Function

$$(1) \quad J = \sum x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \cdots \times x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \cdots \times \cdots \times x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i} \cdots = f(\mathfrak{a})$$

durch einförmige Functionen $\mathfrak{a}$ dargestellt, so wird die Function $f(\mathfrak{a})$ für keinen Werth von r illusorisch werden können. Die in $f(\mathfrak{a})$ auftretenden Productcombinationen von einförmigen Functionen besitzen Coefficienten, die nur von der Anzahl i der Theilfunctionen abhängen, welche die (i-förmige) Function J enthält, welche aber unabhängig sind von der Gruppenzahl r.

Da nun die Function J für jeden Werth von $r < i$ selbst identisch Null wird, indem jedes Glied derselben Null wird, so muss auch die rechte Seite der Gleichung (1) eine Identität sein.

Die Function $f(\mathfrak{a})$ stellt somit für $r < i$ eine identische Relation zwischen den einförmigen Functionen vom Gewicht $1, 2, 3, \ldots, Q$ *dar.* Da dies für jeden Werth von $r < i$ der Fall ist, so liefert die i-förmige symmetrische Function J *auch* $i - 1$ (mit ihr) *gleichwerthige Relationen zwischen den einförmigen Functionen, welche den Gruppenzahlen* $1, 2, 3, \ldots, i - 1$ *entsprechen.*

Weil nun dies unabhängig von der Anzahl der verschiedenen Reihen geschieht, welche die Function J enthält, so erhalten wir auch *Relationen zwischen nur einreihigen* (binären), *zweireihigen* (ternären), *dreireihigen* (quaternären), etc. . . ., *Q-reihigen einförmigen Functionen.*

Die letzteren sind primitive Relationen, aus welchen man durch Vertauschung und Coincidenz von Reihen eine Anzahl weiterer Relationen gleichen Gewichts hervorgehen lassen kann.

b. Da sich jede i-förmige Elementarfunction durch einförmige Functionen darstellen lässt, so liefert dieselbe höchstens noch für $i - 1$ Gruppen eine Relation. Dies ist offenbar eine niedrigste Relation für diese Anzahl von Gruppen; es gilt somit der Satz:

Die niedrigsten für r Gruppen bestehenden Relationen zwischen den einförmigen Functionen besitzen das Gewicht $r + 1$, *und sind enthalten in den* $r + 1$*-förmigen Elementarfunctionen.*

c. Da in der Darstellung $f(\mathfrak{a})$ einer i-förmigen symmetrischen Function, wie wir aus § 5 wissen, Productcombinationen von

$$i, i - 1, i - 2, \ldots, 3, 21,$$

einförmigen Functionen auftreten, so wird dies auch für die Relationen der Fall sein, welche aus der Function

$$J = f(\mathfrak{a})$$

hergeleitet werden können.

Besitzt demnach eine Relation zwischen einförmigen Functionen

$$f(\mathfrak{a}) = 0$$

unter andern Glieder von höchstens i Factoren, so werden wir auch umgekehrt schliessen dürfen, dass dieselbe aus einer i-förmigen symmetrischen Function hervorgegangen ist.

Nun liegt allen i-förmigen symmetrischen Functionen eine bestimmte i-förmige Elementarfunction zu Grunde, welche in der Darstellung

$$a_i = f(\mathfrak{a})$$

ein Glied von höchstens i Factoren je vom Gewicht 1 enthält. Dasselbe wird also auch für die aus derselben hervorgehenden Relation der Fall sein müssen.

Besitzt eine Relation $f(\mathfrak{a}) = 0$ ein Glied von höchstens i-Factoren je vom Gewicht 1, so ist sie aus einer i-förmigen Elementarfunction hervorgegangen und soll demgemäss eine i-förmige *Elementarrelation* heissen. Eine solche ist Relation für $i = 1, i = 2, \ldots, 3, 2, 1$ Gruppen.

Eine i-förmige Elementarrelation ist vom Gewicht i und kann deshalb als primitive höchstens i Reihen aufnehmen.

d. Da eine einförmige Function wieder in eine solche übergeht, wenn man an Stelle eines Elements ein Product von mehreren andern setzt, so ergeben sich auch aus den i-förmigen (primitiven) Elementarrelationen durch eine Transformation von der Form

$$(2) \qquad \begin{cases} x = x'\,y'\,z' \ldots, \\ y = x''\,y''\,z'' \ldots, \\ z = x'''\,y'''\,z''' \ldots, \end{cases}$$

alle möglichen höheren i-förmigen (primitiven) Relationen.

Nun wissen wir aus § 7, dass bei einer derartigen Transformation sämmtliche Coefficienten der Productcombination von einförmigen Functionen erhalten bleiben.

Jede höhere Relation hat deshalb dieselbe Anzahl von Gliedern mit den nämlichen Coefficienten wie die betreffende Elementarrelation, aus welcher sie hervorgegangen ist.

Für die einfacheren Fälle erhalten wir beispielsweise die Elementarrelationen, denen die primitiven vorangestellt sind:

1. für $r = 1$.

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_{12} = 0,$$
$$\mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{a}_{11} = 0.$$

2. für $r = 2$.

$$\begin{aligned} &a_1 a_2 a_3 - a_1 a_{23} - a_2 a_{31} - a_3 a_{12} + 2 a_{123} = 0, \\ &a_1^2 a_2 - 2 a_1 a_{12} - a_2 a_{11} + 2 a_{123} = 0, \\ &a_1^3 - 3 a_1 a_{12} + 2 a_{123} = 0. \end{aligned}$$

3. für $r = 3$.

$$\begin{aligned} &a_1 a_2 a_3 a_4 - \{a_1 a_2 a_{34} + a_1 a_3 a_{24} + a_1 a_4 a_{23} + a_2 a_3 a_{14} + a_2 a_4 a_{13} + a_3 a_4 a_{12}\} \\ &\quad + \{a_{12} a_{34} + a_{13} a_{24} + a_{14} a_{23}\} \\ &\quad + 2\{a_1 a_{234} + a_2 a_{134} + a_3 a_{124} + a_4 a_{123}\} - 6 a_{1234} = 0, \\ &a_1^2 a_2 a_3 - \{a_1^2 a_{23} + 2 a_1 a_2 a_{13} + 2 a_1 a_3 a_{12} + a_2 a_3 a_{11}\} \\ &\quad + \{a_{11} a_{23} + 2 a_{12} a_{13}\} \\ &\quad + 2\{2 a_1 a_{123} + a_2 a_{113} + a_3 a_{112}\} - 6 a_{1123} = 0, \\ &a_1^3 a_2 - 3\{a_1^2 a_{12} + a_1 a_2 a_{11}\} + 3 a_{11} a_{12} + 2\{3 a_1 a_{112} + a_2 a_{111}\} \\ &\quad - 6 a_{1112} = 0, \\ &a_1^2 a_2^2 - \{a_1^2 a_{22} + 4 a_1 a_2 a_{12} + a_2^2 a_{11}\} + \{a_{11} a_{22} + 2 a_{12}^2\} \\ &\quad + 4\{a_1 a_{122} + a_2 a_{211}\} - 6 a_{1122} = 0. \end{aligned}$$

Aus der Elementarrelation für $r = 2$ gehen 6 primitive Relationen vom Gewicht 4 durch die Transformation (2) hervor:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 a_2 a_{34} - a_1 a_{234} - a_2 a_{134} - a_{34} a_{12} + 2 a_{1234}, \\ 0 &= a_1 a_3 a_{24} - a_1 a_{234} - a_3 a_{124} - a_{13} a_{24} + 2 a_{1234}, \\ 0 &= a_1 a_4 a_{23} - a_1 a_{234} - a_4 a_{123} - a_{14} a_{23} + 2 a_{1234}, \\ 0 &= a_2 a_3 a_{14} - a_2 a_{134} - a_3 a_{124} - a_{23} a_{14} + 2 a_{1234}, \\ 0 &= a_2 a_4 a_{13} - a_2 a_{134} - a_4 a_{123} - a_{24} a_{13} + 2 a_{1234}, \\ 0 &= a_3 a_4 a_{12} - a_3 a_{124} - a_4 a_{123} - a_{34} a_{12} + 2 a_{1234}. \end{aligned}$$

Lässt man hierin die Reihe 4 mit der Reihe 1 coincidiren, so folgen unmittelbar die dreireihigen Relationen vom Gewicht 4 (für $r = 3$):

$$\begin{aligned} 0 &= a_1^2 a_{23} - 2 a_1 a_{123} - a_{11} a_{23} + 2 a_{1123}, \\ 0 &= a_1 a_2 a_{13} - a_1 a_{123} - a_2 a_{113} - a_{12} a_{13} + 2 a_{1123}, \\ 0 &= a_1 a_3 a_{12} - a_1 a_{123} - a_3 a_{112} - a_{12} a_{13} + 2 a_{1123}, \\ 0 &= a_2 a_3 a_{11} - a_2 a_{113} - a_3 a_{112} - a_{11} a_{23} + 2 a_{1123}. \end{aligned}$$

Durch weitere Coincidenz der Reihe 3 und 1, bezw. 3 und 2 erhalten wir hieraus die zwei verschiedenen Arten von zweireihigen Relationen:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1^2 a_{12} - 2 a_1 a_{112} - a_{11} a_{12} + 2 a_{1112}, \\ 0 &= a_1 a_2 a_{11} - a_1 a_{112} - a_2 a_{111} - a_{11} a_{12} + 2 a_{1112} \end{aligned}$$

und

$$0 = a_1^2 a_{22} - 2a_1 a_{122} - a_{11} a_{22} + 2a_{1122},$$
$$0 = a_1 a_2 a_{12} - a_1 a_{122} - a_2 a_{112} - a_{12}^2 + 2a_{1122},$$
$$0 = a_2^2 a_{11} - 2a_2 a_{112} - a_{11} a_{22} + 2a_{1123}.$$

Fallen sämmtliche Reihen zusammen, so ergiebt sich die einförmige (binäre) Relation vom Gewicht 4:

$$0 = a_1^2 a_{11} - 2a_1 a_{111} - a_{11}^2 + 2a_{1111}.$$

c. Was die Zahl der unabhängigen Relationen zwischen den einförmigen Functionen für r Gruppen von je n Elementen anlangt, so ist zu bedenken, dass die Anzahl der Elemente derselben rn, also bei endlichem r und n eine endliche ist, während die der einförmigen symmetrischen Functionen unbegrenzt ist. *Es müssen deshalb auch zwischen den letzteren unendlich viele unabhängige Reihen existiren*, welche vom Gewicht $r+1, r+2, r+3, \ldots, r+\infty$ sind.

Concerning Triple Systems.

By

E. Hastings Moore of Chicago.

The theory of triple systems of n elements [which we denote by the symbol Δ_n] and of the allied substitution-groups of n letters has been studied by Mr. Netto in his *Substitutionentheorie*, p. 220—235, 1882, (Cole's English translation, pp. 229—239, 1892), and more recently in his paper, *Zur Theorie der Tripelsysteme*, Mathematische Annalen, v. 42, pp. 143—152, 1893.

Two triple systems of the same number of elements are said to be *equivalent* if a 1 . 1 correspondence between the elements of the two systems can be established in such a way that to the elements of a triple in one system correspond the elements of a triple in the other system. All triple systems equivalent to a particular triple system belong to and constitute a *class* of triple systems.

Mr. Netto finds that n must be of the form $6m+1$ or $6m+3$, say of the form t. He raises two questions:

(a) *Do triple systems Δ_n exist for every positive integer n of the form t?*

(b) *For the same t do all the triple systems Δ_t belong to one class, or are there different classes?*

Towards an answer of the question (a) Mr. Netto in the paper last cited gives four constructions, two conditional $(a\alpha)$ $(a\beta)$ and two absolute $(a\gamma)$ $(a\delta)$: viz., the construction

$(a\alpha)$ from a given Δ_t of a Δ_{2t+1};

$(a\beta)$ from given Δ_{t_1}, Δ_{t_2} of a $\Delta_{t_1 t_2}$;

$(a\gamma)$ of a Δ_p where p is a prime of the form $6m+1$;

$(a\delta)$ of a Δ_{3q} where q is a prime of the form $6m+5$.

These constructions, with the initial Δ_3 immediately given, enable him to construct a Δ_t for every $t < 100$, with the exception of $t = 25$, $t = 85$. In fact, as he might have stated more generally,

these constructions together with a further construction*) $(a\varepsilon)$ of a Δ_t where t is the product of two (different or equal) primes of the form $6m + 5$ would suffice for the construction of a Δ_t for every t without exception.

As to the question (b) Mr. Netto states that for each of the cases $t = 3, 7, 9$ and apparently 13 there exists but one class**) of triple systems Δ_t.

In this paper by means of a conditional construction (A) of considerable generality (a threefold generalization of $(a\alpha)$) and using the Δ_3, Δ_9, Δ_{13} as given, I show how *to construct at least two distinct sorts of classes of triple systems of t elements for every t of the form* $6m + 1$ *or* $6m + 3$ *greater than* $t = 13$. The word *sort* is used as a generic designation; two distinct classes belong to different sorts; a sort may contain many classes.

The two questions (a) (b) may now be formulated:

(c) *For a given t what is the number* $\varkappa_t$ *of classes of triple systems* Δ_t*?*

We know now

$$\varkappa_3 = 1, \quad \varkappa_7 = 1, \quad \varkappa_9 = 1, \quad \varkappa_{13} = 1 \quad \text{probably}^{***}),$$
$$\varkappa_t \geqq 2 \quad \text{for} \quad t > 13.$$

In a later paper I shall consider certain triple systems whose groups are interesting. The groups are of course at most doubly transitive. Netto's Δ_p and Δ_{3^q} have transitive groups which contain cyclic substitutions of all the elements. The Δ_{13} has a simply transitive composite group (Annalen, pp. 148—151). And if there is in fact but one class of Δ_{13}, then we do not for every t have triple systems Δ_t with *doubly* transitive groups. Mr. Netto studied the Δ_{3^x} derived from the initial Δ_3 by the $(a\beta)$ process (Substitutionentheorie, pp. 224—234); the groups are doubly transitive and composite. Perhaps the most interesting are the Δ_{2^x-1} derived from the initial Δ_3 by the $(a\alpha)$ process; the groups are simple, doubly transitive, with cyclic substitutions of all the $(2^x - 1)$ elements. [The case $x = 2$ is an exception; the Δ_3 has the symmetric group of degree 3 which is doubly transitive but composite.]

---

*) If such could be given.

**) The Δ_{19} constructed directly by $(a\gamma)$ and the Δ_{19} constructed from a Δ_9 by $(a\alpha)$ are not equivalent.

***) Netto, Annalen, vol. 42, p. 152.

§ 1.

Definitions, notations and introductory theorems.

A triple system of t elements is an arrangement of the t elements into triples*) of elements in such a way that any pair*) of elements enters into one and only one triple of the system. There are in all $\frac{t(t-1)}{6}$ triples. t must have the form $6m+1$ or $6m+3$. We denote hereafter by t a number of the form $6m+1$ or $6m+3$, and by Δ_t a triple system of t elements, and agree for convenience to admit also $t=1$, denoting by Δ_1 a single element. If certain of the triples of a Δ_t determine a triple system of t_1 elements Δ_{t_1} the Δ_t is said to contain the Δ_{t_1}; unless $t=t_1$, $t \geqq 2t_1+1$. Every Δ_t contains t Δ_1 and $\frac{t(t-1)}{6}$ Δ_3.

It is desirable to introduce two new concepts. [First.] *A triple system, repetitions allowed, of s elements*, symbolized Δ_s, is an arrangement of the s elements into triples of elements in such a way that every pair of elements enters into one and only one triple, repetitions of elements being allowed in the pairs and triples. s may be any positive integer (see § 2). A Δ_t becomes a Δ_t by adding to the triples of the Δ_t the t triples obtained by taking each element three times. [Second.] *A sub-triple system***) *of t sets of s elements each*, symbolized ${}_t\nabla_s$, is in the first place an arrangement of the t sets into a triple system Δ_t, and then an arrangement of the elements into triples in such a way that any pair of elements not belonging to the same set belong to one and only one triple, the third element of which belongs to the third set of the triple of sets determined in the Δ_t by the two sets to which the first two elements belong. A ${}_t\nabla_s$ contains $\frac{t(t-1)}{6}$ ${}_3\nabla_s$. If the s elements of each of the t sets of the ${}_t\nabla_s$ form a Δ_s or a Δ_s, then this ${}_t\nabla_s$ is contained in a Δ_{ts} or a Δ_{ts}, respectively.

---

*) Repetitions not allowed.

**) For the purposes of this paper it is not necessary to study the *more general „sub-triple system“* of s_1 sets of s_2 elements each, in which any two elements of different sets belong to one and only one triple of which the third element belongs to still a different set (but in which the set of the third element is not necessarily determined merely by the sets of the first two elements). It is evident (1) that any triple system Δ_t of t elements decomposes with respect to one of its elements into the $\frac{t-1}{2}$ triples containing that element and a general sub-triple system in the $\frac{t-1}{2}$ pairs of elements associated with it by those triples, and (2) that, conversely, a triple-system of $2s+1$ elements can be made from a general sub-triple system of s pairs of elements.

[If $s_1=3$, this is really identical with the sub-triple system ${}_3\nabla_s$ of the text.]

§ 2.

Construction of a triple-system, repetitions allowed, in s elements Δ_s.

This construction may in general be made in many ways. A Δ_s is immediately derived from every Δ_t. I give here a table of all possible constructions for $s = 1, 2, 3, 4$, and then give a particular construction applicable for every value of s.

$\Delta_{s=1}$. (1) aaa.

$\Delta_{s=2}$. (1) aaa, abb.

$\Delta_{s=3}$. (1) aaa, abc, bbb, ccc.
(2) aab, acc, bbc.

$\Delta_{s=4}$. (1) aaa, abb, acc, add, bcd.
(2) aaa, abb, acd, bcc, bdd.

The case $s = 3$ illustrates the fact that in a Δ_s the number of triples depends not only on s but also on the internal structure of the Δ_s.

Δ_s. *A particular**) *construction* applicable for every value of s. Arrange the s elements cyclically thus, $x_0 x_1 x_2 \ldots x_{s-1}$, and let x_i, x_j, x_k be a triple whenever $i+j+k \equiv 0 \pmod{s}$. Thus x_i, x_j (where i and j are either equal or unequal) belong to one and only one triple.

§ 3.

Construction of a sub-triple system ${}_3\nabla_s$.

Take three sets (x) (y) (z) of s elements each and establish arbitrarily among the elements of the different sets a 1 . 1 correspondence by the use of the subscript-notation,

$$x_i \sim y_i \sim z_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots s-1).$$

Construct in any way (§ 2) in the s elements (x) a Δ_s; let $x_i x_j x_k$ be a triple. Then the system of triples $x_i y_j z_k$ will be a ${}_3\nabla_s$.

§ 4.

Construction of a sub-triple system ${}_3\nabla_{s_1 s_2}$ which shall contain $s_1^2\, {}_3\nabla_{s_2}$.

Take three sets of $s_1 s_2$ elements each. Separate the elements of each set into s_1 sub-sets of s_2 elements each. Form (in any way; § 3)

---

*) This construction gives for

$s = 3$ $\Delta_{s=3}$ (1), $(a, b, c) = (x_0, x_1, x_2)$,

and for $s = 4$ $\Delta_{s=4}$ (2), $(a, b, c, d) = (x_0, x_2, x_1, x_3)$.

of the three sets of s_1 sub-sets a ${}_3\nabla_{s_1}$; this contains s_1^2 triples of sub-sets. Every such triple of sub-sets may be looked at as three sets of s_2 elements each and so we form (in any way; § 3) to a ${}_3\nabla_{s_2}$. We have then in fact constructed a ${}_3\nabla_{s_1 s_2}$ which contains s_1^2 ${}_3\nabla_{s_2}$.

§ 5.

Construction from a given triple system Δ_t of a sub-triple system ${}_t\nabla_s$.

Take t sets of s elements each. Form a Δ_t in the t sets analogous to the given Δ_t. Construct for each triple of sets of s elements (in any way; § 3) a ${}_3\nabla_s$. We have then formed a sub-triple system ${}_t\nabla_s$.

If we use the *particular* method of §§ 3, 2 in the construction of the ${}_3\nabla_s$ from a triple of sets in the Δ_t, we may distribute the s subscripts $0, 1, 2 \ldots s-1$ over the s elements of a set *arbitrarily for each triple* in which the set enters, or we may allow *one arbitrary* distribution for the elements of each set to suffice. The latter gives the following

Particular construction.

Let the given Δ_t be given in the t elements u_f $(f = 1, 2, \ldots t)$; let $u_\alpha u_\beta u_\gamma$ be any triple.

As elements for our ${}_t\nabla_s$ take

$$x_{fg} \begin{pmatrix} f = 1, 2 & \ldots t \\ g = 0, 1, 2 \ldots s-1 \end{pmatrix},$$

and at once construct the triples $x_{\alpha i} x_{\beta j} x_{\gamma k}$ where $i+j+k \equiv 0 \pmod{s}$. (α, β, γ are different; i, j, k are not necessarily different). Clearly this ${}_t\nabla_s$ contains a Δ_t in the t elements

$$x_{f0} \quad (f = 1, 2 \ldots t).$$

If $s = s_1 s_2$, we may, using § 4 for the various ${}_3\nabla_s$, construct the ${}_t\nabla_{s_1 s_2}$ so as to contain $\frac{t(t-1)}{6} \cdot s_1^2$ ${}_3\nabla_{s_2}$.

§ 6.

Construction of a triple system $\Delta_{t_1 t_2}$ from given triple systems Δ_{t_1}, Δ_{t_2}.

Take t_1 sets of t_2 elements each. Construct in each set of t_2 elements (in each set in any way; one such way is possible by copying the given Δ_{t_2}) a Δ_{t_2}. Construct in the t_1 sets of t_2 elements (in any way; § 5) a ${}_{t_1}\nabla_{t_2}$. Then we have in fact made a $\Delta_{t_1 t_2}$. The $\Delta_{t_1 t_2}$ contains t_1 Δ_{t_2}.

Netto's particular construction.

In each set of t_2 elements construct a copy of the given Δ_{t_2}, and in this way set the elements of the t_1 different sets in 1.1 correspondence.

Containing each such Δ_{t_2} make a Δ_{t_2} (§ 1). Make use of these correspondences and of these Δ_{t_2} in the construction of the ${}_{t_1}\nabla_{t_2}$ (§§ 5, 3). This is the equivalent of Netto's construction $(a\beta)$ of a $\Delta_{t_1 t_2}$ from given Δ_{t_1}, Δ_{t_2} (Substitutionentheorie, § 193; Annalen 42, p. 144). This $\Delta_{t_1 t_2}$ contains t_1 Δ_{t_2} and t_2 Δ_{t_1}.

§ 7.

Construction (A) of a triple system Δ_t, where $t = t_3 + t_1(t_2 - t_3)$, and $t_1 \geqq 3$, $t_2 \geqq 2t_3 + 1$, $t_3 \geqq 1$, from given triple-systems Δ_{t_1}, Δ_{t_2}, Δ_{t_3} of which the Δ_{t_2} contains the Δ_{t_3}.

Take t elements and separate them into t_3 elements (α) and t_1 sets of $t_2 - t_3$ elements each (β_i) $(i = 1, 2 \ldots t_1)$. Construct in the (α) elements a Δ_{t_3} (α) and in the (α) (β_i) elements a Δ_{t_3} (α) (β_i) which contains this Δ_{t_3} (α), $(i = 1, 2 \ldots t_1)$. (These constructions are possible, in accordance with the types of triple systems furnished by the hypothesis.) Construct (in any way, § 5; or, to fix the ideas, by the particular*) method, § 5) in the t_1 sets of $t_2 - t_3$ elements (β) a sub-triple system ${}_{t_1}\nabla_{t_2 - t_3}$ (β). We have then in fact constructed the Δ_t required. The pairs of elements determine uniquely a third element, as follows:

α' α'', α''' in the Δ_{t_3} (α),

α β_i', β_i'' in the Δ_{t_2} (α) (β_i),

β_i' β_i''', α or β_i^{IV} in the Δ_{t_2} (α) (β_i),

β_i β_j, β_k in the ${}_{t_1}\nabla_{t_2 - t_3}$ (β).

[If $t_3 = 0$, the preceding construction is exactly that of § 6 for $\Delta_{t_1 t_2}$ from given Δ_{t_1}, Δ_{t_2}.] The explicit hypothesis, that we are given a Δ_{t_2} which contains a Δ_{t_3}, is not needed in the cases $t_3 = 1$, $t_3 = 3$. The Δ_t above constructed contains (at least) one Δ_{t_3} and t_1 Δ_{t_2}, while the *particular* Δ_t contains also one Δ_{t_1}.

For the case $[t_3 = 1,\ t_2 = 3,\ t = 1 + 2t_1]$ this "particular" construction (that is, the construction using the "particular" method of § 5) is Netto's construction $(a\alpha)$ of a $\Delta_{t=1+2t_1}$ from a given Δ_{t_1} (Annalen 42, p. 143).

---

*) For illustration of this particular construction (A) and the general construction (A) see §§ 10, 11, 12 and 13 below.

§ 8.

Concerning ${}_3\nabla_2$ and Δ_7.

There is but a single*) class of ${}_3\nabla_2$ of three pairs of elements

$${}_3\nabla_2 \begin{Bmatrix} \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \\ \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' \end{Bmatrix}; \quad \beta_1'\beta_2'\beta_3',\ \beta_1'\beta_2''\beta_3'',\ \beta_1''\beta_2'\beta_3'',\ \beta_1''\beta_2''\beta_3'.$$

This is also the only "*general*" sub-triple system (see foot-note, § 1) of three pairs of elements. The four triples are conjugate („gleichberechtigt").

There is but a single class of Δ_7, $(7 = 1 + 3 \cdot 2)$

$$\Delta_7 \begin{Bmatrix} \alpha & & \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \\ \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' \end{Bmatrix}; \quad \begin{matrix} \alpha\beta_1'\beta_1'', \quad \alpha\beta_2'\beta_2'', \quad \alpha\beta_3'\beta_3'', \\ \beta_1'\beta_2'\beta_3',\ \beta_1'\beta_2''\beta_3'',\ \beta_1''\beta_2'\beta_3'',\ \beta_1''\beta_2''\beta_3'. \end{matrix}$$

The seven elements of the Δ_7 are conjugate, the seven triples likewise.

§ 9.

Concerning the ${}_3\nabla_2$ contained in a ${}_3\nabla_s$ constructed by the particular method of §§ 3, 2.

Let $(x_f)\ (y_g)\ (z_h)$ be the three sets of s elements each,

$$(f, g, h = 0, 1, 2 \ldots s-1),$$

and suppose we have in the ${}_3\nabla_s$ a

$${}_3\nabla_2 \begin{Bmatrix} x_{f_1} & y_{g_1} & z_{h_1} \\ x_{f_2} & y_{g^2} & z_{h_2} \end{Bmatrix}.$$

We have then (§§ 3, 2, 8)

$$\begin{aligned} f_1 + g_1 + h_1 &\equiv 0, \\ f_1 + g_2 + h_2 &\equiv 0, \\ f_2 + g_1 + h_2 &\equiv 0, \qquad (\text{mod. } s), \\ f_2 + g_2 + h_1 &\equiv 0, \\ f_2 + g_2 + h_2 &\not\equiv 0, \end{aligned}$$

---

*) The following four ${}_3\nabla_2$ are identical,

$${}_3\nabla_2 \begin{Bmatrix} \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \\ \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' \end{Bmatrix},\ {}_3\nabla_2 \begin{Bmatrix} \beta_1' & \beta_2'' & \beta_3'' \\ \beta_1'' & \beta_2' & \beta_3' \end{Bmatrix},\ {}_3\nabla_2 \begin{Bmatrix} \beta_1'' & \beta_2' & \beta_3'' \\ \beta_1' & \beta_2'' & \beta_3' \end{Bmatrix},\ {}_3\nabla_2 \begin{Bmatrix} \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3'' \end{Bmatrix};$$

there are likewise four identical with

$${}_3\nabla_2 \begin{Bmatrix} \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \end{Bmatrix}.$$

These two ${}_3\nabla_2$ in three pairs of elements $\beta_1'\beta_1''$, $\beta_2'\beta_2''$, $\beta_3'\beta_3''$, are the only ones possible, and they are equivalent, an interchange of the upper strokes (', '') changing one ${}_3\nabla_2$ into the other.

and at once deduce from the first four congruences

$$2(f_2 + g_2 + h_2) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } s).$$

These congruences are incompatible, if s is odd; whence

A ${}_3\Delta_{s=2s'+1}$, *with* s *odd, constructed by the particular method of* §§ 3, 2, *contains no* ${}_3\nabla_2$.

But if s is even, $s = 2s'$, we have at once

$$f_2 + g_2 + h_2 \equiv s' \qquad (\text{mod. } 2s'),$$

whence easily

$$f_2 \equiv f_1 + s', \quad g_2 \equiv g_1 + s', \quad h_2 \equiv h_1 + s' \qquad (\text{mod. } 2s').$$

In a ${}_3\nabla_{s=2s'}$, *with* s *even, constructed by the particular method of* §§ 3, 2, *any triple* $x_{f_1} y_{g_1} z_{h_1}$ *belongs to one* ${}_3\nabla_2$, *of which the other elements are* $x_{f_1+s'}$, $y_{g_1+s'}$ *and* $z_{h_1+s'}$. *There are in all* s'^2 *such* ${}_3\nabla_2$. *There are no other* ${}_3\nabla_2$.

It is to be observed that the elements of each set are paired $[(x_{f_1}, x_{f_1+s'})$, $(y_{g_1}, y_{g_1+s'})$ and $(z_{h_1}, z_{h_1+s'})]$ independently of the elements of the other sets, and that the ${}_3\nabla_{2s'}$ is in effect first a ${}_3\nabla_{s'}$ on the three sets of s' pairs and then a (particular) ${}_3\nabla_2$ on the elements of the triples of pairs.

A ${}_t\nabla_s$ of t sets of s elements constructed by the particular method of § 5 may contain ${}_3\nabla_2$ of two kinds: *first*, a ${}_3\nabla_2$ of three pairs of elements, the two elements of each pair belonging to the same set of s elements, these three sets forming a triple in the Δ_t of t sets; *second*, a ${}_3\nabla_2$ whose six elements belong to six different sets which form a ${}_3\nabla_2$ of sets in the Δ_t of t sets. The ${}_t\nabla_s$ can contain ${}_3\nabla_2$ of the *first* kind only when s is even $s = 2s'$, and then the ${}_t\nabla_{2s'}$ does contain in all $\frac{t(t-1)}{6} \cdot s'^2$ such ${}_3\nabla_2$.

§ 10.

Sorting of the Δ_7 contained in a Δ_t constructed from specified data by the particular method (A).

We recall the four kinds of triples contained in the Δ_t,

$$(\alpha' \alpha'' \alpha''', \ \alpha \beta_i' \beta_i'', \ \beta_i' \beta_i''' \beta_i^{IV}, \ \beta_i \beta_j \beta_k),$$

and that a Δ_7 is determined uniquely by any two of its triples which must have a common element. The Δ_7 contained in the Δ_t may be sorted*) as follows into six sorts; it is not to be understood that Δ_7 of these sorts are always found in the Δ_t:

*) This sorting of the Δ_7 holds also for the Δ_t constructed by the *general* method (A) of § 7.

[1°] The Δ_7 is contained in the Δ_{t_1} (α).

[2°] The Δ_7 has three (α) elements forming a triple and four (β_i) elements and is contained in the Δ_{t_2} (α) (β_i).

[3°] The Δ_7 has one (α) element and six (β_i) elements and is contained in the Δ_{t_3} (α) (β_i).

[4°] The Δ_7 has seven (β_i) elements and is contained in the Δ_{t_4} (α) (β_i).

[5°] The Δ_7 has one (α) element and three pairs of (β) elements belonging to three associated sets (of a triple in the Δ_{t_1} of the t_1 sets (β_i)) and consists of three triples containing the (α) element and the four triples of a ${}_3\nabla_2$ of the ${}_{t_1}\nabla_{t_2-t_3}$ (β) contained in the Δ_t. This ${}_3\nabla_2$ of the ${}_{t_1}\nabla_{t_2-t_3}$ (β) is of the first kind mentioned in § 9. (t_2 and t_3 are both odd, and hence $t_2 - t_3$ is even.)

[6°] The Δ_7 has seven (β) elements belonging to seven different sets which form a Δ_7 of sets in the Δ_{t_1} of the t_1 sets. This Δ_7 of seven (β) elements is contained in the ${}_{t_1}\nabla_{t_2-t_3}$ (β).

The particular construction (A) of § 7 for the Δ_t from the specified data was determinate, except that in the particular construction of § 5 for the ${}_{t_1}\nabla_{t_2-t_3}(\beta)$ the $s = t_2 - t_3$ subscripts were distributed *arbitrarily* over the $t_2 - t_3$ elements of each (β_i) set. It is clear that this arbitrariness may affect the number of Δ_7 of sort [5°] contained in the Δ_t, but that it has nothing to do with the numbers of the Δ_7 of the other sorts.

§ 11.

Sorting of the Δ_t constructed from specified data by the particular method (A).

We sort the Δ_t in question according to the number of Δ_7 contained in them, that is, (§ 10), according to the number of Δ_7 of sort [5°] contained in them, and denote this latter number by σ. Two Δ_t of the same sort $\sigma_1 = \sigma_2$ are not necessarily equivalent, but two equivalent Δ_t are of the same sort.

In the Δ_t every Δ_7 of sort [5°] contains one (α) element and one ${}_3\nabla_2$ of the first kind contained in the ${}_{t_1}\nabla_{t_2-t_3}$ (β), while every such ${}_3\nabla_2$ lies at most in one such Δ_7. There are in all $\frac{t_1(t_1-1)}{6} \cdot \left(\frac{t_2-t_3}{2}\right)^2$ such ${}_3\nabla_2$ (§ 9). This then is the maximum value of σ.

Denote by (x) (y) (z) any three (β_i) sets which form a triple in the Δ_{t_1} of t_1 (β_i) sets, and by x_f, y_g, z_h $(f, g, h = 0, 1, 2 \ldots t_2 - t_3 - 1)$ the elements of those sets. Then one of these ${}_3\nabla_2$ is the

$$ {}_3\nabla_2 \quad \begin{Bmatrix} x_f & y_g & z_h \\ x_{f+\frac{t_2-t_3}{2}} & y_{g+\frac{t_2-t_3}{2}} & z_{h+\frac{t_2-t_3}{2}} \end{Bmatrix}. $$

$$ f+g+h \equiv 0 \pmod{t_2-t_3} $$

This ${}_3\nabla_2$ belongs to a Δ_7 of sort $[5^0]$ if and only if the three pairs of (β) elements in the $\Delta_{t_1}(\alpha)(x)$, $\Delta_{t_1}(\alpha)(y)$ and $\Delta_{t_1}(\alpha)(z)$ respectively belong to triples having a common third element, of necessity some (α) element α^0.

In the construction of a Δ_t from given Δ_{t_1}, Δ_{t_2}, Δ_{t_3} of which the Δ_{t_2} contains the Δ_{t_3} (where $t=t_3+t_1(t_2-t_3)$ and $t_1\geqq 3$, $t_2\geqq 2t_3+1$, $t_3\geqq 1$) the particular method (A) *of* § 7, *by the proper determination of the ${}_{t_1}\nabla_{t_2-t_3}(\beta)$, enables us to construct at least two distinct sorts of Δ_t which contain Δ_7 of sort* $[5^0]$, *in all cases except the cases*

$$ [t_3=1,\ t_2=3,\ t=1+2t_1], $$

in which there is but one sort of Δ_t. This will be seen easily after we consider the following combinations of cases.

Cases $[t_3=1,\ t_2=3,\ t=1+2t_1]$. There are but two elements in each (β_i) set, which are for every i in a triple with the single (α) element α^0. Thus in these cases there is but one sort of Δ_t, for which σ has its maximum value, $\sigma=\frac{t_1(t_1-1)}{6}\cdot\left(\frac{t_2-t_3}{2}\right)^2=\frac{t_1(t_1-1)}{6}$. But further it is at once clear that any two Δ_t, $t=1+2t_1$, derived from the same Δ_{t_1} by the particular method (A) of § 7 are equivalent Δ_t; in these cases there is but one *class* of Δ_t.

For the *general cases* also the sort of Δ_t with maximum σ exists, although it is not the only sort existing. To construct such a Δ_t we must choose arbitrarily an (α) element α^0, pair the elements of every (β_i) set (x) by the triples containing α^0, and distribute the subscripts over the t_2-t_3 elements (x) arbitrarily only so as always to make the pairs $x_f\,x_{f+\frac{t_2-t_3}{2}}$ coincide with the pairs determined by α^0. Every Δ_t in question contains a Δ_{t_1}; the one just constructed contains a Δ_{1+2t_1} containing this Δ_{t_1}.

For the cases $[t_3=1,\ t_2>3,\ t=1+t_1(t_2-1)]$ the sort of Δ_t with minimum σ, $\sigma=0$, exists. There is but a single (α) element α^0; it is possible to distribute the $t_2-t_3=t_2-1>2$ subscripts over the elements of the several (β_i) sets (x) so that the pairs $x_f\,x_{f+\frac{t_2-t_3}{2}}$ shall be entirely distinct from the pairs of elements (x) determined by the triples in the $\Delta_{t_2}(\alpha)(x)$ containing the element α^0. For a Δ_t so constructed, $\sigma=0$.

For the cases $[t_3 \geqq t_1 > 1,\ t = t_3 + t_1(t_2 - t_3)]$ the sort of Δ_t with minimum σ, $\sigma = 0$, exists. There are here, since $t_3 \geqq t_1$, at least as many (α) elements as (β_i) sets. For each (β_i) set select a particular (α) element α^i, different elements corresponding to different sets. Distribute the subscripts over the $t_2 - t_3$ elements x of each (β_i) set so that the pairs $x_f x_{f+\frac{t_2-t_3}{2}}$ shall always coincide with the pairs determined by the triples in the Δ_{t_3} (α) (β_i) containing the element α^i corresponding to the (β_i) set. Then in this Δ_t no ${}_3\nabla_2$ of the ${}_{t_1}\nabla_{t_2-t_3}$ can belong to a Δ_7 of sort $[5^0]$; thus $\sigma = 0$.

More generally, for the cases $[t_3 \geqq 3,\ t = t_3 + t_1(t_2 - t_3)]$ sorts of Δ_t exist with σ less than the maximum. For in the Δ_{t_1} of the t_1 (β_i) sets select any triple of sets (x) (y) (z), and let them correspond with three (α) elements $\alpha^x\ \alpha^y\ \alpha^z$ $(t_3 \geqq 3)$. Distribute the subscripts in the $t_1 - 3$ other (β_i) sets at random, but in the set (x) let the pairs $x_f x_{f+\frac{t_2-t_3}{2}}$ coincide with the pairs determined in the Δ_{t_3} (α) (x) by the triples containig α^x, and likewise for the sets (y), (z). Then the $\left(\frac{t_2-t_3}{2}\right)^3$ ${}_3\nabla_2$ of the ${}_{t_1}\nabla_{t_2-t_3}$ which lie in the ${}_3\nabla_{t_2-t_3}$ of the three sets (x) (y) (z) do not lead to Δ_7 of the Δ_t. Whence indeed for such Δ_t σ has less than its maximum value.

By a suitable combination of the devices now illustrated for the determination of the ${}_{t_1}\nabla_{t_2-t_3}$, one easily convinces himself of the truth of the italicized statement made above.

§ 12.

Sorting of the Δ_t $(t = 1 + 2t_1)$ constructed from a given Δ_{t_1} by the general method (A) $(t_2 = 3,\ t_3 = 1)$.

It is convenient to give for this case $(t_2 = 3,\ t_3 = 1)$ the general construction of § 7 in a new notation.

Given a Δ_{t_1} in the t_1 elements b_i $(i = 1, 2 \ldots t_1)$. Take a single element α and, corresponding to the t_1 elements b_i, t_1 pairs of elements $\beta_i' \beta_i''$. Form in the t_1 pairs (β_i) a Δ_{t_1} corresponding to the Δ_{t_1} in the t_1 elements b_i. In every triple of pairs, for instance, $(\beta_\varkappa' \beta_\varkappa'')$, $(\beta_\lambda' \beta_\lambda'')$, $(\beta_\mu' \beta_\mu'')$, construkt a ${}_3\nabla_2$ in *either* of the two possible ways (see § 8, foot-note),

$${}_3\nabla_2 \begin{Bmatrix} \beta_\varkappa' & \beta_\lambda' & \beta_\mu' \\ \beta_\varkappa'' & \beta_\lambda'' & \beta_\mu'' \end{Bmatrix}; \qquad {}_3\nabla_2 \begin{Bmatrix} \beta_\varkappa'' & \beta_\lambda'' & \beta_\mu'' \\ \beta_\varkappa' & \beta_\lambda' & \beta_\mu' \end{Bmatrix}.$$

The ${}_{t_1}\nabla_2$ so constructed and the t_1 triples $\alpha \beta_i' \beta_i''$ $(i = 1, 2 \ldots t_1)$ constitute the Δ_t $(t = 1 + 2t_1)$ required.

In this general construction the only arbitrariness lies in the choice, for every one of the $\frac{t_1(t_1-1)}{6}$ triples of pairs, of one of the two possible ${}_3\nabla_2$. If we construct all these 2^τ Δ_t, where $\tau = \frac{t_1(t_1-1)}{6}$, they are certainly not all essentially distinct; for, if in any Δ_t we interchange the upper indices of all the β symbols we get a Δ_t equivalent to but not identical with the original Δ_t; that is to say, the 2^τ Δ_t form $2^{\tau-1}$ pairs of equivalent Δ_t. [For $t=7$, $t_1=3$, $\tau=1$; there is but a single Δ_7]. We wish merely to show that

In the construction of a Δ_t from a given Δ_{t_1} ($t=1+2t_1\geqq 15$) the general method of § 7 enables us to construct at least two distinct sorts of Δ_t which contain Δ_7 of sort [5⁰].

We notice that any Δ_{u_1} contained in the Δ_{t_1} (b) leads to a Δ_{1+2u_1} contained in the $\Delta_{t=1+2t_1}$, however it be constructed; this Δ_{1+2u_1} contains the element α. Conversely, if any particular Δ_t contains a Δ_u which contains the element α, then the Δ_{t_1} (b) contains a $\Delta_{\frac{u-1}{2}}$, and every Δ_t contains a corresponding Δ_u containing α. In particular, every Δ_t contains t_1 Δ_3 and $\frac{t_1(t_1-1)}{6}$ Δ_7 which contain α.

Indicate by $\Delta_u{}^*$ a Δ_u contained in the Δ_t and not containing the element α. A $\Delta_u{}^*$ contains u elements (β), one of each of u pairs. The presence of a $\Delta_u{}^*$ shows presence of a Δ_u in the Δ_{t_1} (b), but not conversely. We may then sort the Δ_t, given us by the *general* construction (A) of § 7, according to the number of $\Delta_u{}^*$ which they contain. Two equivalent Δ_t belong to the same sort.

We study the sorting of the Δ_t with respect to the number $\bar{\sigma}$ of $\Delta_{t_1}{}^*$ contained. Such a $\Delta_{t_1}{}^*$ contains one element of each of the t_1 pairs $\beta_i'\beta_i''$.

Netto's $\Delta_{t=1+2t_1}$ contains a $\Delta_{t_1}{}^*$. It is constructed by the *particular* method (A), say by choosing the ${}_3\nabla_2 \begin{Bmatrix} \beta_\varkappa' & \beta_\lambda' & \beta_\mu' \\ \beta_\varkappa'' & \beta_\lambda'' & \beta_\mu'' \end{Bmatrix}$ for every triple of pairs; then in the elements β_i' ($i=1,2,\ldots t_1$) there is a $\Delta_{t_1}{}^*$. Every $\Delta_{t=1+2t_1}$ containing one $\Delta_{t_1}{}^*$ is equivalent to Netto's $\Delta_{t=1+2t_1}$. Thus of our $\Delta_{t=1+2t_1}$ *there is but a single sort with* $\bar{\sigma}>0$, and this sort contains but a single class of triple systems, Netto's. [If the given Δ_{t_1} (b)contains $\bar{\sigma}_1$ $\Delta_{\frac{t_1-1}{2}}$, then our $\bar{\sigma}=\bar{\sigma}_1+1$].

The sort with $\bar{\sigma}=0$ also exists. I prove this by constructing a triple system $\bar{\Delta}_t$ of this sort. For the ${}_3\nabla_2$ of this $\bar{\Delta}_{t_1}$ I choose the ${}_3\nabla_2 \begin{Bmatrix} \beta_\varkappa' & \beta_\lambda' & \beta_\mu' \\ \beta_\varkappa'' & \beta_\lambda'' & \beta_\mu'' \end{Bmatrix}$ for every triple of pairs except one, say (1 2 3),

for which I choose the other ${}_3\nabla_2 \begin{Bmatrix} \beta_1'' & \beta_2'' & \beta_3'' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \end{Bmatrix}$. Then the triples of $\overline{\Delta}_t$ differ from those of Netto's Δ_t only in the triples of elements with the subscripts 1, 2, 3. It is convenient to replace β_i $(i = 1, 2, 3)$ by x_i and β_i $(i = 4, 5 \ldots t_1)$ by y_i. The triples of $\overline{\Delta}_t$ are then of the forms $x_1''x_2''x_3''$, $x_{i_1}''x_{i_2}'x_{i_3}'$ $(i_1, i_2, i_3 = 1, 2, 3$ in any order) $x_i'y_j'y_k'$, $x_i'y_j''y_k''$, $x_i''y_j'y_k''$, $y_i'y_j'y_i'$, $y_i'y_j''y_i''$.

This $\overline{\Delta}_t$ contains no $\Delta_{t_1}^*$; $\overline{\sigma} = 0$. For if it were to contain a $\Delta_{t_1}^*$, this $\Delta_{t_1}^*$ would contain one element of each of the t_1 pairs (x_i) (y_j) $(i = 1, 2, 3;\ j = 4, 5 \ldots t_1)$, and by proper adjustment of the subscript notation such a $\Delta_{t_1}^*$ would have one or other of the forms,

$\Delta_{t_1}^*$(I) in the elements $x_1''x_2''x_3''$; $y_4'y_5' \ldots y_{\varrho+3}'$; $y_{\varrho+4}''y_{\varrho+5}'' \ldots y_{t_1}''$;

$\Delta_{t_1}^*$(II) in the elements $x_1''x_2'x_3'$; $y_4'y_5' \ldots y_{\varrho+3}'$; $y_{\varrho+4}''y_{\varrho+5}'' \ldots y_{t_1}''$;

where in each case ϱ is any integer from 1 to $t_1 - 3$.

$\Delta_{t_1}^*$(I), $3(x_i'') + \varrho(y_j') + \sigma(y_k'') = t_1$ elements; $\varrho + \sigma = t_1 - 3$.

x_1'' is connected with the $\varrho(y_j')$ by ϱ triples whose third elements must be $\varrho(y_k'')$, and vice versa; thus $\varrho = \sigma$; y_{t_1}'' is connected with the other $\sigma - 1 = \varrho - 1$ (y_j'') and the $3(x_i'')$ by $\varrho + 2$ triples whose third elements must be $\varrho + 2$ (y_j'); but there are only $\varrho(y_j')$ elements. *Thus* $\overline{\Delta}_t$ *contains no* $\Delta_{t_1}^*$ (I).

$\Delta_{t_1}^*$(II); $1(x_1'') + 2(x_2', x_3') + \varrho(y_j') + \sigma(y_k'') = t_1$ elements; $\varrho + \sigma = t_1 - 3$.

x_1'' is connected with the $\varrho(y_j')$ by ϱ triples whose third elements must be $\varrho(y_k'')$, and vice versa; thus $\varrho = \sigma$; y_{t_1}'' is connected with the $\varrho(y_j')$ and the $2(x_2', x_3')$ by $\varrho + 2$ triples whose third elements must be $\varrho + 2$ elements with double accents ($''$); but there are only ϱ such elements available, viz., the other $\varrho - 1(y_k'')$ and the $1(x_1'')$. *Thus* $\overline{\Delta}_t$ *contains no* $\Delta_{t_1}^*$ (II).

§ 13.

Conditional construction B.

If we are given a Δ_{t_1} *and a* Δ_{t_2} *which contains a* Δ_{t_3},

$$(t_1 \geqq 3,\ t_3 \geqq 1,\ t_2 \geqq 2t_3 + 1),$$

we can construct at least two distinct sorts of Δ_t $\left(t = t_3 + t_1(t_2 - t_3) > 13\right)$ *which contain* Δ_7 *of sort* [5⁰].

This we have seen for the cases $[t_3 = 1,\ t_2 = 3,\ t = 1 + 2t_1 > 13]$

by use of the general construction (A) in § 12, and for all other cases by use of the particular construction (A) in § 11.

Since we have Δ_1, Δ_3 directly given and Δ_7 (§ 8) and Δ_9 (§ 6) known, and since every Δ_t $(t \geqq 3)$ contains Δ_1, Δ_3, we have the following corollaries:

If we are given a $\Delta_{t'}$ $(t' = 6m' + 1 \text{ or } 6m' + 3)$, we can construct at least two distinct sorts of Δ_t $(t > 13)$ which contain Δ_7 of sort $[5^0]$, where

Residues (mod. 72)

$$(B_1) \quad t = 1 + t' \cdot 2 = \begin{cases} 12m' + 3 \equiv 3, 15, 27, 39, 51, 63; \\ 12m' + 7 \equiv 7, 19, 31, 43, 55, 67; \end{cases}$$

$$(B_2) \quad t = 1 + 3(t' - 1) = \begin{cases} 18m' + 1 \equiv 1, 19, 37, 55; \\ 18m' + 7 \equiv 7, 25, 43, 61; \end{cases}$$

$$(B_3) \quad t = 3 + 3(t' - 3) = \begin{cases} 18m' - 3 \equiv 15, 33, 51, 69; \\ 18m' + 3 \equiv 3, 21, 39, 57; \end{cases}$$

$$(B_4) \quad t = 3 + t' \cdot 4 = \begin{cases} 24m' + 7 \equiv 7, 31, 55; \\ 24m' + 15 \equiv 15, 39, 63; \end{cases}$$

$$(B_5) \quad t = 3 + t' \cdot 6 = \begin{cases} 36m' + 9 \equiv 9, 45; \\ 36m' + 21 \equiv 21, 57. \end{cases}$$

If we are given a $\Delta_{t'}$ $(t' = 6m' + 1 \text{ or } 6m' + 3)$ which contains a Δ_7, we can construct at least two distinct sorts of Δ_t which contain Δ_7 of sort $[5^0]$, where

$$(B_6) \quad t = 7 + 3(t' - 7) = \begin{cases} 18m' - 11 \equiv 7, 25, 43, 61; \\ 18m' - 5 \equiv 13, 31, 49, 67. \end{cases}$$

These corollaries require the further hypotheses that

$$\text{in } (B_1)(B_2)(B_4)(B_5) \quad t' \geqq 3, \; m' \geqq \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases},$$

$$\text{in } (B_3) \quad t' \geqq 7, \; m' \geqq \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases},$$

and

$$\text{in } (B_6) \quad t' \geqq 15, \; m' \geqq \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}.$$

§ 14.

Absolute construction of triple systems.

We admit the existence of and make use of Δ_1, Δ_3, Δ_7, Δ_9 *and* Δ_{13}, *and can construct at least two distinct sorts of triple systems* Δ_t $(t > 13)$ *which contain* Δ_7, *where* $t = 6m + 1$ *or* $6m + 3$ *and* m *has any positive integral value.*

Δ_{13} is constructed by Netto's construction $(a\gamma)$ (Annalen v. 42, p. 145).

The first five corollaries $B_1 \ldots B_5$ apply for $t' = 3 \ldots 13$ to show that we can construct as desired,

$$[B_1] \begin{Bmatrix} \Delta_{15}, \Delta_{27} \\ \Delta_{19} \end{Bmatrix}; \quad [B_2] \begin{Bmatrix} \Delta_{19}, \Delta_{37} \\ \Delta_{25} \end{Bmatrix}; \quad [B_3] \begin{Bmatrix} \Delta_{15}, \Delta_{33} \\ \Delta_{21} \end{Bmatrix};$$

$$[B_4] \begin{Bmatrix} \Delta_{31}, \Delta_{55} \\ \Delta_{15}, \Delta_{39} \end{Bmatrix}; \quad [B_5] \begin{Bmatrix} \Delta_{45}, \Delta_{81} \\ \Delta_{21}, \Delta_{57} \end{Bmatrix};$$

that is, we can construct as desired the Δ_t for $t = 15 \ldots 39$.

We may now apply all six corollaries for $t' = 3 \ldots 39$ (since the Δ_t $(t > 13)$ were constructed so as to contain a Δ_7) and thus construct as desired the Δ_t for $t = 43 \ldots 97$.

This process continued indefinitely reaches every number t. In fact the column headed "Residues mod. 72" to the right of the table of corollaries shows that the forms given contain all integers t of the form $6m + 1$ or $6m + 3$.

Chicago, 29. April 1893.

Ueber Discriminanten und Resultanten der Gleichungen für Singularitäten von algebraischen Raumcurven, mit Anwendungen auf Realitätsverhältnisse.

Von

Franz Meyer in Clausthal.

Das Nachfolgende stellt einen Auszug dar aus einer grösseren, unter gleichem Titel demnächst in den „Wiener Monatsheften für Mathematik und Physik" erscheinenden Abhandlung.

Die Natur der Singularitäten von ebenen, wie räumlichen Curven bringt es mit sich, dass in den weitaus meisten Fällen das Zusammenrücken irgend zweier singulären Elemente auf der Curve zugleich dasjenige von wenigstens noch einem weiteren singulären Elemente bedingt.

Dieser Umstand findet seinen algebraischen Ausdruck darin, dass die Discriminanten und Resultanten der algebraischen Gleichungen, von denen die einfachsten Singularitäten einer algebraischen Curve abhängen, in mannigfaltiger Weise irreducible Factoren resp. Potenzen von solchen mit einander gemein haben. Die Natur und Anzahl derartiger Factoren ändert sich mit dem jeweils ausgezeichneten Rationalitätsbereiche.

Es handelt sich hier um Raumcurven*). Um mit den einfachsten Mitteln zu operiren, werden zunächst rationale Raumcurven der Rechnung zu Grunde gelegt.

Es hat das zur Folge, dass irgend eine Gruppe von Punkten, resp. Tangenten resp. Osculationsebenen der Curve durch Nullsetzen einer binären Form darstellbar ist.

Handelt es sich dann weiterhin um Vorgänge, welche sich in der Umgebung singulärer Stellen der Curven abspielen, so lassen sich die vorerst für rationale Curven gewonnenen Ergebnisse auf beliebige, algebraische oder analytische Raumcurven übertragen.

---

*) Vgl. die Mittheilungen in den Göttinger Nachrichten 1890 Nr. 10, 15; 1891 Nr. 1, 2. Die ebenen Curven sind ausführlich in diesen Annalen Bd. XXXVIII bearbeitet worden.

Die rationale Raumcurve R wird als allgemeine Ordnungscurve gegeben gedacht; die vierreihigen Determinanten δ, welche sich aus den Coefficienten der vier, die homogenen Coordinaten eines Curvenpunktes darstellenden ganzen Functionen $f_i(\lambda)$ einer Veränderlichen λ bilden lassen, sind die Elemente des Rationalitätsbereiches für die (binären) invarianten Bildungen der Curve.

Zunächst werden die, den fünf Singularitäten „erster Art" zugehörigen „Singularitätenformen" aufgestellt.

Um die Singularitäten „zweiter Art" zu beherrschen, d. s. die nur eine einzige Bedingung zwischen den δ erheischenden Coincidenzen irgend zweier Singularitäten der ersten Art, wird vor Allem, unter Aufbietung verschiedenartiger Hülfsmittel, die schwierige Aufgabe gelöst, die fünf Discriminanten und zehn Resultanten der fünf Singularitätenformen in Elementarfactoren zu zerspalten, welche im Rationalitätsbereiche der δ irreducibel sind.

Etwaige Einwände gegen die Sicherheit der so gewonnenen Ergebnisse werden auf Grund einer eigenthümlichen Abbildung auf eine Hülfsebene, unter Heranziehung einfacher Realitätserwägungen zerstreut.

Die erhaltenen Resultate erlauben eine tiefere Einsicht in das Zustandekommen der Singularitäten zweiter Art aus denen erster Art; insonderheit erkennt man, mit welch' verschiedenartiger Geschwindigkeit die letzteren hierbei zusammenrücken.

Hieran schliesst sich die Untersuchung der damit verknüpften Realitätsvorgänge; es handelt sich dabei um Feststellung des Vorzeichens der Discriminante gewisser quadratischer Formen.

Der von Hrn. Klein entdeckten „Realitätsgleichung" für ebene Curven lässt sich hier für Raumcurven nur eine „Realitätscongruenz mod. 4" gegenüberstellen; indessen ist die Existenz einer derartigen Gleichung, selbst bei Mitberücksichtigung von „Linien"- und „Ebenen-Singularitäten", überhaupt unwahrscheinlich.

Im nächst höheren Raume lehrt hingegen ein einfaches Beispiel, dass solche Gleichungen wiederum bestehen müssen, und zwar, wie in der Ebene (und allgemein in Räumen gerader Dimension) in grosser Mannigfaltigkeit.

§ 1.

Die Grade der Discriminanten und Resultanten von den fünf Singularitätenformen.

1. Vermöge eines einfachen Classificationsprincips gelangt man zu folgenden fünf, in endlicher Anzahl vorhandenen Ordnungssingularitäten erster Art einer (rationalen) Raumcurve R.

1) Ebenen „α^4", welche an einer Stelle α von R vier consecutive

Punkte mit der Curve gemein haben, „stationäre“ oder „Hyperosculations“-Ebenen genannt.

2) Ebenen „$\alpha^3\beta^2$“ welche R an einer Stelle α osculiren und zugleich an einer andern Stelle β berühren: sie mögen „Schmiegungsberührebenen“ heissen.

3. Ebenen „$\alpha^2\beta^2\gamma^2$“ oder „Tritangentialebenen“, welche an drei getrennten Stellen α, β, γ berühren.

4) Gerade „$(\alpha^2\beta)$“ oder „Trefftangenten“, welche R in α berühren und zudem noch in β treffen.

5) Gerade „$(\alpha\beta\gamma\delta)$“, oder „Quadrisecanten“, welche der Curve an vier getrennten Stellen α, β, γ, δ begegnen.

Betreffs der Bezeichnung ist nur hinzuzufügen, dass singuläre Ebenen ohne Klammer, singuläre Geraden mit einer einfachen, endlich singuläre Punkte — z. B. ein wirklicher Doppelpunkt $((\alpha\beta))$ — mit einer doppelten Klammer versehen werden. Die aufgezählten fünf Singularitäten erster Art entsprechen je in doppelter Art den drei Ordnungssingularitäten erster Art einer ebenen Curve. Den Wendetangenten „α^3“ der Ebene stehen hier gegenüber die Ebenen α^4 und $\alpha^3\beta^2$, den Doppeltangenten „$\alpha^2\beta^2$“ die Ebenen $\alpha^3\beta^2$ und $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, endlich den Doppelpunkten $(\alpha\beta)$ die Geraden $(\alpha^2\beta)$ und $(\alpha\beta\gamma\delta)$.

2. Man wird die fünf Singularitäten erster Art algebraisch festlegen, indem man diejenigen Binärformen einer nicht homogenen Veränderlichen α, die „Singularitätenformen“ aufsucht, welche, gleich Null gesetzt, die jeweils an erster Stelle aufgeführten Argumente α zu Wurzeln haben.

Es geschieht dies mittels geeigneter Eliminationen, unter Bezugnahme auf früher für ebene Curven erlangte Resultate. Die am Ende aufgeführte Tabelle I zeigt für jede der Singularitätenformen sowohl den Grad in α an, wie auch den Grad hinsichtlich der, homogen eingehenden, Determinanten δ. Dabei ist eine jede der fünf Formen durch eine eckige Klammer angedeutet. Daraus lässt sich sofort eine zweite Tabelle herleiten, welche für die bez. α gebildeten Discriminanten und Resultanten der fünf Singularitätenformen den Grad in den δ erkennen lässt.

§ II.

Die Zerfällung der sechs Discriminanten und Resultanten der ersten drei Singularitätenformen in Elementarfactoren.

3. Es kommt nunmehr darauf an, die fünfzehn, in der Tabelle II verzeichneten Invarianten der Curve R in Elementarfactoren zu zerspalten, welche im Bereiche der δ irreducibel sind.

Es ist von Vortheil, zu dem Behuf erst eine möglichst grosse

Anzahl solcher Elementarfactoren, wenigstens hinsichtlich ihres Grades und ihrer Bedeutung, ausfindig zu machen. Die gemeinten Factoren ordnen sich dabei von selbst in drei Classen ein. Die erste Classe umfasst diejenigen, welche sich durch directe Elimination aus den Formen $f(\lambda)$ resp. deren conjugirten, isolirt darstellen lassen; bei der zweiten Classe sind die erforderlichen Eliminationsprocesse, wofern man nicht erst fremde Factoren ausscheiden will, erst nach Einführung von gewissen Hülfsveränderlichen ausführbar; die Individuen der letzten Classe werden indirect aus bereits gefundenen Zerlegungen bestimmt.

4. Zur ersten Classe gehören die Elementarfactoren (vgl. Tabelle III)

$$[\alpha^5],\ [\alpha^4\beta^2],\ [\alpha^3\beta^3],\ [\alpha^3\beta^2\gamma^2],\ [\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2],\ [(\alpha^3)],\ [(\alpha^2\beta\gamma)].$$

Es sind die linken Seiten der — in reducirter Form gedachten — Bedingungsgleichungen für das Eintreten der jeweils in der eckigen Klammer angedeuteten Singularität zweiter Art. So z. B. ist

$$[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2] = 0$$

das Criterium für die Existenz einer viermal berührenden Ebene, $[(\alpha^3)] = 0$ für die Existenz einer stationären Tangente u. s. f.

Will man hier etwa den Ausdruck $[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]$ erhalten, so hat man, wenn $\varphi(\lambda) = \varphi_\lambda^n$ irgend eine der zu den $f(\lambda)$ conjugirten Formen, und n die Ordnung der Curve R bedeutet, aus den $n-3$ Gleichungen:

$$\varphi\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2\lambda_0\lambda_{10}\ldots\lambda_n = 0$$

die Argumente $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda_0, \lambda_{10}, \ldots \lambda_n$ zu eliminiren.

5. Wir kommen zu den Factoren der zweiten Classe. Das gemeinte Hülfsprincip läuft, geometrisch gesprochen, darauf hinaus, die vorliegende Curve n^{ter} Ordnung $R = R_n^3$ als Projection einer im nächst höheren Raum gelegenen Curve R_n^4 anzusehen.

Greift man nämlich aus der Schaar der Formen φ irgend eine — etwa φ_1, mit den Coefficienten φ_{1i} — heraus, so lassen sich diese Grössen φ_{1i} auffassen als polyedrale Coordinaten eines in der nächst höheren, vierfach ausgedehnten linearen Mannigfaltigkeit M_4 befindlichen Punktes P, von dem aus die gegebene R_n^3 als Projection einer R_n^4 erscheint. Die R_n^4, oder vielmehr die Gesammtheit der mit ihr projectivisch verwandten Curven, ist durch die Schaar der $n-4$ übrigen Formen $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_{n-3}$ eindeutig bestimmt.

Hat man jetzt eine Invariante $J = J(\delta)$ der R_n^3, vom ν^{ten} Grade in den δ, so betrachte man dieselbe als eine homogene Form ν^{ten} Grades der Coordinaten φ_{1i} von P. Die Gleichung $J = 0$ stellt dann geometrisch eine dreifach ausgedehnte $M_3^{(\nu)}$ ν^{ter} Ordnung innerhalb der M_4 dar, als Ort derjenigen Punkte P, von denen aus die R_n^4 in eine R_n^3 mit verschwindendem J projicirt wird.

Will man jetzt umgekehrt den Grad ν einer Invariante $J = J(\delta)$ ermitteln, deren Verschwinden eine bekannte geometrische Bedeutung für die Curve R_n^3 besitzt, so wird man in der M_4 mit liniengeometrischen Mitteln die Anzahl ν der Schnittpunkte der in Rede stehenden M_3 mit einer beliebigen Geraden bestimmen.

Algebraisch heisst das, die Coefficienten φ_{ii} durch lineare Verbindungen $\varphi_{ii} + \varkappa\psi_{ii}$ ersetzen, womit die Grössen δ gleichfalls in solche von der Gestalt $\delta + \varkappa\delta'$ übergehen, und $J(\delta) = 0$ in eine Gleichung $J(\delta + \varkappa\delta') = 0$ ν^{ter} Ordnung in $\varkappa$, deren Wurzeln gerade den eben erwähnten ν Schnittpunkten der M_3 mit einer Geraden entsprechen.

Ein typisches Beispiel für die in Rede stehende Methode wird geboten durch den Fall einer Trefftangente $(\alpha^2\beta)$, wenn die Argumente α, β noch durch irgend eine algebraische Beziehung $\Phi(\overset{\mu_1}{\alpha}, \overset{\mu_2}{\beta}) = 0$ an einander geknüpft sind, wo μ_1, μ_2 die Grade von Φ in α, β bedeuten.

Man verschaffe sich vorderhand die „Ebenencoordinaten" p_{ikl} einer, die R_n^4 in α berührenden und ausserdem in β treffenden „Ebene" $p = (\alpha^2\beta)$. Es sind das die durch $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$ dividirten dreireihigen Determinanten der $f_i(\alpha), f_i(\beta), f_i(\gamma)$ $(i = 1, 2 \ldots 5)$, wenn man hinterher noch γ gleich α macht, also ganze Functionen von α, β von den resp. Graden $2(n-2)$, $n-2$.

Damit eine Gerade q mit den Coordinaten $q_{mn}(m, n = 1, 2, \ldots 5)$ einer Ebene p in einem Punkte begegne, ist die Erfüllung der Bedingung $\Sigma p_{ikl} q_{mn} = 0$ nothwendig und hinreichend. Substituirt man hier für die p ihre Werthe in Function der α, β, so resultirt eine Gleichung zwischen α und β, wiederum von den Graden $2(n-2)$, $n-2$, deren Combinirung mit der Beziehung $\Phi(\overset{\mu_1, \mu_2}{\alpha, \beta}) = 0$ nach der Bézout'schen Regel $(n-2)(\mu_1 + 2\mu_2)$ gemeinsame Werthepaare liefert. Man hat somit das Ergebniss:

„Zählt jede q treffende Ebene p einfach, so ist die Ordnung ν der von den Ebenen p erfüllten $M_3^{(\nu)}$ gleich $(n-2)(\mu_1 + 2\mu_2)$; zählt dieselbe dagegen etwa r-fach, so ist der angegebene Werth von ν durch r zu theilen."

Hiernach sind die Grade der folgenden Elementarfactoren (vgl. Tabelle III) ermittelt worden:

$$[\alpha^4, (\alpha^2\beta)],\ [\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)],\ [\alpha^3\gamma^2, (\alpha^2\beta)],\ [\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\beta)],\ [\alpha^2\gamma^2\delta^2, (\alpha^2\beta)],$$
$$[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)],\ [(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)],\ [((\alpha\beta))].$$

Unter diesen macht der vorletzte, der Existenz einer, die Curve R fünfmal treffenden Sehne entsprechende, eine eingehende Untersuchung erforderlich.

6. Die noch ausstehenden Elementarfactoren der dritten Classe lassen sich, wie weiterhin vermöge des Hülfsmittels der Correspondenzen hervorgeht, von jeweils verwandten algebraisch gar nicht trennen.

Das bisher gewonnene Material reicht indessen zunächst aus, um die Zerlegungen von den Discriminanten und Resultanten der drei ersten Singularitätenformen $[\alpha^4]$, $[\alpha^3\beta^2]$, $[(\alpha^2\beta)]$ vollständig auszuführen.

Man kennt nämlich aus geometrischen Gründen a priori die Bedeutung der einzelnen Elementarfactoren*), welche den bezeichneten Bildungen zugehören, Die Aufgabe reducirt sich damit auf die Ermittelung der Exponenten, mit welchen die einzelnen Factoren behaftet sind. Diese Exponenten sind ganze positive Zahlen, ausgenommen den Factor $[(\alpha^3)]$, wo der bez. Exponent in einigen Fällen ein rationales Vielfaches einer von vornherein bekannten ganzen Function von n ist.

Durch Vergleichung der Grade linker und rechter Hand ergeben sich in n identische Relationen: dieselben sind jedesmal mit genau so vielen diophantischen Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Exponentenzahlen äquivalent, dass für eben diese Zahlen jeweils nur eine einzige brauchbare Lösung resultirt. Auf diese Weise sind die Zerlegungen für die ersten drei Discriminanten und für die ersten drei Resultanten der Tabelle II gewonnen worden.

§ III.

Die Discriminanten- und Resultanten-Correspondenzen. Zerlegungen der noch übrigen Discriminanten und Resultanten. Abbildung auf eine Hülfsebene.

7. Es ist noch der Ergänzungsbeweis dafür zu erbringen, dass bei den soeben besprochenen sechs Zerlegungen kein Elementarfactor ausgelassen ist. Dazu dienen gewisse Chasles'sche Correspondenzen im Raume der R_n^4, deren Coincidenzen die einzelnen Zerlegungsfactoren, jeden gerade mit seiner Vielfachheit, widerspiegeln. In einzelnen Fällen muss die geometrische Abzählung durch algebraische Rechnung gestützt werden.

Das Princip des Beweises ist, dass zunächst gezeigt wird, dass die Vielfachheiten der einzelnen Factoren mindestens so hoch sein müssen, als es die oben gefundenen Exponenten anzeigen. Daraus folgt dann ohne Weiteres die völlige Uebereinstimmung der beiderlei Anzahlen.

*) Die Irreducibilität dieser, wie der weiteren Elementarfactoren, folgt mit Sicherheit aus der Verbindung der beiden, weiter unten besprochenen Methoden der Correspondenzen und der Abbildung.

8. Zu dem Zwecke greife man auf Nr. 5 zurück. Eine Gleichung $J(\overset{\nu}{\delta}) = 0$ wurde durch eine $M_3^{(\nu)}$ im Raume der R_n^4 geometrisch realisirt. Den ν Schnittpunkten der $M_3^{(\nu)}$ mit einer Geraden q entsprachen die ν Wurzeln von $J(\delta + \varkappa\delta') = 0$, wo die $\delta + \varkappa\delta'$ aus den δ durch Substitution eines Formenbüschels $\varphi_1 + \varkappa\psi_1$ an Stelle einer der Formen $\varphi = \varphi_1$ entstanden. Die Coefficienten von $\varphi_1 + \varkappa\psi_1$ waren die Coordinaten eines Punktes der Geraden q, den man mit $P(\varkappa)$ bezeichnen kann.

Versteht man jetzt unter J eine unserer Discriminanten oder Resultanten, so erweist es sich als zweckmässig, die Substitution der $\delta + \varkappa\delta'$ an Stelle der δ bereits in den Singularitätenformen selbst zu vollziehen; hierdurch geben dieselben, als Functionen von α und $\varkappa$, eben vermöge ihrer Discriminanten und Resultanten zu Correspondenzen Anlass, welche man sowohl im Gebiete der Variabeln α d. i. auf der Curve R_n^4, wie im Gebiete der Variabeln $\varkappa$ d. i. auf der Geraden q hinsichtlich ihrer Coincidenzen verfolgen kann. Wenden wir das etwa an auf die Resultanten der beiden Gleichungen:

$$[\alpha^4](\alpha, \varkappa) = 0, \quad [\alpha^3\beta^2](\alpha, \varkappa) = 0,$$

wo die Argumente α, $\varkappa$ in runder Klammer beigefügt sind.

Je nachdem man α oder $\varkappa$ eliminirt, gelangt man zu einer der beiden Resultanten

$$R_\alpha(\varkappa) = R_\alpha, \quad R_\varkappa(\alpha) = R_\varkappa.$$

Setzt man in $R_\alpha(\varkappa)$ $\varkappa$ gleich Null, so gelangt man zu der früher behandelten Resultante zurück.

Die Wurzeln der beiden Gleichungen $R_\alpha = 0$, $R_\varkappa = 0$ sind einander eindeutig zugeordnet, sodass aus einer bekannten Zerlegung von R_α sofort auf diejenige von $R_\varkappa$ u. umg. geschlossen werden kann.

9. Um die gemeinten Correspondenzen algebraisch aufzustellen, nehme man in einer der beiden Gleichungen $[\alpha^4] = 0$, $[\alpha^3\beta^2] = 0$ für eine der beiden Variabeln, etwa α, einen beliebigen Werth an, setze irgend einen der dadurch bestimmten Werthe $\varkappa$ in die zweite Gleichung ein, und ordne die sämmtlichen, hierdurch wiederum bestimmten Werthe $\alpha = \alpha_1$ dem ursprünglich angenommenen Werthe α zu u. umg. Die Coincidenzstellen dieser beiden Correspondenzen sind eben die Wurzeln von $R_\varkappa = 0$, resp. $R_\alpha = 0$.

Werden die Correspondenzen geometrisch im Raume der R_4 construirt, so lassen sich durch unmittelbare Anschauung untere Grenzen für die Vielfachheiten der einzelnen Classen von Coincidenzen ablesen.

In der That, man gehe aus von irgend einer linearen M_3: „α^4“ der R_n^4, welche die Gerade q in einem Punkte $P(\varkappa)$ schneide. Von P gehen $6(n-3)(n-4)$ lineare M_3: „$\alpha_1^3\beta^2$“ an die Curve. Umgekehrt schneiden sich in einer Ebene (α_1^3) $2(n-4)$ noch einmal

berührende „$\alpha_1^3\beta^2$“. Heisst einer der Treffpunkte auf q: $Q(\varkappa_1)$, so passirt durch Q wiederum eine Gruppe von $4(n-3)$: „α^4“.

Damit ist sowohl die Correspondenz zwischen α und α_1, wie zwischen $\varkappa$ und $\varkappa_1$ festgelegt.

Man erkennt sofort drei Classen von Coincidenzen, welche der Reihe nach durch die $3(n-2)$ Ebenen (α^3), welche q treffen, durch die $8(n-4)$ $(n-5)$ Gebilde „$\alpha^4\beta^2$“ und durch die $5(n-4)$ „α^5“ veranlasst werden, sowie, dass die dreierlei Vielfachheiten der Coincidenzen resp. die Zahlen $2(n-4)$, 1, 2 zu einer unteren Grenze haben. Das waren aber gerade die Exponenten der bezüglichen Zerlegungsformel.

10. Ein entsprechendes Verfahren ist für die Discriminanten einzuschlagen. Wählen wir hier als Beispiel die Singularitätenform $[\alpha^3\beta^2](\alpha,\varkappa)$, und bezeichnen die beiden Discriminanten mit $D_\alpha(\varkappa)=D_\alpha$, $D_\varkappa(\alpha)=D_\varkappa$, so werden die Zerlegungen der Formen D_α, $D_\varkappa$ wiederum durch die Coincidenzen zweier Correspondenzen geliefert, die jetzt aber wesentlich verschieden von einander sind. Die rationalen Factoren von D_α und $D_\varkappa$ sind bekanntlich von zweierlei Art, wesentliche und ausserwesentliche. Die ersteren beziehen sich auf die Verzweigungen des vorliegenden algebraischen Gebildes $(\alpha,\varkappa)=0$, die letzteren auf die eigentlichen Singularitäten desselben.

Für den zunächst vorliegenden Zweck würde die Betrachtung der mit der Zerlegung von D_α verbundenen Correspondenz genügen; behufs weiterer Controlle und besonders mit Rücksicht auf die späteren Realitätsuntersuchungen wird auch $D_\varkappa$ herangezogen. Was die geometrische Construction angeht, so werde etwa die zu D_α gehörige Correspondenz realisirt.

Durch irgend eine Ebene (α^3) lassen sich $2(n-4)$, noch einmal R_n^4 berührende lineare M_3: „$\alpha^3\beta^2$“ legen. Durch irgend einen der Schnittpunkte P mit q gehen dann noch $6(n-3)(n-4)-1$ *weitere* „$\alpha_1^3\gamma^2$“. In gleicher Weise gelangt man von α_1 zu α zurück. Die Anzahl der Coincidenzen ist gleich dem Grade von D_α in $\varkappa$; die Wurzeln der einzelnen Elementarfactoren von D_α sind gerade durch diejenigen Stellen $\varkappa=\varkappa_1$ auf q repräsentirt, welche den bezüglichen Coincidenzstellen $\alpha=\alpha_1$ unserer Correspondenz eindeutig zugeordnet sind. Auf die Aufzählung der verschiedenen Classen von Coincidenzen, sowie auf die Darstellung der im Einzelnen noch benöthigten Controllen soll hier nicht eingegangen werden.

11. Die Methode der Correspondenzen führt nun auch zu den noch übrigen Zerlegungen von Discriminanten und Resultanten, bei denen die in Nr. 6 geschilderte Methode der diophantischen Gleichungen immer da versagt, wo der Grad wenigstens eines Elementarfactors direct nicht mehr bestimmbar ist.

Auch hier muss im Uebrigen auf die Auseinandersetzung der

weiteren Hülfsmittel verzichtet werden, die für die Vollständigkeit der erhaltenen Formeln (vgl. Tabelle II) Gewähr leisten.

12. Es genüge, in dieser Hinsicht auf ein geometrisches Verfahren hinzuweisen, welches die gegenseitigen Beziehungen zwischen den Singularitätenformen in's Licht setzt.

Denkt man sich diese Formen, wie in Nr. 8, in den zwei Variabeln α und $\varkappa$ gebildet, und dann gleich Null gesetzt, so kann man sie in einer Bildebene, in der α und $\varkappa$ Cartesische Coordinaten bedeuten, durch fünf algebraische Curven $S_1, S_2, \ldots S_5$ darstellen. Die Curven S besitzen im Unendlichen nur auf der α- und $\varkappa$-Axe gewisse, sofort angebbare vielfache Punkte, verlaufen sonst aber im Endlichen.

Die Gleichungen $D_\alpha(\varkappa) = 0$ liefern die zur α-Axe parallelen Tangenten der Curven, ebenso $D_\varkappa^*(\alpha) = 0$ die zur $\varkappa$-Axe parallelen, endlich $R_\alpha(\varkappa) = 0$, $R_\varkappa(\alpha) = 0$ die Coordinaten der gemeinsamen Schnittpunkte von je zweien der Curven S.

Handelt es sich nun z. B. um die Vielfachheit des Factors $[\alpha^3\beta^3]$ bei der Discriminante der Singularitätenform $[\alpha^3\beta^2]$, so zeigt sich, dass die Curve, dem Vorkommen der Coincidenz $[\alpha^3\beta^3] = 0$ entsprechend, jedesmal zwei getrennte zweifache Punkte besitzt, deren Verbindungslinie in die α-Richtung fällt, und deren Tangenten im Allgemeinen keiner der beiden Coordinatenaxen parallel laufen. Es bleibt nur noch zu entscheiden, ob die zweifachen Punkte Doppel- oder Rückkehrpunkte sind. Das erledigt sich durch eine einfache Realitätsbetrachtung, indem man, geometrisch gesprochen, die Verbindungslinie der beiden zweifachen Punkte, unendlich wenig parallel mit sich verschiebt und nunmehr auf die Realität resp. Nicht-Realität der beiden dadurch auseinander tretenden Schnittpunkte achtet.

In der That sind die gemeinten Punkte Rückkehrpunkte, und daher die Vielfachheit des Factors $[\alpha^3\beta^3]$ in der Discriminante von $[\alpha^3\beta^2]$ nicht $2 \cdot 2$, sondern $3 \cdot 2$.

13. Hinsichtlich der Gesetzmässigkeiten für die Grad- und Gewichts-Anzahlen der einzelnen Elementarfactoren sei der Kürze halber auf die Tabelle III selbst verwiesen.

Auch die Analogien mit Zerlegungen in höheren Räumen, welche eine Reihe von specifischen Besonderheiten der ebenen und räumlichen erst in's wahre Licht rücken, seien hier unterdrückt.

§ IV.

Entstehung zusammengesetzter Singularitäten aus einfachen. Realitätsvorgänge. Realitätscongruenz.

14. Das Verschwinden eines einzelnen Elementarfactors bedeutete, dass wenigstens zwei singuläre Elemente erster Art zu einem nächst höheren zusammenrücken.

Es ist von Interesse, zu erkennen, in welcher Art und Weise sich ein derartiges Zusammenrücken in den verschiedenen Fällen vollzieht.

Es wird dazu ein Verfahren der Reihenentwickelung eingeschlagen, welches in leichteren Fällen einen neuen Beweis für die Vielfachheit der bezüglichen Elementarfactoren in den Zerlegungsformeln liefert; umgekehrt werden indessen die letzteren stets eine vollständige Controlle bieten, sodass durch die vereinigte Wirkung beider Hülfsmittel eine ausreichende Einsicht in die gemeinten Vorgänge ermöglicht wird.

15. Es mag genügen, wenn wir uns an einem Beispiele erläutern. Anstatt den Factor $[\alpha^5]$ allgemein zu berechnen, also das Criterium für das Eintreten einer Ebene α^5 überhaupt, lege man dem Argumente α den canonischen Werth Null bei und frage vorab nach den Bedingungen dafür, dass die Curve R_n^3 gerade an der Stelle Null die gemeinte Singularität aufweist. Hierbei dürfen wir uns noch auf die Curve niedrigster — also hier der fünften Ordnung — beschränken, bei welcher die Singularität zuerst auftritt.

Zu einer R_5^3 gehören zwei Formen φ, sagen wir:

$$\begin{cases} \varphi_\alpha^5 = \varphi_0 + 5\varphi_1\alpha + 10\varphi_2\alpha^2 + \cdots, \\ \psi_\alpha^5 = \psi_0 + 5\psi_1\alpha + 10\psi_2\alpha^2 + \cdots. \end{cases}$$

Setzt man

$$\pi_{ix} = \begin{vmatrix} \varphi_i & \varphi_x \\ \psi_i & \psi_x \end{vmatrix},$$

so ist das Criterium für das Auftreten einer Ebene α^5 ausgedrückt durch das Verschwinden der Resultante von φ und ψ, also im canonischen Falle $\alpha = 0$ durch die Gleichungen:

$$\pi_{0x} = 0 \quad (x = 1, 2, \ldots 5).$$

Wir setzen jetzt die π_{0x} mit einer beliebig kleinen Grösse ε proportional:

$$\pi_{0x} = \varepsilon\pi'_{0x},$$

und charakterisiren dadurch, je nach dem Vorzeichen von ε, einen Zustand der Curve unmittelbar vor oder nach dem Erscheinen einer Ebene α^5 an der Stelle Null.

Der Factor $[\alpha^5]$ wird, wie leicht zu sehen, gerade mit der ersten Potenz von ε proportional; wir haben also nur noch zuzusehen, mit welcher Potenz von ε die Discriminanten und die Resultante der Singularitätenformen $[\alpha^4]$ und $[\alpha^3\beta^2]$ vergleichbar werden: genau dieselben Potenzen sind es dann, welche dem Factor $[\alpha^5]$ in den zugehörigen Zerlegungsformeln zukommen. Nun beginnt die Entwickelung der Formen $[\alpha^4]$ und $[\alpha^3\beta^2]$ mit den Gliedern:

$$[\alpha^4] = \pi_{01} + 4\alpha\pi_{02} + 2\alpha^2(3\pi_{03} + 5\pi_{12}) + \cdots,$$
$$[\alpha^3\beta^2] = (4\pi_{01}\pi_{12} - \pi_{02}^2) + 4\alpha\{2\pi_{01}\pi_{13} + \pi_{02}(\pi_{12} - \pi_{03})\}$$
$$+ 2\alpha^2\{8\pi_{02}\pi_{13} + 2\pi_{12}(\pi_{03} + 3\pi_{12}) + 2\pi_{01}(\pi_{14} + 3\pi_{23})$$
$$- \pi_{02}(\pi_{04} + 4\pi_{13}) - 2(\pi_{03} + \pi_{12})^2\} + \cdots,$$

oder, wenn man nur auf das Vorkommen von ε achtet:

$$[\alpha^4] = \varepsilon\omega_0 + \varepsilon\omega_1\alpha + \omega_2\alpha^2 + \cdots,$$
$$[\alpha^3\beta^2] = \varepsilon\mu_0 + \varepsilon\mu_1\alpha + \mu_2\alpha^2 + \cdots$$

wo die ω, μ nicht zugleich mit ε verschwinden.

Die beiden Discriminanten werden mit ε, die Resultante mit ε^2 vergleichbar, was mit dem Früheren übereinstimmt.

In schwierigen Fällen ist allerdings ein derartiger Factor ε in einer Discriminante oder Resultante zu einer höheren Potenz enthalten, als es zunächst den Anschein hat, die Controlle wird dann eben durch die bereits bekannten Zerlegungen geliefert.

Da man die Grösse ε als Mass der Geschwindigkeit ansehen kann, mit welcher die einzelnen Singularitäten erster Art zu einer solchen zweiter Art zusammentreten, so gewähren die angedeuteten Entwickelungen ein Bild dieser Bewegung, indem man aus ihnen entnimmt, in welchem Verhältniss die einzelnen Geschwindigkeiten zu einander stehen.

16. Daran knüpft sich ohne Weiteres die Erörterung der bei den einzelnen Coincidenzen zu Tage tretenden Realitätserscheinungen.

Um bei dem obigen Beispiel stehen zu bleiben, so vergleiche man die Discriminanten von $[\alpha^4]$ und $[\alpha^3\beta^2]$, oder, was hier auf dasselbe hinauskommt, die Discriminanten der oben hingeschriebenen quadratischen Formen hinsichtlich ihres Vorzeichens für sehr kleine Werthe von ε. In erster Annäherung hat man:

$$D[\alpha^4] = 10\varepsilon\pi_{01}'\pi_{12}, \quad D[\alpha^3\beta^2] = 32\varepsilon\pi_{01}\pi_{12}\cdot\pi_{12}^2.$$

Beide Discriminanten haben somit in der Nähe von $\varepsilon = 0$ stets das nämliche Vorzeichen. Daraus folgt denn, dass die beiden Ebenen α^5 und die beiden Ebenen $\alpha^3\beta^2$, welche durch die Singularität zweiter Art $[\alpha^5]$ absorbirt werden, beim Ueberschreiten dieses Zustandes gleichzeitig vom Reellen in's Imaginäre übergehen resp. vice versa.

17. Indem wir die zum Theil nicht mühelosen Rechnungen unterdrücken, die mit der allseitigen Durchführung des scizzirten Verfahrens verbunden sind, geben wir nur die wesentlichsten Ergebnisse an.

Lassen wir der Einfachheit halber alle Uebergänge bei Seite, bei denen die betheiligten reellen (imaginären) Elemente reell (imaginär) bleiben, so beachten wir in erster Linie die isolirte Stellung, welche die Quadrisecanten $(\alpha\beta\gamma\delta)$ einnehmen. Vermöge Ueberschreitens der

Coincidenz $(\alpha^2\beta\gamma)$ geht eine solche Gerade mit vier reellen Treffpunkten über in eine solche mit nur zwei reellen, oder auch eine letztere über in eine mit keinem reellen Treffpunkt (resp. vice versa), ohne dass irgend ein Ersatz seitens der andern Singularitäten erster Art stattfindet.

Ebenso verhält es sich mit der Erscheinung

$$[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha + \partial\alpha_1\beta + \partial\beta_1 \ldots)],$$

wo zwei Quadrisecanten, die beide irgend einer der drei erwähnten Arten angehören, vom Reellen in's Imaginäre übergehen resp. umg.

Ein theilweise ähnliches, theilweise aber verschiedenes Verhalten zeigen die Tritangentialebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$.

Beim Eintreten von $[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$ oder auch von $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$ rücken wiederum zwei reelle Ebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, sei es beide mit einem, oder aber beide mit drei reellen Berührstellen zusammen, um imaginär zu werden resp. umg., gleichfalls ohne Compensation.

Bei $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$ findet zwischen dem Paare von Ebenen $\alpha^3\beta^2$ und demjenigen von Geraden $(\alpha^2\beta)$ keine allgemein gültige Realitätsabhängigkeit statt d. h. während etwa ein reelles Paar dort verloren wird, kann hier ein solches ebensogut gewonnen wie verloren werden.

Das Gleiche gilt hinsichtlich des Falles $[\alpha^4\beta^2]$ von dem Paare von Ebenen $\alpha^3\beta^2$ und dem der Restpunkte der Ebene α^4. Eine entsprechende Zweideutigkeit kommt den Vorgängen $[\alpha^3\beta^3]$ und $[((\alpha\beta))]$ zu, an denen sich jedesmal zwei Paare von Ebenen $\alpha^3\beta^2$ resp. Geraden $(\alpha^2\beta)$ betheiligen. Entweder geht die Realität beider Paare zugleich verloren (oder wird gewonnen), oder aber es kann auch ein reelles Paar von einem imaginären begleitet sein, die dann nach dem Durchgange durch das bez. Vorkomniss ihre Rolle vertauschen.

Dagegen wird beim Passiren von $[\alpha^4\beta^2]$ der Uebergang von einem Paare reeller (imaginärer) Berührungspunkte einer Ebene $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ in's Imaginäre (Reelle) begleitet von einem durchaus gleichverlaufenden eines Paares von Ebenen $\alpha^3\beta^2$. Dieselbe Begleiterscheinung bemerkt man beim Ueberschreiten von $[\alpha^5]$, wo sich ein Paar von Ebenen $\alpha^3\beta^2$ mit einem Paare von Ebenen α^4 in paralleler Bewegung befindet. Endlich hat die Coincidenz $[(\alpha^3)]$ wieder etwas ihr Eigenthümliches; hier gesellt sich ein reelles (imaginäres) Paar von Ebenen α^4 zu einem imaginären (reellen) Paar von Geraden $(\alpha^2\beta)$, um nach dem Durchgange je in den entgegengesetzten Zustand zu gerathen.

18. Um die drei letztgenannten Realitätsabhängigkeiten zusammenzufassen, sei die Anzahl der reellen Ebenen α^4 einer algebraischen Raumcurve mit w' bezeichnet, die der reellen Ebenen $\alpha^3\beta^2$ mit t', die der reellen Geraden $(\alpha^2\beta)$ mit d', sowie endlich die Anzahl der reellen Ebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ mit nur einem einzigen reellen Berührungspunkt mit T''. Dann bleiben beim Durchgange durch die Vorkommnisse $[\alpha^4\beta^2]$, $[\alpha^5]$,

$[(\alpha^3)]$ resp. die Aggregate $t' + 2T''$, $w' - t'$, $w' + d'$ je unverändert, mithin bleibt das Aggregat

$$A = w' + d' - t' - 2T''$$

allen drei Durchgängen gegenüber invariabel.

Dagegen existiren immer Durchgänge, bei welchen einzelne Theile des Aggregates A um Zwei wachsen, das ganze Aggregat indessen kann sich bei beliebigen Veränderungen der Curve nur um ein Vielfaches von Vier ändern, oder, wie sich schreiben lässt:

$$A \equiv \text{const. mod. } 4.$$

Ein instructives Beispiel liefert die Raumcurve 4. Ordnung zweiter Species.

19. Für ebene Curven existirt bekanntlich eine von Hrn. Klein entdeckte „Realitätsgleichung". Wesshalb eine solche im Raume innerhalb der hier gesteckten Grenzen unmöglich ist, zeigen die in Nr. 17 angeführten Resultate zur Genüge.

Aber auch bei Mitberücksichtigung der Classen- und Rangsingularitäten einer Raumcurve ist eine Realitätsgleichung unwahrscheinlich, da in dem eben citirten Beispiele, wie sich zeigen lässt, eine derartige Gleichung sicher nicht existirt.

Dagegen muss es auf Grund eines von mir in den Göttinger Nachrichten 1891 Nr. 2 mitgetheilten Satzes im Raume von 4 Dimensionen wieder Realitätsgleichungen geben. So ist constant, nämlich gleich Acht, die Gesammtzahl der reellen Stellen, wo eine lineare M_3 die Curve in fünf consecutiven Punkten trifft, wo eine die Curve ausserdem noch einmal treffende Ebene osculirt, und endlich wo die eine Trisecante der Curve begegnet.

Und zwar muss es solcher Gleichungen; wie bereits in der Ebene, eine ganze Reihe geben.

Selbstredend können für specielle Curven Realitätsgleichungen existiren. So hat Herr Klein neuerdings (1892) für ein einzelnes Oval einer Raumcurve 6. Ordnung vom Geschlecht drei den Satz aufgestellt:

„Die Anzahl der Tritangentialebenen mit drei reellen Berührungen, vermehrt um die Anzahl der Hyperosculationsebenen, welche die Curve ausserdem nicht mehr treffen, ist constant, nämlich gleich Acht."

Es stimmt dies Ergebniss mit unsern allgemeinen Resultaten überein. Denn es könnten hier nur zwei Coincidenzen in Betracht kommen, $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$ und $[\alpha^4\beta^2]$. Der erstere Fall, wo also die drei Berührungspunkte auf einer Geraden lägen, kann hier überhaupt nicht eintreten, der zweite dagegen nur so, dass die Curven an den beiden Stellen α, β auf der nämlichen Seite der singulären Ebene verläuft.

Tabellen.

I.

Die fünf Singularitätenformen.

		Grad in α.	Grad in den δ.
Ebenen	$[\alpha^4]$.	$4(n-3)$	1
„	$[\alpha^3\beta^2]$.	$6(n-3)(n-4)$	$2(n-4)$
„	$[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$.	$4(n-3)(n-4)(n-5)$	$2(n-4)(n-5)$
Gerade	$[(\alpha^2\beta)]$.	$2(n-2)(n-3)$	$n-2$
„	$[(\alpha\beta\gamma\delta]$.	$\frac{1}{3}(n-2)(n-3)^2(n-4)$	$\frac{1}{3}(n-2)(n-3)(n-4)$.

II.

Die Zerlegungen der fünf Discriminanten und zehn Resultanten.

A. Discriminanten.

$$D[\alpha^4] = [(\alpha^3)] \cdot [\alpha^5].$$

$$D[\alpha^3\beta^2] = [(\alpha^3)]^{(2n-8)(2n-9)} \cdot [\alpha^5] \cdot [\alpha^4\beta^2] \cdot [\alpha^3\beta^2\gamma^2]^2 \cdot [\alpha^3\beta^3]^6 \cdot [\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)].$$

$$D[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = [\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]^3 \cdot [\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]^{24} \cdot [\alpha^4\beta^2] \cdot [\alpha^3\beta^2\gamma^2]^7 \cdot [\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1{}^2\gamma_1{}^2].$$

$$D[(\alpha^2\beta)] = [(\alpha^3)] \cdot [(\alpha^2\beta\gamma)]^2 \cdot [((\alpha\beta))]^2 \cdot [\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)].$$

$$D[(\alpha\beta\gamma\delta)] = [(\alpha_i), (\alpha_i + \partial\alpha_i)]^4 \cdot [(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]^{60} \cdot [(\alpha^2\beta\gamma)] \cdot [((\alpha\beta))]^{\frac{1}{2}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \cdot [(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\beta_1\gamma_1{}^*\delta_1)]^2.$$

B. Resultanten.

$$R\{[\alpha^4], [\alpha^3\beta^2]\} = [\alpha^4\beta^2] \cdot [(\alpha^3)]^{2(n-4)} \cdot [\alpha^5]^2$$

$$R\{[\alpha_4], [(\alpha^2\beta)]\} = [(\alpha^3)]^2 \cdot [\alpha^4, (\alpha^2\beta)].$$

$$R\{[\alpha^3\beta^2], [\alpha^2\beta)]\} = [(\alpha^3)]^{2(n-4)} \cdot [\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]^2 \cdot [\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\gamma)].$$

$$R\{[\alpha^4], [\alpha^2\beta^2\gamma^2]\} = [\alpha^4\beta^2] \cdot [\alpha^4, \alpha^2\beta^2\gamma^2].$$

$$R\{[\alpha^4], [(\alpha\beta\gamma\delta)]\} = [\alpha^4, (\alpha\beta\gamma\delta)].$$

$$R\{[\alpha^3\beta^2], [\alpha^2\beta^2\gamma^2]\} = [\alpha^4\beta^2]^2 \cdot [\alpha^3\beta^2\gamma^2]^2 \cdot [\alpha^3\delta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2].$$

$$R\{[\alpha^3\beta^2], [(\alpha\beta\gamma\delta)]\} = [\alpha^3\varepsilon^2, (\alpha\beta\gamma\delta)].$$

$$R\{[\alpha^2\beta^2\gamma^2], [(\alpha^2\beta)]\} = [(\alpha^2\beta), \alpha^2\beta^2\gamma^2]^2 \cdot [(\alpha^2\delta), \alpha^2\beta^2\gamma^2].$$

$$R\{[\alpha^2\beta^2\gamma^2], [(\alpha\beta\gamma\delta]\} = [\alpha^2\varepsilon^2\zeta^2, (\alpha\beta\gamma\delta)].$$

$$R\{[(\alpha^2\beta)], [(\alpha\beta\gamma\delta)]\} = [((\alpha\beta))]^{(n-3)(n-4)} \cdot [(\alpha^2\beta\gamma)]^2 \cdot [\alpha\beta\gamma\delta, (\alpha^2\varepsilon)].$$

III.

Die Gewichte der 24 Elementarfactoren, geordnet nach ihrer Ordnung in n.

(Die Grade gehen daraus durch Division mit $2(n-3)$ hervor).

1. $[\alpha^5]$. $10(n-3)(n-4)$.
2. $[(\alpha^3)]$. $6(n-2)(n-3)$.
3. $[\alpha^4\beta^2]$. $16(n-3)(n-4)(n-5)$.
4. $[\alpha^3\beta^3]$. $9(n-3)(n-4)(n-5)$.
5. $[\alpha^4, (\alpha^2\beta)]$. $12(n-2)(n-3)(n-4)$.
6. $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$. $14(n-2)(n-3)(n-4)$.
7. $[((\alpha\beta))]$. $(n-1)(n-2)(n-3)$.
8. $[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$. $12(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$.
9. $[\alpha^4, \alpha^2\beta^2\gamma^2]$. $8(n-3)(n-4)(n-5)(3n-11)$.
10. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$. $4(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$.
11. $[(\alpha^2\gamma), \alpha^3\beta^2]$. $20(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$.
12. $[(\alpha^2\beta\gamma)]$. $4(n-2)(n-3)^2(n-4)$.
13. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\beta)]$. $24(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$.
14. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]$. $\frac{4}{3}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$.
15. $[\alpha^3\delta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2]$. $8(n-3)(n-4)(n-5)(5n^2-38n+74)$.
16. $[(\alpha^2\delta), \alpha^2\beta^2\gamma^2]$. $16(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$.
17. $[\alpha^4, (\alpha\beta\gamma\delta)]$. $\frac{10}{3}(n-2)(n-3)^3(n-4)$.
18. $[(\alpha_i), (\alpha_i+\partial\alpha_i)]$. $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$.
19. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]$. $4(n-3)(n-4)(n-5)\cdot(4n^3-52n^2+228n-345)$.
20. $[\alpha^3\varepsilon^2, (\alpha\beta\gamma\delta)]$. $\frac{16}{3}(n-2)(n-3)^3(n-4)^2$.
21. $[(\alpha^2\varepsilon), (\alpha\beta\gamma\delta)]$. $2(n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)(n-5)$.
22. $[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]$. $\frac{1}{12}(n-2)(n-3)^2(n-4)^2(n-5)$.
23. $[\alpha^2\varepsilon^2\zeta^2, (\alpha\beta\gamma\delta)]$. $4(n-2)(n-3)^3(n-4)^2(n-5)$.
24. $[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]$. $\frac{1}{36}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\cdot(8n^3-41n^2+30n+111)$.

Clausthal, 1. April 1893.

Die Gruppen der Ordnungen p^3, pq^2, pqr, p^4.

Von

Otto Hölder in Tübingen.

Herr Cayley hat die Aufgabe gestellt*), alle möglichen Gruppen irgend einer gegebenen Ordnungszahl aufzufinden. Die Gruppe soll dabei ganz allgemein gedacht werden, ihre Operationen sind keine Buchstabenvertauschungen oder Rotationen oder Collineationen mehr, sondern lediglich Symbole, für welche ein Gesetz der Verknüpfung definirt ist mit Eigenschaften, die noch zur Sprache kommen werden. Holoedrisch isomorphe Gruppen gelten nicht als verschieden. Die genannte Aufgabe ist schon gelöst für die drei Typen von Ordnungszahlen: p, p^2 und pq, wobei p und q Primzahlen bedeuten. Die Gruppen p^{ter} Ordnung sind cyklisch, diejenigen von den Ordnungen p^2 und pq sind von Herrn Netto gebildet worden**). In der vorliegenden Arbeit gebe ich zum ersten Mal alle Gruppen von den Ordnungen p^3, pq^2, pqr, p^4, wobei hinwiederum, wie in der ganzen Untersuchung, p, q und r Primzahlen vorstellen. Um mein Verfahren an den einfachsten Fällen auseinanderzusetzen, schicke ich einen Abschnitt voraus, in welchem die Ordnungen p^2 und pq von Neuem behandelt sind. Der erste Ansatz stimmt im Wesentlichen mit Herrn Netto überein. Während aber die Methode von Herrn Netto darauf beruht, dass die gesuchten Gruppen durch Vertauschungen von p^2 beziehungsweise pq Buchstaben dargestellt werden können, sehe ich hier von Buchstabenvertauschungen ganz ab und begründe die Existenz der Gruppen durch eine eigenthümliche Betrachtungsweise. Diese Betrachtungsweise wird verallgemeinert in einem zweiten Abschnitt, der allgemeine Methoden der Gruppenbildung enthält, und in dem die Paragraphen 18 und 20 besonders hervorzuheben sind. Es liefern dann die Abschnitte drei und vier die Gruppen von den Ordnungen pq^2

*) American Journal of Mathematics, vol. I, p. 50.

**) Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra 1882, p. 133 ff.

beziehungsweise pqr, und der fünfte Abschnitt die von den beiden Ordnungen p^3 und p^4. Es ergiebt sich dabei eine grosse Mannigfaltigkeit von Formen; so existiren z. B. 15 Gruppen $p^{4\text{ter}}$ Ordnung, wenn p ungerade ist. Die sämmtlichen Resultate sind in einem Schlussparagraphen zusammengestellt; zur Darstellung der Gruppen sind dabei meist definirende Relationen im Sinne von Herrn Dyck benutzt. Aus diesen Relationen liessen sich noch manche Eigenschaften der Gruppen ableiten, doch ist darauf im Allgemeinen hier verzichtet worden.

Nach einem von Herrn Sylow und einem andern von mir aufgestellten Satz sind alle die in Frage stehenden Gruppen auflösbar*). Nun hat Herr C. Jordan ein Verfahren angegeben**), das alle diejenigen Gruppen von Vertauschungen einer gegebenen Zahl von Buchstaben liefert, die transitiv und auflösbar und in keiner umfassenderen, auflösbaren Gruppe von Vertauschungen derselben Buchstaben enthalten sind. Die Gruppen, die ich hier aufstelle, werden also, durch Buchstabenvertauschungen ausgedrückt, Untergruppen von den Gruppen des Herrn Jordan sein.

Erster Abschnitt.

Die Ordnungen p^2 und pq.

§ 1.

Ordnung p^2.

Wir denken uns eine Gruppe von p^2 Operationen. Es kann eine Operation von der Ordnung p^2 vorhanden sein, dann ist die Gruppe *cyklisch*. Im andern Fall hat jede von der Identität verschiedene Operation die Ordnung p. Es besitzt aber, wie Herr Sylow bewiesen hat***), jede Gruppe von der Ordnung p^n mindestens eine nichtidentische, ausgezeichnete (invariante) Operation. Eine solche sei im vorliegenden Fall Θ, und es bedeute Θ_1 irgend eine Operation, die keiner Potenz von Θ gleich ist. Nun müssen die Gleichungen

$$\Theta_1^p = 1, \quad \Theta_1^{-1}\Theta\Theta_1 = \Theta, \quad \Theta^p = 1 \tag{1}$$

bestehen, und die Formel

$$\Theta_1^{\alpha}\Theta^{\beta}$$

muss p^2 verschiedene Operationen liefern, wenn α und β von 0 bis $p-1$ gehen. Man erhält also auf diese Weise jede Operation der

*) Mathematische Annalen Bd. 5, p. 589 und Bd. 40, p. 61.

**) Traité des substitutions et des équations algébriques 1870, p. 386 ff.

***) Math. Annalen Bd. 5, p. 588.

Gruppe gerade ein Mal. Das Product von zwei beliebigen Operationen berechnet sich jetzt leicht. *Vermöge der Formeln* (1) *ist*

$$\Theta_1^{\alpha}\Theta^{\beta} \times \Theta_1^{\gamma}\Theta^{\delta} = \Theta_1^{r}\Theta^{s},$$

wo r und s die mod. p von 0 *bis* $p-1$ *genommenen Reste von* $\alpha+\gamma$ *und von* $\beta+\delta$ *bedeuten.*

Dadurch ist eine vollständige Beschreibung des Multiplicationsgesetzes gegeben, und diese Beschreibung kann auch als Definition der Gruppe angesehen werden.

Es existiren somit zwei Gruppen von der Ordnung p^2; *jede besteht aus Operationen, die alle mit einander vertauschbar sind.*

§ 2.

Vorbereitungen für die Auffindung der Gruppen pq^{ter} Ordnung.

Bei der Ordnungszahl pq will ich p als die grössere Primzahl betrachten. Nach einem Satz von Cauchy existirt eine Untergruppe von der Ordnung p. Weil aber keine höhere Potenz von p die Ordnung pq der Gruppe theilt, so folgt aus den Resultaten des Herrn Sylow*), dass die Zahl aller Untergruppen p^{ter} Ordnung die Form

$$1+kp$$

besitzen und zugleich ein Theiler von der Ordnung der ganzen Gruppe sein muss. Theiler von pq sind $1, q, p$ und pq. Bedenkt man noch, dass $p>q$ vorausgesetzt wurde, und somit q nicht von der Form $1+kp$ sein kann, dass ferner p und pq diese Form auch nicht haben, so kann nur der Theiler 1 in Frage kommen.

Eine Gruppe von der Ordnung pq *enthält* (*wenn* $p>q$) *eine einzige Untergruppe* p^{ter} *Ordnung.* Diese Untergruppe ist eine ausgezeichnete. Jede Operation von der Ordnung p ist in der genannten Untergruppe enthalten. Es sei T eine solche Operation. Ausserdem muss eine Operation S von der Ordnung q sich finden lassen. Wenn man jetzt T mit Hilfe von S transformirt, so erhält man

$$S^{-1}TS,$$

und diese Operation muss auch von der p^{ten} Ordnung und deshalb auch in jener Untergruppe enthalten sein. Die Ordnung der Untergruppe ist eine Primzahl, und somit jede Operation der Untergruppe eine Potenz von T.

Bedeuten also T *und* S *zwei irgendwie aus der Gesammtgruppe ausgewählte Operationen* p^{ter} *und* q^{ter} *Ordnung, so besteht die Gleichung*

$$S^{-1}TS = T^{a},$$

in der über den Exponenten a *zunächst nichts bekannt ist.*

*) Vergl. § 22 der vorliegenden Arbeit.

§ 3.

Bestimmung von a.

Die Zahl a kann bis auf einen gewissen Grad bestimmt werden. Aus der letzten Gleichung folgt:

$$S^{-2}TS^2 = S^{-1}T^aS = (S^{-1}TS)^a = (T^a)^a = T^{a^2},$$
$$S^{-3}TS^3 = S^{-1}(S^{-2}TS^2)S = S^{-1}T^{a^2}S = (S^{-1}TS)^{a^2} = T^{a^3}$$

und also allgemein:

$$S^{-\alpha}TS^{\alpha} = T^{a^{\alpha}}.$$

Setzt man hier $\alpha = q$, so ergiebt sich, weil S von der q^{ten} Ordnung ist,

$$T = T^{a^q}.$$

Es ist aber T von der p^{ten} Ordnung. *Somit besteht die Congruenz:*

(2) $$a^q \equiv 1 \bmod. p.$$

§ 4.

Multiplicationsgesetz für eine Gruppe von der Ordnung pq.

Aus den Ordnungen der Operationen S und T folgt, dass die Formel

$$S^{\alpha}T^{\beta}$$

für $\alpha = 0, 1, 2, \ldots q-1$ und $\beta = 0, 1, 2, \ldots p-1$ lauter von einander verschiedene Operationen ergiebt. Man erhält so jede Operation der Gruppe pq^{ter} Ordnung gerade ein Mal. Um das Product von zwei beliebigen Operationen $S^{\alpha}T^{\beta}$ und $S^{\gamma}T^{\delta}$ zu berechnen, schiebt man in der Reihe

$$S^{\alpha}T^{\beta}S^{\gamma}T^{\delta}$$

zwischen S^{α} und T^{β} die identische Operation ein und spaltet diese hernach in $S^{\gamma}S^{-\gamma}$. Man erhält so bei etwas anderer Zusammenfassung

$$S^{\alpha+\gamma}(S^{-\gamma}T^{\beta}S^{\gamma})T^{\delta}.$$

Nach § 3 ist aber

$$S^{-\gamma}TS^{\gamma} = T^{a^{\gamma}}$$

und somit

$$S^{-\gamma}T^{\beta}S^{\gamma} = (S^{-\gamma}TS^{\gamma})^{\beta} = T^{\beta a^{\gamma}}.$$

Es erhält also das gesuchte Product die Form

$$S^{\alpha+\gamma}T^{\beta a^{\gamma}+\delta},$$

und man kann hier die Exponenten von S und T auf die Reste herabdrücken, die sie bei der Division mit q beziehungsweise p ergeben.

Bedeutet hier a eine bestimmte Zahl, so liegt ein ganz bestimmtes Multiplicationsgesetz für die pq in der Formel

$$S^{\alpha}T^{\beta}$$

dargestellten Objecte vor. Nun darf man aber nicht vergessen, dass anfangs die Existenz der Gruppe vorausgesetzt wurde. Die Existenz einer Gruppe pq^{ter} Ordnung, nämlich der cyklischen, ist selbstverständlich. In diesem Fall ist $a \equiv 1 \bmod. p$. Dass noch andere Zahlen a vorkommen, freilich nur, wenn zwischen p und q eine gewisse arithmetische Beziehung besteht, liesse sich aus den Eigenschaften der metacyklischen Buchstabenvertauschungen folgern. Es soll jedoch ein anderes Verfahren benutzt werden, dass für die verwickelteren, später nicht zu vermeidenden Untersuchungen vorbildlich ist.

Ich fasse das eben gewonnene Multiplicationsgesetz als Definition auf. Dabei werden die Ausdrücke

$$S^\alpha T^\beta \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots q-1 \\ \beta = 0, 1, 2, \ldots p-1 \end{pmatrix}$$

nicht mehr als Producte von S^α und T^β angesehen, sondern lediglich als Zeichen, die dazu dienen sollen, pq *verschiedene* Objecte darzustellen. Für diese neuen Objecte kann nun ein Modus der Verknüpfung, eine Multiplication, in willkürlicher Weise festgesetzt werden. Zur Abkürzung möge nun $\{x\}$ den von 0 bis $q-1$ genommenen Rest der der Zahl x in Beziehung auf den Modul q, und (x) den von 0 bis $p-1$ genommenen Rest derselben Zahl für den Modul p bedeuten. *Ich bestimme nun, dass*

$$S^\alpha T^\beta \times S^\gamma T^\delta = S^{\{\alpha+\gamma\}} T^{(\beta\alpha^\gamma+\delta)} \tag{3}$$

sein soll. Wenn die Zahl a gewählt ist, so ist die hier definirte Multiplication eine völlig bestimmte. Es ist nun die Frage ob für diese Multiplication die Regeln der Gruppentheorie bestehen, und es folgt schon aus dem Resultat des 3ten Paragraphen, dass dies nur dann möglich ist, wenn die Zahl a einer Bedingung unterworfen wird.

§ 5.

Ueber die gruppentheoretischen Eigenschaften der Multiplication.

Wenn eine Reihe discreter Objecte gegeben ist, für welche eine Multiplication in der Art besteht, dass je zwei der Objecte in bestimmter Folge multiplicirt ein bestimmtes Object derselben Reihe ergeben, so muss, damit die Multiplication eine gruppentheoretische ist, noch zweierlei verlangt werden*):

1) dass das Associativgesetz besteht,
2) dass zwei verschiedene Objecte, wenn sie auf derselben Seite mit demselben Object multiplicirt werden, verschiedene Producte ergeben.

*) Vergl. Weber, diese Annalen Bd. 20, p. 302 und Frobenius, Journal für Mathematik Bd. 100, p. 180.

Wenn dabei die Zahl der Objecte endlich ist, so kann man leicht darthun, dass eine Identität existirt, und dass es zu jedem Object ein umgekehrtes giebt. Man kann dann auch stets die Objecte und ihre Verknüpfungen durch Buchstabenvertauschungen und deren Zusammensetzungen darstellen*), wesshalb auch die Objecte selbst als Operationen bezeichnet werden.

Um nun zu untersuchen, ob für die in § 4 definirte Multiplication (3) die Bedingung 1) besteht, setze man

$$[S^\alpha T^\beta \times S^\gamma T^\delta] \times S^\varepsilon T^\zeta = S^u T^v$$

und

$$S^\alpha T^\beta \times [S^\gamma T^\delta \times S^\varepsilon T^\zeta] = S^{u'} T^{v'}.$$

Man berechnet leicht aus der Definition des Productes, dass

$$u = \{\{\alpha + \gamma\} + \varepsilon\}, \quad v = \left((\beta a^\gamma + \delta)\, a^\varepsilon + \zeta\right),$$

$$u' = \{\alpha + \{\gamma + \varepsilon\}\}, \quad v' = \left(\beta a^{\{\gamma+\varepsilon\}} + (\delta a^\varepsilon + \zeta)\right).$$

Die Bedingung 1) besagt aber, dass $u = u'$ und $v = v'$ sein muss. Offenbar ist von selbst $u = u'$. Damit aber auch $v = v'$ wird, muss, wenn β von Null verschieden ist,

$$a^{\gamma+\varepsilon} \equiv a^{\{\gamma+\varepsilon\}} \bmod. p$$

sein. So oft nun $\gamma + \varepsilon \geqq q$ ist, hat man die Beziehung

$$\gamma + \varepsilon = \{\gamma + \varepsilon\} + q$$

und man kommt daher auf die Bedingung

$$a^{\{\gamma+\varepsilon\}} [a^q - 1] \equiv 0 \bmod. p. \tag{4}$$

Diese Bedingung ist stets erfüllt, wenn

$$a^q \equiv 1 \bmod. p.$$

Die einzige andere Art, die Bedingung (4) zu erfüllen, bestände darin, $a = 0$ zu setzen, wobei man aber dann das Symbol 0^0 als 0 interpretiren muss, was hier blosse Sache der Convention ist. Unter dieser Annahme liefert die Gleichung (3) ein singuläres Multiplicationsgesetz:

$$S^\alpha T^\beta \times S_\gamma T^\delta = S^{\{\alpha+\gamma\}} T^\delta,$$

für welches die associative Regel gilt.

Um nun das Bestehen der Bedingung 2) zu prüfen, hat man nachzusehen, ob aus

$$S^\alpha T^\beta \times S^\gamma T^\delta = S^\alpha T^\beta \times S^\varepsilon T^\zeta \tag{5}$$

folgt, dass

$$\gamma = \varepsilon, \qquad \delta = \zeta.$$

Die Bedingung (5) ist aber mit den Gleichungen

---

*) Cf. Cayley a. a. O., Frobenius und Stickelberger, Journal für Math. Bd. 86, p. 230 Anm. und Dyck, Math. Ann. Bd. 22, p. 84.

$$\{\alpha+\gamma\} = \{\alpha+\varepsilon\}, \qquad (\beta\alpha^\gamma+\delta) = (\beta\alpha^\varepsilon+\zeta)$$

gleichbedeutend, woraus man die Richtigkeit der Folgerung ersieht. Ferner hat man ebenso zu untersuchen, ob $\gamma = \varepsilon$ und $\delta = \zeta$ sein muss, wenn

$$S^\gamma T^\delta \times S^\alpha T^\beta = S^\varepsilon T^\zeta \times S^\alpha T^\beta$$

werden soll. Auch dies bestätigt sich, wenn a durch p nicht theilbar ist. Dagegen ist dies nicht der Fall für die genannte singuläre Multiplication.

Die in § 3 *aufgefundene Bedingung* (2) *ist also nothwendig und hinreichend dafür, dass die in* § 4 *definirte Multiplication eine gruppentheoretische ist.* Wenn a der Bedingung genügt, so liegt eine Gruppe pq^{ter} Ordnung vor. In dieser Gruppe ist $S^0 T^0$ die identische Operation, und die beiden Operationen

$$S^1 T^0 = A, \qquad S^0 T^1 = B,$$

aus denen alle Operationen der Gruppe durch Iteration und Combination abgeleitet werden können, genügen den Gleichungen

$$A^q = 1, \quad A^{-1} . B . A = B^a, \quad B^p = 1, \tag{6}$$

wie jetzt leicht durch Rechnung constatirt werden kann.

§ 6.

Definirende Relationen.

Es ist von Nutzen, das gewonnene Resultat an den von Herrn Dyck eingeführten Begriff der definirenden Relationen anzuknüpfen*). Dieser Begriff kann folgendermassen entwickelt werden. Man wähle eine Reihe von Zeichen $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$, die sogenannten erzeugenden Operationen, und denke sich alle möglichen Aggregate symbolischer Potenzen aus diesen Zeichen wie z. B.

$$A_2^\mu A_3^\nu A_3^\varrho A_4^\sigma \ldots A_1^\tau. \tag{7}$$

Dabei will ich annehmen, dass die Exponenten auch negativ und gleich Null sein dürfen. Zwischen diesen Aggregaten werden nun Aequivalenzen festgesetzt, die im Wesentlichen durch die Aussage beherrscht werden, dass man bestimmte von den Aggregaten als gleich ansehen will. Diese Aussage ist enthalten in dem System der definirenden Relationen:

$$F_1(A_i) = G_1(A_i), \; F_2(A_i) = G_2(A_i), \ldots F_h(A_i) = G_h(A_i).$$

Es bedeuten hier $F_1, F_2, \ldots$ und ebenso $G_1, G_2, \ldots$ gerade solche Aggregate von derselben Art wie (7), wobei das Aggregat auch aus

*) Mathematische Annalen, Bd. 20. p. 1 und Bd. 22, p. 70.

einer einzigen Potenz bestehen kann. Genauer dürfen nun mit einem beliebigen Aggregat folgende Aenderungen vorgenommen werden:

1) Zusammenziehung von zwei aufeinanderfolgenden Potenzen desselben Zeichens A_i in eine einzige Potenz durch Addition der Exponenten;
2) Spaltung einer Potenz in zwei Potenzen;
3) Einschaltung eines der Symbole $A_1^0, A_2^0, \ldots A_n^0$ zwischen zwei Potenzen des Aggregats oder Hinzufügung eines solchen Symbols zur Rechten oder Linken des Aggregats;
4) Weglassung einer nullten Potenz;
5) Ersetzen einer Reihe aufeinanderfolgender Potenzen, welche die eine Seite einer definirenden Relation ausmachen, durch die andere Seite der Relation.

Aggregate, welche durch eine Reihe solcher Schritte in einander übergeführt werden können, nennen wir äquivalent. Unmittelbar ergiebt sich nun eine Multiplication der Aggregate, indem man zwei Aggregate einfach in der Ordnung, in der ihr Product gewünscht wird, zusammenschreibt. Wesentlich ist, dass vermöge unserer Definitionen der Satz besteht: Aequivalentes in bestimmter Ordnung mit Aequivalentem multiplicirt giebt Aequivalentes. Fasst man jetzt alle unter einander äquivalenten Aggregate als Repräsentanten eines und desselben Objectes auf, so gelangt man zu einem bestimmten Multiplicationsgesetz dieser neuen Objecte, indem das Productobject davon unabhängig ist, welche von den die Factoren darstellenden Aggregaten zur Ausführung der Multiplication verwendet werden. Es ist auch leicht zu beweisen, dass die in § 5 erwähnten Bedingungen 1) und 2) bestehen. Es liegt also eine Gruppe vor; diese kann eine endliche oder eine unendliche Zahl von Operationen enthalten.

Nimmt man jetzt die definirenden Relationen an:

$$A_2 = A_2^0, \quad A_2^{-1} A_1 A_2 = A_1^a, \quad A_1^p = A_1^0, \tag{8}$$

so bestimmen diese jedenfalls eine Gruppe G, weil jedes System von Relationen eine Gruppe bestimmt. Man hat jetzt die aus den symbolischen Potenzen von A_1 und A_2 bestehenden Aggregate umzuwandeln; so wird z. B. $A_1^{-\alpha}$ durch die Uebergänge

$$A_1^{-\alpha}, \quad A_1^0 A_1^{-\alpha}, \quad A_1^p A_1^{-\alpha}, \quad A_1^{p-\alpha}$$

in $A_1^{p-\alpha}$ und ebenso $A_2^{-\beta}$ in $A_2^{q-\beta}$ umgewandelt. Wenn also in einem Aggregat negative Exponenten vorkommen, so können diese fortgeschafft werden. Nachher werden die symbolischen Potenzen so lang gespalten, bis nur noch erste Potenzen vorhanden sind. Steht nun in einem Aggregat ein A_2 zur Rechten eines A_1, so kann man den Bestandtheil $A_1 A_2$ des Aggregats folgendermassen umformen:

$$A_1 A_2, \quad A_2{}^0 A_1 A_2, \quad A_2 A_2{}^{-1} A_1 A_2, \quad A_2 A_1{}^a,$$

d. h. man kann das Zeichen A_2 über A_1 hinweg nach Links setzen, wenn man zugleich das betreffende A_1 durch $A_1{}^a$ ersetzt. Diese Potenz $A_1{}^a$ ist dann wieder zu spalten. Auf diese Weise kann man ein bestimmtes A_2 allmählig nach Links bringen. Nach und nach werden alle die Zeichen A_2 zur Linken geschafft, und schliesslich bringt man jedes Aggregat in eine der pq Formen

$$A_2{}^\alpha A_1{}^\beta \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots q-1 \\ \beta = 0, 1, 2, \ldots p-1 \end{pmatrix}.$$

Die Zahl der Operationen in der durch die Relationen (8) definirten Gruppe G ist also höchstens gleich pq. Die Auffindung der genauen Ordnung der Gruppe würde aber vom Standpunkt der definirenden Relationen seine Schwierigkeiten haben. Es würde sich zwar sofort ergeben (s. § 3), dass A_1 in

$$A_1{}^{a^q}$$

umgewandelt werden kann. Daraus folgt dann, wenn a^q der Eins mod. p incongruent ist, dass

$$A_1 \text{ äqu. } A_1{}^0,$$

und dass die Gruppe von der q^{ten} Ordnung ist. Wenn aber die Bedingung

$$a^q \equiv 1 \text{ mod. } p$$

besteht, so muss das Resultat des 5ten Paragraphen herbeigezogen werden. Wir haben daselbst eine Gruppe pq^{ter} Ordnung vollständig hergestellt, die mit G_0 bezeichnet werden soll. Die sämmtlichen Operationen dieser Gruppe werden aus den in ihr enthaltenen Operationen A und B durch Iteration und Combination erzeugt, und A und B befriedigen die Gleichungen (6). Nun denke man sich alle möglichen aus den Potenzen von A und B gebildeten Aggregate, die Aggregate I — sie stellen auf unendlich vielfache Weise die Operationen von G_0 dar — und dazu alle die aus den symbolischen Potenzen von A_1 und A_2 gebildeten Aggregate II; jedem Aggregat I wird dasjenige Aggregat II zugeordnet, das in A_1 und A_2 gerade so gebildet ist wie das erstere in resp. B und A. Da nun die Gleichungen (6), denen A und B genügen, dieselbe Form besitzen, wie die definirenden Relationen (8) der Gruppe G, so müssen zwei Aggregate I nach ihrer Bedeutung gleich sein, so oft die beiden entsprechenden Aggregate II in einander übergeführt werden können, d. h. äquivalent sind. Es wäre noch denkbar, dass zwei nichtäquivalenten Aggregaten II zwei gleiche Aggregate I entsprächen. Dann aber müsste die Ordnung der Gruppe G_0 kleiner sein als die der Gruppe G, was nicht der Fall ist. Zwischen den Aggregaten I und II findet also hinsichtlich der

Gleichheit und Ungleichheit völliges Entsprechen statt, und es setzen sich auch die ersteren gerade so zusammen wie die letzteren. Es sind somit die Gruppen G und G_0 holoedrisch isomorph in der Weise, dass den Operationen A_1 und A_2 die Operationen B und A entsprechen.

Die gewonnenen Resultate können jetzt so formulirt werden: *Die Relationen* (8) *stellen als definirende im Sinne von Herrn Dyck eine Gruppe pq^{ter} Ordnung dar, wenn*

$$a^q \equiv 1 \bmod. p,$$

andernfalls eine Gruppe q^{ter} Ordnung. Es ergeben sich aus diesen Formeln alle Gruppen der Ordnung pq, die existiren.

Durch Verallgemeinerung der auf die Relationen (8) angewandten Betrachtungsweise ergeben sich noch einige Resultate, die später gebraucht werden. Ich nehme jetzt die definirenden Relationen in der Form an:

$$A_i^{m_i} = F_i(A_1, A_2, \ldots A_{i-1}), \quad A_i^{-1} A_k A_i = G_{ik}(A_1, A_2, \ldots A_{i-1});$$
$$\binom{k = 1, 2, \ldots i-1}{i = 1, 2, \ldots n}.$$

Dabei mögen $m_1, m_2, \ldots m_n$ positive ganze Zahlen sein, während ich in den mit F_i und mit G_{ik} bezeichneten Aggregaten auch negative Exponenten zulassen will.*) Wenn Relationen von dieser Form vorliegen, so sage ich, dass $A_1, A_2, \ldots A_n$ in der Ordnung, in der sie eben genannt sind, eine *Scala* bilden. Bezeichnet man mit F_i^{-1} das Aggregat, das aus F_i hervorgeht, wenn die Potenzen in umgekehrter Ordnung gesetzt und ihre Exponenten mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen werden, so ist leicht abzuleiten, dass

$$A_i^{-1} \text{ äqu. } F_i^{-1} F_i A_i^{-1} \text{ äqu. } F_i^{-1} A_i^{m_i - 1} \tag{9}$$

und

$$A_i^{-1} A_k^{-1} A_i \text{ äqu. } A_i^{-1} A_k^{-1} A_i G_{ik} G_{ik}^{-1} \text{ äqu. } G_{ik}^{-1}$$

ist. Es ist deshalb für positive und negative μ

$$A^{-1} A_k^{\mu} A_i \text{ äqu. } G_{ik}^{\mu}$$

und

$$A_k^{\mu} A_i \text{ äqu. } A_i G_{ik}^{\mu}. \tag{10}$$

Nun sei ein Aggregat symbolischer Potenzen der $A_1, A_2, \ldots A_n$ gegeben. Man kann in diesem Aggregat zunächst vermöge der Aequivalenz (9) die Potenzen von A_n fortschaffen, die negative Exponenten besitzen. Dann lassen sich die einzelnen Symbole A_n vermöge der Aequivalenz (10) auf die linke Seite des Aggregats bringen, und man erhält dadurch einen Ausdruck von der Form

*) Dem Index $i = 1$ entspricht in dem aufgestellten System die Gleichung $A_1^{m_1} = 1$.

$$A_n^{\alpha}\Pi(A_1, A_2, \ldots A_{n-1}),$$

wobei

$$0 \leqq \alpha \leqq m_n - 1$$

ist. Nachdem dies geschehen ist, kann man ebenso das Aggregat Π in die Form

$$A_{n-1}^{\beta}\Pi_1(A_1, A_2, \ldots A_{n-2})$$

umwandeln, so dass zugleich

$$0 \leqq \beta \leqq m_{n-1} - 1$$

ist, u. s. w. Schliesslich ergiebt sich, dass die Ordnung der durch die Relationen definirten Gruppe höchstens gleich

$$m_n m_{n-1} \ldots m_2 m_1$$

sein kann.

Aus der im speciellen Fall gebrauchten Schlussweise folgt noch der Satz: *Wenn irgendwelche in den Zeichen $A_1, A_2, \ldots A_n$ geschriebenen Relationen eine Gruppe G definiren, deren Ordnung nicht grösser als m ist, wenn ferner die einer Gruppe G_0 von der m^{ten} Ordnung angehörigen Operationen $B_1, B_2, \ldots B_n$ jenen Relationen genügen, und alle Operationen von G_0 aus $B_1, B_2, \ldots B_n$ durch Iteration und Combination erzeugt werden können, so ist G mit G_0 holoedrisch isomorph, und zwar entsprechen dabei die Operationen $A_1, A_2, \ldots A_n$ von G den Operationen $B_1, B_2, \ldots B_n$ von G_0.**)

Dieser Satz hat auch dann Bedeutung, wenn G und G_0 dieselbe Gruppe bedeuten. Man hat sich in diesem Fall eine einzige Gruppe von einer endlichen Zahl von Operationen zu denken, die durch definirende Relationen gegeben ist. Die Buchstaben $B_1, B_2, \ldots B_n$ bedeuten nun Producte von Potenzen der erzeugenden Operationen $A_1, A_2, \ldots A_n$ der Gruppe. Aus $B_1, B_2, \ldots B_n$ muss auch die ganze Gruppe erzeugt werden können, und es müssen diese Producte, wenn sie an Stelle von $A_1, A_2, \ldots A_n$ in die definirenden Relationen eingesetzt werden, richtige Gleichungen ergeben, d. h. Gleichungen, die vermöge der ursprünglichen definirenden Relationen identisch bestehen. Unter diesen Umständen ergiebt sich eine isomorphe Beziehung der Gruppe auf sich sich selbst,**) wobei den Operationen $A_1, A_2, \ldots A_n$ die Operationen $B_1, B_2, \ldots B_n$ entsprechen.

---

*) Wenn über die Ordnung von G nichts bekannt ist, im Uebrigen aber die Voraussetzungen dieselben bleiben, so kann gefolgert werden, dass G und G_0 entweder holoedrisch oder meroedrisch isomorph sind. Vergl. Dyck, Math. Ann. Bd. 20, p. 11 ff.

**) Herr Dyck definirt mit Hilfe der Relationen einen Isomorphismus einer Gruppe in sich auf Seite 10.

§ 7.

Anzahl der Gruppen pq^{ter} Ordnung.

Die letzten, an die definirenden Relationen anschliessenden Bemerkungen können für die Anzahlbestimmung der Gruppen pq^{ter} Ordnung verwendet werden. Man erhält jedenfalls alle diese Gruppen, wenn man in die definirenden Relationen (8) alle im Rahmen $1, 2, \ldots p-1$ gelegenen Zahlen setzt, die der Congruenz (2) genügen. Setzt man $a = 1$, so hat die Operation

$$A_2 A_1$$

die Ordnung pq, und es ergiebt sich eine *cyklische* Gruppe. Lösungen, die von 1 verschieden sind, hat die Congruenz (2) nur, wenn q Theiler von $p-1$ ist. Unter dieser Annahme sei ϱ eine bestimmte Zahl, die mod. p zum Exponenten q gehört.*) Es sind dann die übrigen Lösungen der Congruenz in der Formel

$$a \equiv \varrho^b \qquad (b = 1, 2, \ldots q-1)$$

enthalten. Jetzt bezeichne G die durch die Relationen (8) und G_0 die durch die Relationen

$$S^q = 1, \quad S^{-1} T S = T^\varrho, \quad T^p = 1 \tag{11}$$

definirte Gruppe. Setzt man nun

$$S_1 = S^b,$$

so findet man, dass die Gleichungen

$$S_1^q = 1, \quad S_1^{-1} T S_1 = T^{\varrho^b}, \quad T^p = 1$$

bestehen. Es genügen also die Operationen S_1 und T aus der Gruppe G_0, welche offenbar aus S_1 und T wiedererzeugt wird, den Relationen (8). Somit sind die Gruppen G_0 und G holoedrisch isomorph.

Wenn also $p-1$ durch q nicht theilbar ist $(p > q)$, so ist die einzige Gruppe pq^{ter} Ordnung die cyklische. Im andern Fall giebt es in der genannten Ordnung noch eine zweite Gruppe; diese wird durch die Relationen (8) *definirt, wobei a eine beliebige Zahl bedeutet, die mod. p zum Exponenten q gehört.*

*) Gauss, Disquisitiones arithmeticae art. 52 ff.

Zweiter Abschnitt.

Allgemeine Hilfsmittel für den Aufbau einer Gruppe.

§ 8.

Isomorphismus einer Gruppe in sich.

Bei der Bildung der Gruppen von der Ordnung pq war die Kenntniss der ausgezeichneten Untergruppe p^{ter} Ordnung von Wichtigkeit. Aehnlich sollen auch später die Gruppen, welche hier gesucht werden, aus ausgezeichneten Untergruppen gebildet werden. Es bedeute jetzt G irgend eine Gruppe und Γ eine in ihr ausgezeichnete Untergruppe, deren Operationen mit

$$T_0, T_1, \ldots T_{n-1}$$

bezeichnet werden. Wenn man nun diese Operationen mit Hilfe einer beliebigen Operation S der Gruppe G transformirt, so erhält man dieselben Operationen T nur in anderer Reihenfolge. Die Substitution

$$\begin{pmatrix} T_0, & T_1, & \ldots T_{n-1} \\ S^{-1}T_0S, & S^{-1}T_1S, & \ldots S^{-1}T_{n-1}S \end{pmatrix}$$

der Buchstaben T, die man auf diese Weise erhält, hat eine besondere Eigenschaft: es steht nämlich das Product aus zwei Operationen der oberen Reihe der Substitution über dem Product der entsprechenden Operationen der unteren Reihe, wobei natürlich beide Producte auf dieselbe Art zu bilden sind. Die vorliegende Substitution stellt also einen Isomorphismus der Gruppe Γ in sich vor. Durch jede Operation der Gruppe G, mag sie nun in Γ enthalten sein oder nicht, wird die Gruppe Γ isomorph in sich transformirt.

Wir studiren jetzt eine Gruppe Γ, die aus den Operationen $T_0, T_1, \ldots T_{n-1}$ besteht, ohne Rücksicht auf eine umfassendere Gruppe G. Die Substitution

$$J = \begin{pmatrix} T_0, & T_1, & T_2, & \ldots T_{n-1} \\ T_{\omega(0)}, & T_{\omega(1)}, & T_{\omega(2)}, & \ldots T_{\omega(n-1)} \end{pmatrix}$$

stellt einen Isomorphismus der Gruppe Γ in sich dar, wenn für je drei Indices α, β γ, für welche

$$T_\alpha \cdot T_\beta = T_\gamma$$

ist, auch die Gleichung

$$T_{\omega(\alpha)} \cdot T_{\omega(\beta)} = T_{\omega(\gamma)}$$

gilt. Da es mehrere solcher Substitutionen geben kann, dürfen wir von einer Mehrzahl von Isomorphismen reden. Wenn man zwei Substitutionen von dieser besonderen Art zusammensetzt, so erhält man

offenbar wieder eine Substitution von derselben Art. Man kann also die Isomorphismen multipliciren.

Um für diese Multiplication auch die Bezeichnung festzustellen, sei ein zweiter Isomorphismus

$$J' = \begin{pmatrix} T_0, & T_1, & T_2, & \dots & T_{n-1} \\ T_{\omega'(0)}, & T_{\omega'(1)}, & T_{\omega'(2)}, & \dots & T_{\omega'(n-1)} \end{pmatrix},$$

und wir setzen dann

$$JJ' = \begin{pmatrix} T_0 & T_1 & \dots & T_{n-1} \\ T_{\omega'(\omega(0))} & T_{\omega'(\omega(1))} & \dots & T_{\omega'(\omega(n-1))} \end{pmatrix}.$$

Man erkennt die Gültigkeit des folgenden Satzes: *Die sämmtlichen möglichen Isomorphismen einer Gruppe* Γ *in sich bilden selbst eine Gruppe.* Dabei ist der identische Isomorphismus, bei dem jede Operation sich selbst zugeordnet ist, mitzurechnen.

Es müssen jetzt zwei Arten von Isomorphismen der Gruppe Γ in sich unterschieden werden. Wenn ein Isomorphismus dadurch abgeleitet werden kann, dass man die Gruppe Γ mit einer ihrer eigenen Operationen transformirt, so soll derselbe *cogredient* heissen; im andern Fall hat man einen *contragredienten* Isomorphismus.*)

Betrachten wir z. B. wieder die Gruppe p^{ter} Ordnung mit den Operationen

$$1, T, T^2, \dots T^{p-1},$$

die in der nichtcyklischen Gruppe G von der Ordnung pq ausgezeichnet enthalten ist. Hier existirt kein cogredienter Isomorphismus, ausser dem identischen. Transformirt man aber mittelst der in der Gruppe G enthaltenen Operation S von der q^{ten} Ordnung, so entsteht der contragrediente Isomorphismus

$$J = \begin{pmatrix} T^\alpha \\ T^{a\alpha} \end{pmatrix} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \dots p-1).$$

Transformirt man ferner mit der Operation S^μ, so entsteht der Isomorphismus J^μ. Deshalb muss auch J^q gleich dem identischen Isomorphismus sein, was wieder auf die Bedingung (2) hinauskommt.

---

*) Mit den Begriffen „cogredient" und „contragredient" habe ich eine Unterscheidung verallgemeinert, die Herr F. Klein bei der Ikosaedergruppe von formentheoretischen Gesichtspunkten aus gewonnen hat. Man vergl. Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade, 1884, p. 232. Die Gruppe der cogredienten Isomorphismen ist stets eine ausgezeichnete Untergruppe von der Gruppe aller Isomorphismen.

§ 9.

Gruppe mit ausgezeichneter Untergruppe.

Ich denke mir eine Gruppe G von der Ordnung $m \cdot n$ gegeben, welche wiederum die ausgezeichnete aus den Operationen $T_0, T_1, \ldots T_{n-1}$ bestehende Untergruppe Γ enthalten soll; T_0 soll jetzt die identische Operation bedeuten. Man kann m Operationen $S_0, S_1, \ldots S_{m-1}$ der Gruppe G so auswählen, dass alle Operationen, dieser Gruppe in der Tabelle

$$(12) \qquad \begin{array}{llll} S_0T_0, & S_0T_1, & \ldots & S_0T_{n-1}, \\ S_1T_0, & S_1T_1, & \ldots & S_1T_{n-1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ S_{m-1}T_0, & S_{m-1}T_1, & \ldots & S_{m-1}T_{n-1} \end{array}$$

enthalten sind. Dabei soll auch S_0 die identische Operation bezeichnen, so dass diese gleichzeitig durch drei Zeichen

$$T_0,\ S_0,\ S_0T_0$$

vorgestellt wird.

Weil nun die Operationen T eine Gruppe bilden, so hat man

$$(13) \qquad T_\alpha T_\beta = T_{\chi(\alpha,\beta)} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots n-1).$$

Ueber die Abhängigkeit des Index χ von den Indices α und β lässt sich Einiges ermitteln. So folgt aus dem Associativgesetz, dass die Function χ der Bedingung

$$\chi\big(\chi(\alpha, \beta), \gamma\big) = \chi\big(\alpha, \chi(\beta, \gamma)\big)$$

genügt. Ich bemerke insbesondere, dass

$$(14) \qquad \begin{array}{l} \chi(\alpha, 0) = \alpha, \\ \chi(0, \beta) = \beta \end{array}$$

ist, weil T_0 die Identität bezeichnen sollte.

Die Tabelle (12) enthält jede Operation der Gruppe G, also auch das Product von irgend zweien der Operationen S. Es ist demnach

$$(15) \qquad S_a S_b = S_{\varphi(a,b)} T_{\psi(a,b)} \qquad (a, b = 0, 1, 2, \ldots m-1).$$

Setzt man das eine Mal $a = 0$, das andere Mal $b = 0$, so ergiebt sich noch

$$(16) \quad \varphi(0, b) = b, \quad \psi(0, b) = 0; \quad \varphi(a, 0) = a, \quad \psi(a, 0) = 0.$$

Daraus, dass die Gruppe Γ in der Gruppe G ausgezeichnet enthalten sein soll, kann eine weitere Folgerung gezogen werden. Zur Abkürzung mögen die Horizontalreihen der Tabelle (12) von der ersten bis zur letzten mit $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots \Sigma_{m-1}$ bezeichnet werden. Multiplicirt man nun irgend eine Operation der Reihe Σ_a auf der rechten Seite mit irgend einer Operation der Reihe Σ_b, so entsteht immer eine

Operation der Horizontalreihe $\Sigma_{\varphi(a,b)}$*). Die Reihe, in welcher das Product seinen Platz bekommt, ist also völlig bestimmt durch die Reihe, aus welcher der erste Factor und die Reihe, aus welcher der zweite Factor gewählt werden soll. Man kann jetzt den Sachverhalt kurz so ausdrücken: die Reihe $\Sigma_{\varphi(a,b)}$ entsteht durch Zusammensetzung oder Multiplication der Reihen Σ_a und Σ_b, wobei Σ_a als erster Factor aufzufassen ist. Die gemeinsamen Eigenschaften aller gruppentheoretischen Multiplicationen, welche für die Operationen der Gruppe G giltig sind, übertragen sich nun auf die Multiplication der Reihen Σ. Ich will das Resultat folgendermassen ausdrücken. *Man führe m Symbole*

$$\Sigma_0,\ \Sigma_1, \ldots \Sigma_{m-1}$$

ein und setze

$$\Sigma_a \,.\, \Sigma_b = \Sigma_{\varphi(a,b)}, \tag{17}$$

so bilden diese Symbole eine Gruppe. Diese Aussage bedingt gewisse Eigenschaften der Function $\varphi(a, b)$.

Transformirt man die Gruppe Γ mit Hilfe der Operation S_a, so erhält man den Isomorphismus

$$\begin{pmatrix} T_\alpha \\ S_a^{-1} T_\alpha S_a \end{pmatrix} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

der Gruppe Γ in sich. Wir setzen zur Abkürzung

$$S_a^{-1} T_\alpha S_a = T_{\omega(\alpha,a)},$$

dann ist

$$T_\alpha S_a = S_a T_{\omega(\alpha,a)}; \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots n-1 \\ a = 0, 1, 2, \ldots m-1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

und es ergiebt sich noch, dass

$$\begin{aligned} \omega(\alpha, 0) &= \alpha, \\ \omega(0, a) &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Bezeichnet man die durch Transformation mit S_a, S_b, $S_{\varphi(a,b)}$, $T_{\psi(a,b)}$ entstehenden Isomorphismen der Gruppe Γ in sich mit J_a, J_b, $J_{\varphi(a,b)}$ $C_{\psi(a,b)}$, so werden die Isomorphismen $J_a \times J_b$ und $J_{\varphi(a,b)} \times C_{\psi(a,b)}$, wie leicht zu sehen ist, durch Transformation mit den Producten $S_a S_b$ und $S_{\varphi(a,b)} T_{\psi(a,b)}$ entstehen. Im Hinblick auf die Gleichung (15) hat man also auch

$$J_a J_b = J_{\varphi(a,b)}\, C_{\psi(a,b)}. \tag{20}$$

Von diesen Isomorphismen ist jedenfalls

$$C_{\psi(a,b)}$$

cogredient.

*) Vergl. z. B. Mathematische Annalen Bd. 34, p. 31.

§ 10.

Ein besonderer Fall.

Die Gruppe der Operationen Σ, deren Multiplicationsgesetz durch die Function φ charakterisirt wird (Vergl. (17)), ist durch die Gruppe G und durch die in G ausgezeichnete Untergruppe Γ völlig bestimmt und möge mit $G \mid \Gamma$ bezeichnet werden.*) Ich will nun den Fall noch besonders betrachten, dass $G \mid \Gamma$ *eine cyklische Gruppe* ist. Man kann in diesem Fall die Bezeichnung der Operationen S und damit die Vertheilung der Indices auf die Symbole Σ so wählen, dass

$$\Sigma_a = \Sigma_1^a \quad (a = 0, 1, 2, \ldots m-1), \quad \Sigma_1^m = \Sigma_0. \tag{21}$$

Da die Symbole Σ im Grunde nur die Horizontalreihen der Tabelle (12) darstellen, so können die Gleichungen (21) auch so ausgedrückt werden: die a^{te} Potenz irgend einer Operation aus der zweiten Reihe der Tabelle ist eine Operation der Reihe Σ_a, d. h. der $a+1^{ten}$ Reihe, und die m^{te} Potenz jener Operation findet sich in der ersten Reihe. Daraus fliessen die Formeln

$$S_1^a = S_a T_{\lambda(a)} \quad (a = 0, 1, 2, \ldots m-1), \quad S_1^m = S_0 T_\varkappa = T_\varkappa.$$

Statt der Operationen $S_0, S_1, S_2, \ldots S_{m-1}$ kann man jetzt die Operationen

$$S_0, \; S_1, \; S_1^2, \ldots S_1^{m-1}$$

einführen. Bezeichnet man nunmehr diese letzteren mit

$$S_0, \; S_1, \; S_2, \ldots S_{m-1},$$

so erhält man statt der Gleichungen (15) die folgenden

$$\begin{aligned} S_a S_b &= S_{a+b} && (a+b < m), \\ S_a S_b &= S_{a+b-m} T_\varkappa && (a+b \geqq m); \end{aligned} \tag{22}$$

dabei gehen a und b wieder von 0 bis $m-1$.

Aus der Gleichung

$$S_1^m = T_\varkappa$$

ergiebt sich noch

$$S_1^{-1} T_\varkappa S_1 = T_\varkappa, \tag{23}$$

d. h. die Operationen S_1 und $T_\varkappa$ sind vertauschbar.

Bezeichnet man mit

$$J_0, \; J_1, \; J_2, \ldots J_{m-1}, \; C_\varkappa$$

die Isomorphismen der Gruppe Γ in sich, die durch Transformation mit

$$S_0, \; S_1, \; S_2, \ldots S_{m-1}, \; T_\varkappa$$

*) Vgl. Jordan, Bulletin de la société mathématique de France, T. I 1873, p. 46, wo diese Gruppe bereits auftritt, während ich sie im 34ten Band dieser Annalen von Neuem aufgestellt habe.

entstehen, so folgen noch die Gleichungen

(24) $\qquad J_a = J_1^a \quad (a = 0, 1, 2, \ldots m-1), \quad J_1^m = C_x.$

Die m^{te} Potenz des Isomorphismus J_1 ist also cogredient und zwar gleich dem Isomorphismus, der durch Transformation der Gruppe Γ mit der in ihr enthaltenen Operation T_x entspringt.

§ 11.

Definirende Relationen der Gruppe G. Umkehrung.

Ich kehre zum allgemeinen Fall zurück. Die Gleichungen (13), (15) und (18), die wir aus der Gruppe G erhalten haben, können nun als definirende Relationen dieser Gruppe angesehen werden. Um ein Aggregat symbolischer Potenzen der Zeichen

$$T_0, T_1, \ldots T_{n-1}, S_0, S_1, \ldots S_{m-1}$$

umzuwandeln, nehmen wir die Exponenten zunächst als positiv an. Nachdem die Potenzen in einfache Zeichen gespalten sind, kann man das Aggregat durch blosse Ausführung einer Reihe der unter 5) in § 6 genannten Aenderungen in die Form

$$S_c T_\gamma \qquad \begin{pmatrix} c = 0, 1, 2, \ldots m-1 \\ \gamma = 0, 1, 2, \ldots n-1 \end{pmatrix}$$

bringen. Es ergeben sich also $m \,.\, n$ reducirte Formen der Aggregate. Wenn man die Glieder Reihe

$$S_a, S_a^2, S_a^3, \ldots$$

reducirt, so kann man nicht immer Verschiedenes erhalten, und man wird deshalb eine Aequivalenz finden:

$$S_a^k \text{ äqu. } S_a^l,$$

wobei l positiv, und $k > l$ ist. Daraus aber ergiebt sich, auch für ein negatives μ, die Umwandlung:

$$S_a^\mu, S_a^{\mu-l} S_a^l, \quad S_a^{\mu-l} S_a^k, S_a^{\mu+k-l}.$$

Wenn jetzt ein beliebiges Aggregat umgewandelt werden soll, in dem auch negative Exponenten auftreten, so kann man offenbar die negativen Exponenten wegschaffen. Schliesslich kommt das Aggregat wieder auf eine jener $m \,.\, n$ reducirten Formen. Da nun die Gruppe G als von der $m\,n^{ten}$ Ordnung gegeben war, so kann die durch (13), (15), (18) definirte Gruppe auch nicht von niedrigerer Ordnung sein und muss mit G übereinstimmen (Vergl. § 6).

Wir bemerken noch, dass die Gleichungen

$$T_0 T_\alpha = T_\alpha, \qquad S_0 S_\alpha = S_\alpha T_0$$

unter den definirenden Relationen sind; es ergeben sich daher

$$T_0,\ S_0,\ T_\alpha^0,\ S_\alpha^0$$

als äquivalent.

Bis jetzt war G als gegeben gedacht. Wir kehren jetzt die Betrachtung um, indem wir die Functionen

$$\varphi,\ \chi,\ \psi,\ \omega$$

annehmen und die Gruppe so herzustellen suchen.*)

§ 12.

Aufstellung eines Multiplicationsgesetzes.

Als die Gruppe G noch gegeben war, und die Zeichen S und T die früher erwähnten Operationen dieser Gruppe bedeuteten, bestanden die Gleichungen (13), (15), (18), und diese Gleichungen ergeben

$$(S_a T_\alpha) \times (S_b T_\beta) = S_{\varphi(a,b)}\, T_{\psi(a,b)}\, T_{\omega(a,b)}\, T_\beta .$$

Jetzt, da wir die Gruppe machen wollen, stellen wir uns ganz auf den Standpunkt von § 4 und § 5 und lassen vorläufig die definirenden Relationen aus dem Spiel. Wir betrachten die Ausdrücke

$$S_a T_\alpha \qquad \begin{pmatrix} a = 0, 1, 2, \ldots m-1 \\ \alpha = 0, 1, 2, \ldots n-1 \end{pmatrix}$$

nicht mehr als Producte, sondern als willkürliche Zeichen, die dazu dienen sollen $m \,.\, n$ *verschiedene* Objecte zu bezeichnen. Um nun zu einer Multiplication dieser Objecte zu gelangen, denken wir uns eine Gruppe von n Operationen $\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots \mathfrak{T}_{n-1}$ schon vorliegend. Für diese Operationen soll die Formel

$$\mathfrak{T}_\alpha \mathfrak{T}_\beta = \mathfrak{T}_{\chi(\alpha,\beta)} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

gelten, und $\mathfrak{T}_0$ soll die identische unter diesen Operationen sein; es bestehen dann auch von selbst die Gleichungen (14):

I. $$\chi(\alpha, 0) = \chi(0, \alpha) = \alpha .$$

Das neue Multiplicationsgesetz für die $m \,.\, n$ Objecte definire man jetzt durch die Formel

(25) $$S_a T_\alpha \times S_b T_\beta = S_{\varphi(a,b)}\, T_r ,$$

in welcher der Index r gemäss der Bedingung

(26) $$\mathfrak{T}_r = \mathfrak{T}_{\psi(a,b)}\, \mathfrak{T}_{\omega(a,b)}\, \mathfrak{T}_\beta$$

von a, α, b und β abhängt. Dabei möge für die Functionen φ, ψ, ω vorerst nur festgesetzt werden, dass die Gleichungen (16) und (19) gelten:

II. $$\varphi(a, 0) = \varphi(0, a) = a, \qquad \psi(a, 0) = \psi(0, a) = 0,$$

III. $$\omega(\alpha, 0) = \alpha, \qquad \omega(0, a) = 0.$$

*) Dies ist die Aufgabe, die ich im 34ten Bande der Math. Annalen auf S. 33 bereits formulirt habe.

Die aufgestellte Multiplication ist eine völlig bestimmte, und es kann jetzt gefragt werden, ob sie eine gruppentheoretische ist. Man findet leicht, dass nach den gemachten Festsetzungen

$$S_0 T_\alpha \times S_0 T_\beta = S_0 T_{\chi(\alpha,\beta)}$$

ist. Es bilden also jedenfalls die Symbole $S_0 T_\alpha$ unter sich eine Gruppe. Ich will diese Gruppe, welche mit der gegebenen Gruppe der Operationen $\mathfrak{T}$ holoedrisch isomorph ist, mit Γ und das Zeichen $S_0 T_\alpha$ kurz durch T_α bezeichnen.

§ 13.

Bezeichnungen und vorbereitende Gleichungen.

Das Associativgesetz und die Bedingung 2) des fünften Paragraphen werden für die definirte Multiplication nicht erfüllt sein, wenn die Functionen φ, ψ, ω nicht weiteren Beschränkungen unterworfen werden. Es sind ja im 9ten Paragraphen noch einige Eigenschaften dieser Functionen aufgefunden worden.

In erster Linie sollte die Substitution

$$\begin{pmatrix} T_\alpha \\ T_{\omega(\alpha,a)} \end{pmatrix} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots n-1) \tag{27}$$

stets einen Isomorphismus der Gruppe Γ in sich darstellen. Wir nehmen an, die Function ω sei dieser Bedingung gemäss bestimmt.

Ich will die Operation $T_{\omega(\alpha,a)}$ jetzt noch anders bezeichnen und

$$T_{\omega(\alpha,a)} = [S_a^{-1} T_\alpha S_a]$$

setzen. Dabei ist zu beachten, dass die Gruppe, welcher das Zeichen S_a angehören soll, erst nachgewiesen werden muss. Die umgekehrte Operation zu S_a ist also noch nicht definirt, und $[S_a^{-1} T_\alpha S_a]$ darf absolut nicht als Product von drei Factoren aufgefasst werden. Es soll nur

$$[S_a^{-1} T_\alpha S_a]$$

ein Ausdruck sein für das von den zwei Symbolen T_α und S_a abhängige Zeichen $T_{\omega(\alpha,a)}$. Diese Ausdrucksweise will ich noch verallgemeinern, so dass überhaupt dem Zeichen

$$[U^{-1} T_\alpha U]$$

eine bestimmte Bedeutung zukommt. Ist nämlich

$$U = S_b T_\beta,$$

so setze ich durch Definition

$$[U^{-1} T_\alpha U] = T_\beta^{-1} \times [S_b^{-1} T_\alpha S_b] \times T_\beta. \tag{28}$$

Der Umstand, dass die Substitution (27) einen Isomorphismus darstellt, kann mit Rücksicht auf die neue Bezeichnung in der Formel

$$[S_a^{-1} T_\alpha S_a] \times [S_a^{-1} T_\beta S_a] = [S_a^{-1} (T_\alpha \times T_\beta) S_a] \tag{29}$$

ausgedrückt werden. Aus der Formel (28) folgt noch

$$[U^{-1} T_\alpha U] \times [U^{-1} T_\gamma U] = T_\beta^{-1} \times [S_b^{-1} T_\alpha S_b] \times T_\beta \times T_\beta^{-1} \times [S_b^{-1} T_\gamma S_b] \times T_\beta,$$

oder, da für die Factoren rechts das Associativgesetz gilt, wenn noch auf (29) Rücksicht genommen wird,

$$[U^{-1} T_\alpha U] \times [U^{-1} T_\beta U] = T_\beta^{-1} \times [S_b^{-1} (T_\alpha \times T_\gamma) S_b] \times T_\beta = [U^{-1} (T_\alpha \times T_\gamma) U] \text{ (Vergl. (28)).} \tag{30}$$

Also drückt auch die Formel

$$\begin{pmatrix} T_\alpha \\ [U^{-1} T_\alpha U] \end{pmatrix} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

einen Isomorphismus der Gruppe Γ in sich aus.

Es handelt sich jetzt noch um die Gleichung (20) *des* § 9, *deren Inhalt erst zu entwickeln ist:*

$$J_a \cdot J_b = J_{\varphi(a,b)} C_{\psi(a,b)}.$$

Dabei bedeutete J_a den Isomorphismus

$$\begin{pmatrix} T_\alpha \\ T_{\omega(\alpha,a)} \end{pmatrix} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

wodurch auch schon J_b und $J_{\varphi(a,b)}$ erklärt sind. Unter $C_{\psi(a,b)}$ wurde aber der Isomorphismus der Gruppe Γ in sich verstanden, der entsteht, wenn man diese Gruppe mit der Operation $T_{\psi(a,b)}$ transformirt. Der Isomorphismus J_a ersetzt T_α durch $T_{\omega(\alpha,a)}$, d. h. durch $[S_a^{-1} T_\alpha S_a]$. Der Isomorphismus $J_a J_b$ ersetzt also die Operation T_α durch

$$\left[S_b^{-1} [S_a^{-1} T_\alpha S_a] S_b\right].$$

Es ersetzt endlich der Isomorphismus $J_{\varphi(a,b)} C_{\psi(a,b)}$ dieselbe Operation T_α durch

$$T_{\psi(a,b)}^{-1} \times [S_{\varphi(a,b)}^{-1} T_\alpha S_{\varphi(a,b)}] \times T_{\psi(a,b)}.$$

Der Inhalt der Gleichung (20) stellt sich also jetzt in der Gleichung

$$\left[S_b^{-1} [S_a^{-1} T_\alpha S_a] S_b\right] = T_{\psi(a,b)}^{-1} \times [S_{\varphi(a,b)}^{-1} T_\alpha S_{\varphi(a,b)}] \times T_{\psi(a,b)} \tag{31}$$

dar. Diese Gleichung stellt im Grund eine Eigenschaft vor, welche den Functionen φ, ψ und ω in Beziehung auf das schon durch χ gegebene Multiplicationsgesetz der Operationen T zukommt.

Wie man auf die allgemeinste Weise erreicht, dass φ, ψ, ω diese Eigenschaft haben, erörtern wir nicht. In den Fällen, die später vorkommen, werden wir die Gleichung (31) erfüllen können und für jetzt setzen wir voraus, dass sie bestehe.

§ 14.

Die Rechnung mit den eingeführten Symbolen.

Setzt man in den Formeln (25) und (26) für die Indices a, α, b, β der Reihe nach a, 0, 0, β, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen II und III des 12ten Paragraphen

$$S_a T_0 \times S_0 T_\beta = S_a T_\beta .$$

Wenn man nun zur Abkürzung das Zeichen $S_a T_0$ durch S_a ausdrückt — wodurch also für $S_0 T_0$ noch zwei Bezeichnungen T_0 und S_0 nebenhergehen — so kann das Zeichen $S_a T_\beta$ als Product

$$S_a \times T_\beta$$

angesehen werden.

Damit fällt der Grund weg, aus dem bis jetzt das Productzeichen $\times$ geschrieben wurde. Ich stelle nun die Producte wieder durch blosse Zusammenstellung der Factoren dar. Es ist aber zu bemerken, dass vorläufig nur Producte von zwei Factoren definirt sind; nur in dem Fall, dass alle Factoren zu den Symbolen T gehören, hat ein Product von mehreren, in einer bestimmten Reihenfolge gegebenen Factoren einen unmittelbaren Sinn. Dabei erinnere ich noch daran, dass die durch eckige Klammern dargestellten Symbole, welche keine Producte sind, zu den Symbolen T gehören. Indem nun im Uebrigen beim Gebrauch von Klammern die gewöhnlichen Grundsätze befolgt werden sollen, werden die folgenden Formeln ohne Weiteres verständlich sein.

Die Gleichungen (25) und (26) ergeben jetzt

$$(S_a T_\alpha)\,(S_b T_\beta) = S_{\varphi(a,b)}\,(T_{\psi(a,b)}\,T_{\omega(a,b)}\,T_\beta). \tag{32}$$

Setzt man hier $\alpha = \beta = 0$, so erhält man mit Rücksicht auf III:

$$S_a S_b = S_{\varphi(a,b)}\,T_{\psi(a,b)}. \tag{33}$$

Nun kann die Gleichung (31) des 13ten Paragraphen mit Rücksicht auf die Definitionsgleichung (28) in die Form

$$\left[S_b^{-1}\left[S_a^{-1} T_\alpha S_a\right] S_b\right] = \left[(S_{\varphi(a,b)}\,T_{\psi(a,b)})^{-1}\,T_\alpha (S_{\varphi(a,b)}\,T_{\psi(a,b)})\right]$$

gesetzt werden, und daraus erhält man mit Hilfe von (33):

$$\left[S_b^{-1}\left[S_a^{-1} T_\alpha S_a\right] S_b\right] = \left[(S_a S_b)^{-1}\,T_\alpha (S_a S_b)\right]. \tag{34}$$

Jetzt soll in der Gleichung (32) der Index b gleich Null gesetzt werden. Man muss dabei die Gleichungen II und III beachten und findet

$$(S_a T_\alpha)\,T_\beta = S_a (T_\alpha T_\beta). \tag{35}$$

Multiplicirt man ferner in (32) beide Seiten der Gleichung von rechts mit T_γ, so ergiebt sich:

$$\left((S_a T_\alpha)\,(S_b T_\beta)\right)\,T_\gamma = \left(S_{\varphi(a,b)}\,(T_{\psi(a,b)}\,T_{\omega(a,b)}\,T_\beta)\right)\,T_\gamma,$$

was mit Hilfe der Gleichung (35) in die Form

$$S_{\varphi(a,b)}(T_{\psi(a,b)}\, T_{\omega(a,b)}\, T_\beta\, T_\gamma)$$

umgewandelt werden kann. Dieser letzte Ausdruck kann noch auf andere Weise erhalten werden. Es ist nämlich vermöge der Gleichung (35):

$$(S_a T_\alpha)\,\big((S_b T_\beta)\, T_\gamma\big) = (S_a T_\alpha)\,\big(S_b (T_\beta\, T_\gamma)\big);$$

hier ist aber die rechte Seite mit Rücksicht auf (32) gleich

$$S_{\varphi(a,b)}\,\big(T_{\psi(a,b)}\, T_{\omega(a,b)}\,(T_\beta\, T_\gamma)\big) = S_{\varphi(a,b)}(T_{\psi(a,b)}\, T_{\omega(a,b)}\, T_\beta\, T_\gamma).$$

Somit ist die Gleichung

$$\big((S_a T_\alpha)\,(S_b T_\beta)\big)\, T_\gamma = (S_a T_\alpha)\,\big((S_b T_\beta)\, T_\gamma\big) \tag{36}$$

bewiesen.

Bei allen diesen Rechnungen ist nie zu vergessen, dass die Symbole T für sich dem Associativgesetz schon genügen.

Die Gleichung (32) ergiebt mit Rücksicht auf (35)

$$(S_a T_\alpha)\,(S_b T_\beta) = (S_{\varphi(a,b)}\, T_{\psi(a,b)})\,(T_{\omega(a,b)}\, T_\beta),$$

und dies ist wegen der Gleichung (33) dasselbe wie

$$(S_a S_b)\,(T_{\omega(a,b)}\, T_\beta).$$

Wir haben also erhalten:

$$(S_a T_\alpha)\,(S_b T_\beta) = (S_a S_b)\,\big([S_b^{-1}\, T_\alpha\, S_b]\, T_\beta\big). \tag{37}$$

Wenn in der Gleichung (33) der Index a gleich Null gesetzt wird, ergiebt sich mit Rücksicht auf II

$$S_0 S_b = S_b.$$

Desshalb erhält man, wenn in (37) der Index a gleich Null angenommen wird

$$T_\alpha (S_b T_\beta) = S_b\,\big([S_b^{-1}\, T_\alpha\, S_b]\, T_\beta\big).$$

Der Ausdruck rechts in der letzten Gleichung ist nach (35) gleich

$$(S_b T_\beta)\,\big(T_\beta^{-1}\,[S_b^{-1}\, T_\alpha\, S_b]\, T_\beta\big)$$

oder vermöge (28) gleich

$$(S_b T_\beta)\,[(S_b T_\beta)^{-1}\, T_\alpha\, (S_b T_\beta)].$$

Es besteht demnach die Relation

$$T_\alpha (S_b T_\beta) = (S_b T_\beta)\,[(S_b T_\beta)^{-1}\, T_\alpha\, (S_b T_\beta)]. \tag{38}$$

Ausserdem bilde ich aus (35) die Gleichung

$$\big((S_a T_\alpha)\, T_\beta\big)\,(S_c T_\gamma) = \big(S_a (T_\alpha T_\beta)\big)\,(S_c T_\gamma).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber nach (37) gleich

$$(S_a S_c)\,\big([S_c^{-1}\,(T_\alpha T_\beta)\, S_c]\, T_\gamma\big).$$

Der letzte Ausdruck soll noch auf andere Art gebildet werden. Führt

man nämlich in der Gleichung (37) statt a, α, b, β die Zahlen 0, β, c, γ ein, so ergiebt sich

$$T_\beta(S_c T_\gamma) = S_c\left([S_c^{-1} T_\beta S_c]\, T_\gamma\right)$$

oder, indem man jetzt beide Seiten von links multiplicirt,

$$(S_a T_a)\left(T_\beta(S_c T_\gamma)\right) = (S_a T_a)\left(S_c([S_c^{-1} T_\beta S_c]\, T_\gamma)\right).$$

Dies ist vermöge (37) dasselbe wie

$$(S_a S_c)\left([S_c^{-1} T_a S_c]\,[S_c^{-1} T_\beta S_c]\, T_\gamma\right),$$

was nach der Formel (29) des § 13 mit

$$(S_a S_c)\left([S_c^{-1}(T_a T_\beta)\, S_c]\, T_\gamma\right)$$

übereinstimmt. Damit ist der erwähnte Ausdruck wiedergefunden, und es muss allgemein gelten:

$$(39) \qquad \left((S_a T_a)\, T_\beta\right)(S_c T_\gamma) = (S_a T_a)\left(T_\beta(S_c T_\gamma)\right).$$

Von den Gleichungen, welche in diesem und im vorigen Paragraphen gefunden wurden, sind die wichtigsten: (30), (34), (36), (37), (38), (39). Ich setze sie noch einmal der Reihe nach hierher mit etwas anderen Bezeichungen, indem U und V allgemeine Symbole bedeuten:

$$\text{IV.} \quad [U^{-1} T U]\,[U^{-1} T' U] = [U^{-1}(TT')\, U].$$

$$\text{V.} \quad \left[S'^{-1}[S^{-1} T S]\, S'\right] = \left[(SS')^{-1}\, T(SS')\right].$$

$$\text{VI.} \quad (UV)\, T = U(VT).$$

$$\text{VII.} \quad (ST)\,(S'T') = (SS')\left([S'^{-1} T S']\, T'\right).$$

$$\text{VIII.} \quad TU = U[U^{-1} T U].$$

$$\text{IX.} \quad (UT)\, V = U(TV).$$

Setzt man jetzt noch in VII das eine Mal $S = S_0$ und das andere Mal $T' = T_0$, so ergiebt sich:

$$\text{VII}^a. \quad T(S'T') = S'\left([S'^{-1} T S']\, T'\right).$$

$$\text{VII}^b. \quad (ST)\, S' = (SS')\,[S'^{-1} T S'].$$

Wäre es uns erlaubt, für unsere Symbole die gruppentheoretischen Gesetze in Anspruch zu nehmen und auch das Symbol $[U^{-1} T U]$ als ein Product

$$U^{-1} \times T \times U$$

anzusehen, so würden alle diese Gleichungen selbstverständlich sein. So aber, da das Associativgesetz noch nicht besteht, können diese Gleichungen als Ersatz für dieses Gesetz gelten; *sie ermöglichen eine Art von Rechnung mit den Symbolen.*

§ 15.

Ueber die Giltigkeit des Associativgesetzes.

Es lässt sich jetzt in der eben angedeuteten Weise eine Bedingung errechnen, die noch ausdrücklich gefordert werden muss, damit das Associativgesetz besteht. Man findet durch successive Umwandlung:

$$\{(S_\alpha T_\alpha)(S_b T_\beta)\}(S_c T_\gamma) = \{(S_\alpha S_b)([S_b^{-1} T_\alpha S_b] T_\beta)\}(S_c T_\gamma). \quad \text{(Vergl. VII.)}$$

$$= (S_\alpha S_b)\{([S_b^{-1} T_\alpha S_b] T_\beta)(S_c T_\gamma)\}. \quad \text{(Vergl. IX.)}$$

$$= (S_\alpha S_b)\{S_c([S_c^{-1}([S_b^{-1} T_\alpha S_b] T_\beta) S_c] T_\gamma)\}. \quad \text{(VII}^a\text{.)}$$

$$= \{(S_\alpha S_b) S_c\}\{[S_c^{-1}([S_b^{-1} T_\alpha S_b] T_\beta) S_c] T_\gamma\}. \quad \text{(VI.)}$$

$$= \{(S_\alpha S_b) S_c\}\{[S_c^{-1}[S_b^{-1} T_\alpha S_b] S_c][S_c^{-1} T_\beta S_c] T_\gamma\}. \quad \text{(IV.)}$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich aber:

$$(S_\alpha T_\alpha)\{(S_b T_\beta)(S_c T_\gamma)\} = (S_\alpha T_\alpha)\{(S_b S_c)([S_c^{-1} T_\beta S_c] T_\gamma)\}. \quad \text{(VII.)}$$

$$= S_\alpha(T_\alpha\{(S_b S_c)([S_c^{-1} T_\beta S_c] T_\gamma)\}). \quad \text{(IX.)}$$

$$= S_\alpha(\{T_\alpha(S_b S_c)\}([S_c^{-1} T_\beta S_c] T_\gamma)). \quad \text{(VI.)}$$

$$= S_\alpha(\{(S_b S_c)[(S_b S_c)^{-1} T_\alpha (S_b S_c)]\}([S_c^{-1} T_\beta S_c] T_\gamma)). \quad \text{(VIII.)}$$

$$= S_\alpha((S_b S_c)\{[(S_b S_c)^{-1} T_\alpha (S_b S_c)][S_c^{-1} T_\beta S_c] T_\gamma\}). \quad \text{(VI.)}$$

$$= (S_\alpha (S_b S_c))\{[(S_b S_c)^{-1} T_\alpha (S_b S_c)][S_c^{-1} T_\beta S_c] T_\gamma\}. \quad \text{(VI.)}$$

$$= (S_\alpha (S_b S_c))\{[S_c^{-1}[S_b^{-1} T_\alpha S_b] S_c][S_c^{-1} T_\beta S_c] T_\gamma\} \quad \text{(V.)}$$

Vergleicht man die Resultate dieser beiden Umwandlungsprocesse, so ergiebt sich: *Wenn noch für je drei Symbole S die Gleichung*

$$\text{X.} \quad (SS')S'' = S(S'S'')$$

erfüllt ist, so gilt auch für drei Symbole allgemeinster Art, dass

$$(UV)W = U(VW)$$

ist, d. h. es besteht unter der genannten Bedingung das Associativgesetz.

§ 16.

Die Nebenbedingung.

Die neben dem Associativgesetz in § 5 aufgestellte Bedingung 2) ist noch zu erörtern. Ich muss beweisen oder bewirken, dass weder die Gleichung

$$(40) \qquad (S_\alpha T_\alpha)(S_b T_\beta) = (S_\alpha T_\alpha)(S_c T_\gamma),$$

noch die Gleichung

$$(S_b T_\beta)(S_a T_\alpha) = (S_c T_\gamma)(S_a T_\alpha) \tag{41}$$

bestehen kann, ohne die folgenden Gleichungen

$$b = c, \quad \beta = \gamma$$

nach sich zu ziehen. Um dies zunächst für (40) zu zeigen, bringt man diese Gleichung mit Hilfe von (32) in die Gestalt

$$S_{\varphi(a,b)}(T_{\psi(a,b)} T_{\omega(\alpha,b)} T_\beta) = S_{\varphi(a,c)}(T_{\psi(a,c)} T_{\omega(\alpha,c)} T_\gamma),$$

wodurch sich ergiebt, dass das Bestehen von (40) mit dem Bestehen der zwei Gleichungen

$$S_{\varphi(a,b)} = S_{\varphi(a,c)}, \tag{42}$$

$$T_{\psi(a,b)} T_{\omega(\alpha,b)} T_\beta = T_{\psi(a,c)} T_{\omega(\alpha,c)} T_\gamma \tag{43}$$

gleichbedeutend ist. Es tritt jetzt eine Bedingung in ihr Recht, die im 9ten Paragraphen aufgefunden worden ist, und die dahin geht, dass m Symbole $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots \Sigma_{m-1}$, deren Multiplication der Formel

$$\Sigma_a \cdot \Sigma_b = \Sigma_{\varphi(a,b)}$$

folgt, eine Gruppe ausmachen. Diese Bedingung haben wir zuletzt ausser Acht gelassen, sie beschränkt die Function φ, und deckt sich zum Theil mit der Bedingung X des 15ten Paragraphen, doch so, dass keine von beiden Bedingungen die andere ganz in sich schliesst. Wir müssen jetzt ausdrücklich die genannte auf φ sich beziehende Bedingung wieder fordern. Sie ergiebt dann, dass die Gleichung

$$\varphi(a, b) = \varphi(a, c)$$

und in Folge dessen auch (42) nicht bestehen kann, wenn nicht

$$b = c$$

ist. Ersetzt man nun in (43) den Buchstaben c durch b, so folgt, dass auch

$$\beta = \gamma$$

sein muss.

Ganz ebenso ist die Gleichung (41) zu behandeln. Aus ihr folgt durch Entwicklung

$$S_{\varphi(b,a)}(T_{\psi(b,a)} T_{\omega(\beta,a)} T_\alpha) = S_{\varphi(c,a)}(T_{\psi(c,a)} T_{\omega(\gamma,a)} T_\alpha),$$

und daraus ergiebt sich zuerst $\varphi(b, a) = \varphi(c, a)$ oder

$$b = c$$

und dann

$$\omega(\beta, a) = \omega(\gamma, a). \tag{44}$$

Nun stellt der Ausdruck

$$\begin{pmatrix} T_\delta \\ T_{\omega(\delta,a)} \end{pmatrix} \quad (\delta = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

eine Substitution der Buchstaben $T_0, T_1, \ldots T_{n-1}$ dar. Diese Substitution ersetzt T_α und T_γ durch $T_{\omega(\alpha,a)}$ beziehungsweise $T_{\omega(\gamma,a)}$. Es folgt demnach aus (44), dass

$$\alpha = \gamma$$

sein muss. Damit ist die Nebenbedingung erfüllt.

Wenn also die in diesem Paragraphen und die in § 12 und § 13 geforderten Bedingungen erfüllt sind, wenn ausserdem auch die Gleichung X des 15ten Paragraphen besteht, so ist die in § 12 definirte Multiplication eine gruppentheoretische. Es ist dann eine Gruppe G von der mn^{ten} Ordnung vollständig erwiesen. Für die $m + n$ mit S und T bezeichneten Operationen dieser Gruppe bestehen die Gleichungen (13), (15) und (18). Aus diesen Gleichungen folgt nun wiederum, dass die aus den Operationen T bestehende Gruppe Γ in der Gruppe G ausgezeichnet enthalten ist, und dass die aus G und Γ durch einen bekannten Process entstehende Gruppe $G \mid \Gamma$ diejenige ist, deren Multiplicationsgesetz durch die Function φ vermöge der Gleichung

$$\Sigma_a \Sigma_b = \Sigma_{\varphi(a,b)}$$

beschrieben wird. Ferner kann gesagt werden (§ 11), dass die Gleichungen (13), (15) und (18) definirende Relationen für die Gruppe G bilden.

§ 17.

Zusammenfassung.

Wir fassen das Resultat der ganzen allgemeinen Entwicklung zusammen. Es wird eine Gruppe Γ, die aus den Operationen $T_0, T_1, \ldots T_{n-1}$ besteht, mit dem Multiplicationsgesetz

$$T_\alpha T_\beta = T_{\chi(\alpha,\beta)}$$

und mit T_0 als identischer Operation als gegeben angenommen. Diese Gruppe soll den Kern einer neuzubildenden Gruppe ausmachen, die folgendermassen hergestellt wird: Man wählt eine Function φ derart, dass m Symbole $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots \Sigma_{m-1}$, deren Multiplication durch die Gleichung

$$\Sigma_a \Sigma_b = \Sigma_{\varphi(a,b)}$$

ausgedrückt ist, eine Gruppe H mit der Identität Σ_0 bilden. Dann hat man noch zwei Functionen ψ und ω zu bestimmen. Von $\psi(a, b)$ wird zunächst verlangt, dass

$$\psi(a, 0) = \psi(0, a) = 0$$

ist, von $\omega(\alpha, a)$, dass die Substitution

$$J_a = \begin{pmatrix} T_0, & T_1, & \ldots & T_{n-1} \\ T_{\omega(0,a)}, & T_{\omega(1,a)}, & \ldots & T_{\omega(n-1,a)} \end{pmatrix}$$

für jeden Werth 0, 1, 2, ... $m-1$ des Index a einen Isomorphismus der Gruppe Γ in sich, und J_0 den identischen Isomorphismus vorstellt. Wir bezeichnen durch $C_{\psi(a,b)}$ den Isomorphismus

$$\begin{pmatrix} T_0, & T_1, & \dots & T_{n-1} \\ T^{-1}_{\psi(a,b)} T_0 T_{\psi(a,b)}, & T^{-1}_{\psi(a,b)} T_1 T_{\psi(a,b)}, & \dots & T^{-1}_{\psi(a,b)} T_{n-1} T_{\psi(a,b)} \end{pmatrix};$$

es sind alsdann die Functionen weiter dahin zu beschränken, dass

$$\text{XI.} \quad J_a \cdot J_b = J_{\varphi(a,b)} \cdot C_{\psi(a,b)}. \qquad (a, b = 0, 1, 2, \dots m-1)$$

ist. Wenn nun ausserdem noch eine Bedingung besteht, die sogleich näher bezeichnet werden soll, so bestimmen die Gleichungen

$$\text{XII.} \quad \begin{cases} T_\alpha T_\beta = T_{\chi(\alpha,\beta)} \\ S_a S_b = S_{\varphi(a,b)} T_{\psi(a,b)} \\ T_\alpha S_a = S_a T_{\omega(\alpha,a)}, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots n-1 \\ a, b = 0, 1, 2, \dots m-1 \end{pmatrix}$$

als definirende Relationen eine Gruppe G von der mn^{ten} Ordnung.

Die noch fehlende Bedingung kann so beschrieben werden: Jeder Ausdruck

$$S_a S_b S_c \quad (a, b, c = 0, 1, 2, \dots m-1)$$

kann vermöge der Gleichungen XII auf eine der Formen

$$S_d T_\delta \begin{pmatrix} d = 0, 1, 2, \dots m-1 \\ \delta = 0, 1, 2, \dots n-1 \end{pmatrix}$$

gebracht werden und zwar auf die Weise, dass mehrmals zwei aufeinanderfolgende Symbole, welche die linke Seite einer der Gleichungen XII ausmachen, durch die rechte Seite der betreffenden Gleichung ersetzt werden. Wenn wir uns hier auf eine Reihe von solchen Schritten beschränken, so kann der Ausdruck $S_a S_b S_c$ nur auf zwei völlig bestimmte Arten reducirt werden. Dass beide Arten stets dieselbe reducirte Form liefern, ist der Inhalt der Bedingung X, die wir jetzt noch fordern.

Die Gruppe G, welche unter den genannten Bedingungen bestimmt ist, enthält die Gruppe Γ als ausgezeichnete Untergruppe, und es ist die Gruppe $G|\Gamma$ mit der Gruppe H holoedrisch isomorph. Bestimmt man ferner ψ und ω auf die allgemeinste Art, welche vermöge der genannten Bedingungen zulässig ist, so erhält man, wie aus dem 9^{ten} Paragraphen hervorgeht, die allgemeinste Gruppe G von den eben genannten Eigenschaften.

Offenbar kann man statt der ersten von den Gleichungen XII, welche eigentlich n^2 Gleichungen repräsentirt, auch irgendwelche definirende Relationen der Gruppe Γ setzen. Man lässt dann in der dritten von den Gleichungen XII den Index α nur diejenigen Werthe

durchlaufen, für welche T_α eine erzeugende Operation der Gruppe Γ ist, und ersetzt die Symbole

$$T_{\psi(a,b)}, \quad T_{\omega(\alpha,a)}$$

für alle Werthe von a und b und für die genannten Werthe von α durch ihre Ausdrücke in den erzeugenden Operationen. Dann hat man wieder definirende Relationen der Gruppe G.

§ 18.

Erstes Hauptverfahren zur Bildung von Gruppen.

Die entwickelten Principien führen über das Ziel dieser Abhandlung hinaus. Ich hebe hier nur zwei besondere Verfahren hervor. Man bekommt eine besondere Bestimmungsweise der Gruppe G, wenn man allgemein

$$\psi(a, b) = 0$$

setzt. Dann lautet die zweite von den Gleichungen XII:

$$S_a S_b = S_{\varphi(a,b)} T_0,$$

und es ergiebt sich vermöge dieser Gleichung und der Eigenschaften der Function φ, dass die Bedingung X von selbst erfüllt ist, wenn die vorhergehenden Bedingungen gelten. Die Bedingung XI giebt jetzt

$$J_a \cdot J_b = J_{\varphi(a,b)}.$$

Die Gruppe, welche man so erhält, hat das Besondere, dass die Operationen S eine Untergruppe von ihr ausmachen. Man kann jetzt folgenden Satz aussprechen:

Man wähle n Symbole $T_0, T_1, \ldots T_{n-1}$, welche eine Gruppe Γ bilden, und m Symbole $S_0, S_1, \ldots S_{m-1}$, welche unter sich auch eine Gruppe ausmachen. Jedem Symbol S_a werde ein Isomorphismus J_a der Gruppe Γ in sich zugeordnet, wobei aber verschiedenen Symbolen S unter Umständen derselbe Isomorphismus entsprechen kann. Ausserdem wird gefordert, dass für je drei Indices a, b, c, für die

$$S_a S_b = S_c$$

ist, auch die Gleichung

$$J_a J_b = J_c$$

besteht. Wird nun die Function $\omega(\alpha, a)$ dadurch erklärt, dass

$$J_a = \begin{pmatrix} T_0, & T_1, & \ldots & T_{n-1} \\ T_{\omega(0,a)}, & T_{\omega(1,a)}, & \ldots & T_{\omega(n-1,a)} \end{pmatrix},$$

so bestimmen die definirenden Relationen

$$\begin{cases} T_\alpha T_\beta = T_{\chi(\alpha,\beta)}, \\ S_a S_b = S_{\varphi(a,b)}, \\ T S_a = S_a T_{\omega(\alpha,a)} \end{cases}$$

eine Gruppe von der Ordnung mn mit der ausgezeichneten Untergruppe Γ.

Scheinbar sind hier einige Bedingungen ausgelassen. Früher bedeutete nämlich T_0 die Identität von Γ und Σ_0 die von H, ferner J_0 den identischen Isomorphismus. Die letzte Bedingung ist überflüssig; denn wenn

$$S_0 S_b = S_b$$

ist, so ist auch in der Bedingung XI schon verlangt, dass

$$J_0 J_b = J_b,$$

und es muss J_0 der identische Isomorphismus sein. Nachträglich kann man aber hier auch die Aussage weglassen, dass T_0 und S_0 die Identitäten der beiden Symbolgruppen sind, denn der Index Null spielt in der Formulirung des Lehrsatzes im Uebrigen keine Rolle.

Sind die beiden Gruppen gegeben, welche von den Symbolen T und von den Symbolen S gebildet werden, d. h. sind die Functionen χ und φ gegeben, so kann man die Function ω stets den Bedingungen gemäss bestimmen. Dies ist manchmal auf mehrere Arten möglich; vielfach ist aber die einzig mögliche Art die, freilich sehr triviale, dass für alle Werthe von α und a

$$\omega(\alpha, a) = \alpha$$

gesetzt wird. In diesem Fall sind alle die Isomorphismen J_a gleich dem identischen Isomorphismus, und die Operationen unserer Gruppe von der Ordnung mn setzen sich einfach nach der Formel

$$(S_a T_\alpha)(S_b T_\beta) = (S_a S_b)(T_\alpha T_\beta) = S_{\varphi(\alpha, b)} T_{\chi(\alpha, \beta)}$$

zusammen. Dies ist eine Bildung einer Gruppe aus zwei gegebenen Gruppen so zu sagen durch blosses Aneinanderschreiben der Operationen. Ich nenne in diesem Fall die gebildete Gruppe das *directe Product* der beiden zur Bildung verwendeten Gruppen. Man übersieht sofort, was unter dem directen Product mehrerer Gruppen zu verstehen ist. Ein solches kann auch successive durch wiederholte Bildung eines directen Products von zwei Gruppen erhalten werden, und es ist gleichgiltig für das Resultat, wie man bei dieser successiven Multiplication verfährt. Das directe Product stelle ich durch blosse Zusammenstellung der Zeichen vor, welche die einzelnen Gruppen, die Factoren, repräsentiren.

§ 19.

Beispiel.

Um für den Lehrsatz des vorhergehenden Paragraphen ein Beispiel zu geben, gehe ich von der Vierergruppe*) aus. Sie soll die Gruppe Γ

*) Vergl. F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder p. 12.

sein. Die Vierergruppe wird aus zwei vertauschbaren Operationen T_1 und T_2 von der Ordnung 2 erzeugt und besteht aus den vier Operationen

$$1,\ T_1,\ T_2,\ T_1T_2.$$

Setzt man

$$T_1T_2 = T_3,$$

so kann man die Gruppe vollständig durch die Aussage beschreiben, dass die Operationen vertauschbar sind, und dass je zwei von den Operationen

$$T_1,\ T_2,\ T_3$$

mit einander multiplicirt die dritte ergeben. Um also einen Isomorphismus dieser Gruppe in sich zu erhalten, hat man nur die Operationen

$$T_1,\ T_2,\ T_3$$

irgendwie unter einander zu vertauschen. Es ist also auch

$$J = \begin{pmatrix} 1, & T_1, & T_2, & T_1T_2 \\ 1, & T_2, & T_1T_2, & T_1 \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus, und es sollen seine Potenzen

$$1,\ J,\ J^2$$

mit den Operationen J_a des Lehrsatzes übereinstimmen.

Man hat jetzt die Symbole S_a zu wählen und mit den Isomorphismen J_a in die richtige Beziehung zu bringen. Man kann aber die Bedingung des Lehrsatzes jetzt so ausdrücken. Die Gruppe der Symbole S_a muss isomorph sein der Gruppe von der Ordnung 3:

$$1,\ J,\ J^2. \tag{45}$$

Dabei muss jedem Symbol S_a eine einzige von den Operationen der Gruppe (45) entsprechen, es können aber einer der 3 Operationen (45) mehrere Symbole S_a entsprechen.

Nun nehme ich eine Operation S von der Ordnung m und ordne jedem $S_a = S^a$ den Isomorphismus J^a zu. Vermöge dieser Festsetzungen ist

$$S_aS_b = S_{\{a+b\}} \quad (a, b = 0, 1, 2, \ldots m-1),$$

wobei $\{a+b\}$ den mod. m von 0 bis $m-1$ genommenen Rest von $a+b$ bedeutet. Nach den Bedingungen des Lehrsatzes muss nun auch

$$J_aJ_b = J_{\{a+b\}}$$

sein, d. h.

$$J^{a+b} = J^{\{a+b\}}.$$

Dies ist für alle a und b nur dann der Fall, wenn m durch 3 theilbar ist.

Von den definirenden Relationen (§ 18)

$$T_aS_a = S_aT_{\omega(a,a)}$$

sind jetzt diejenigen überflüssig, in denen $a > 1$ ist. Da nämlich

$$S_a = S^a$$

ist, so kann man den Ausdruck

$$T_a S^a$$

allmählig in

$$S^a T_{\omega(a,a)}$$

umrechnen, indem man ein S nach dem andern nach links zieht. Es liegt aber im Begriff der definirenden Relationen, dass man diejenigen davon weglassen darf, die Folgen der übrigen sind. So erhält man das Gleichungssystem (vergl. auch den Schluss von § 17):

$$S^m = 1, \quad S^{-1}T_1 S = T_2, \quad S^{-1}T_2 S = T_1 T_2, \quad T_1^2 = 1, \quad T_2^2 = 1,$$
$$T_1 T_2 = T_2 T_1.$$

Quadrirt man von diesen Gleichungen die zweite, so erhält man

$$S^{-1}T_1^2 S = T_2^2;$$

nimmt man dazu die vierte Gleichung, so ergiebt sich die fünfte von selbst. Zieht man jetzt noch die dritte Gleichung hinzu, nachdem man sie quadrirt hat, so folgt

$$1 = S^{-1}T_2^2 S = T_1 T_2 T_1 T_2,$$

und wenn man jetzt den ersten Term und den letzten von rechts mit $T_2 T_1$ multiplicirt,

$$T_2 T_1 = T_1 T_2.$$

Man findet so den Satz: *Wenn m durch 3 theilbar ist, so definiren die Relationen*

$$S^m = 1, \quad S^{-1}T_1 S = T_2, \quad S^{-1}T_2 S = T_1 T_2, \quad T_1^2 = 1$$

eine Gruppe $4m^{ter}$ Ordnung.

Nimmt man $m = 3$, so erhält man die *Tetraedergruppe*. Setzt man in diesem Fall

$$U = S^2 T_1,$$

so haben S, U und T_1 die Bedeutung der von Herrn Dyck zur Darstellung der Tetraedergruppe benutzten erzeugenden Operationen A_1, A_2 und A_3*).

§ 20.

Zweites Hauptverfahren zur Bildung von Gruppen.

Das Resultat des 17ten Paragraphen soll jetzt durch die Annahme specialisirt werden, dass die Gruppe der Symbole Σ eine *cyklische* ist. Diese Aufgabe ist in § 10 vorbereitet worden. Es hat sich dort er-

*) Vergl. Math. Annalen Bd. XX, p. 35.

geben, dass die Gleichungen (22) gelten, oder genauer, dass man, ohne eine weitere Specialisirung eintreten zu lassen, setzen kann:

$$(46)\qquad \begin{aligned} &\varphi(a,b) = a+b, && \psi(a,b) = 0 \quad (a+b<m),\\ &\varphi(a,b) = a+b-m, && \psi(a,b) = \varkappa \quad (a+b \geqq m). \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $\varkappa$ einen bestimmten Index aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots n-1$. Die Gleichung XI von § 17 liefert nun mit Rücksicht auf (46) die Gleichungen

$$(47)\qquad \begin{aligned} &J_a J_b = J_{a+b} && (a+b<m),\\ &J_a J_b = J_{a+b-m} \cdot C_\varkappa && (a+b \geqq m). \end{aligned}$$

Von diesen besagt die erste, dass

$$J_a = J_1^{\,a} \qquad (a = 0, 1, 2, \ldots m-1),$$

und wenn man dieses Ergebniss in die zweite von den Gleichungen (47) einträgt, so findet man

$$(48)\qquad J_1^{\,m} = C_\varkappa.$$

Von den Bedingungen des 17ten Paragraphen ist im Grund nur noch X zu erörtern. Man hat zu diesem Zweck $S_a S_b S_c$ auf die in § 17 gelehrte Weise umzuwandeln; dabei sind die zu benutzenden Relationen, die nachher die definirenden werden, die folgenden

$$(49)\qquad \begin{cases} T_\alpha T_\beta = T_{\chi(\alpha,\beta)},\\ S_a S_b = S_{a+b} T_0 & (a+b<m),\\ S_a S_b = S_{a+b-m} T_\varkappa & (a+b \geqq m),\\ T_\alpha S_a = S_a T_{\omega(\alpha,a)}. \end{cases}$$

Wir nehmen zuerst $a = 1$, $b = m-1$, $c = 1$ und können die folgenden beiden Umwandlungen vornehmen:

$$S_1 S_{m-1} S_1, \quad S_0 T_\varkappa S_1, \quad S_0 S_1 T_{\omega(\varkappa,1)}, \quad S_1 T_0 T_{\omega(\varkappa,1)}, \quad S_1 T_{\omega(\varkappa,1)}$$

und

$$S_1 S_{m-1} S_1, \quad S_1 S_0 T_\varkappa, \quad S_1 T_0 T_\varkappa, \quad S_1 T_\varkappa.$$

Indem man dies vergleicht, erhält man $\omega(\varkappa, 1) = \varkappa$, d. h. es soll die Substitution J_1 den Buchstaben $T_\varkappa$ nicht versetzen. Es wird dann dieser Buchstabe auch von $J_a = J_1^{\,a}$ nicht versetzt, und man hat

$$(50)\qquad \omega(\varkappa, a) = \varkappa.$$

Um nun $S_a S_b S_c$ allgemein umzuwandeln, bezeichne man den mod. m von 0 bis $m-1$ genommenen Rest von x mit $\{x\}$ und setze

$$\begin{aligned} a+b-\{a+b\} &= \varepsilon_1 m,\\ b+c-\{b+c\} &= \varepsilon_2 m,\\ \{a+b\}+c-\big\{\{a+b\}+c\big\} &= \varepsilon_3 m,\\ a+\{b+c\}-\big\{a+\{b+c\}\big\} &= \varepsilon_4 m; \end{aligned}$$

es ist dann jede von den Zahlen ε entweder gleich 0 oder gleich 1 und

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_4.$$

Wegen der Gleichung (50) steckt in den Relationen (49) die folgende

$$T_{\varepsilon x} S_a = S_a T_{\varepsilon x} \quad (\varepsilon = 0, 1),$$

und mit dieser kann man umwandeln. Man erhält

$$S_a S_b S_c, \quad S_{\{a+b\}} T_{\varepsilon_1 x} S_c, \quad S_{\{a+b\}} S_c T_{\varepsilon_1 x}, \quad S_{\{a+b+c\}} T_{\varepsilon_2 x} T_{\varepsilon_1 x},$$

und andererseits

$$S_a S_b S_c, \quad S_a S_{\{b+c\}} T_{\varepsilon_2 x}, \quad S_{\{a+b+c\}} T_{\varepsilon_1 x} T_{\varepsilon_2 x}.$$

Es ist ersichtlich, dass beide Umwandlungen dasselbe ergeben.

Die Bedingungen (48) und (50), die wir hier bekommen haben, sind eigentlich schon in § 10 aufgefunden worden (vergl. (24) und (23)); jetzt sind sie als hinreichend nachgewiesen.

Wir haben damit den Lehrsatz: *Es sei eine Gruppe Γ gegeben, die aus den Operationen $T_0, T_1, \ldots T_{n-1}$ besteht; unter diesen sei T_x eine bestimmte, die mit der Identität übereinstimmen kann oder nicht. Ferner sei J ein Isomorphismus der Gruppe Γ in sich, der T_x nicht versetzt, und dessen m^{te} Potenz gleich demjenigen cogredienten Isomorphismus ist, der durch Transformation der Gruppe Γ mit der in ihr enthaltenen Operation T_x entsteht. Indem jetzt die Function $\omega(\alpha)$ durch die Formel*

$$J = \begin{pmatrix} T_0, & T_1, & \ldots & T_{n-1} \\ T_{\omega(0)}, & T_{\omega(1)}, & \ldots & T_{\omega(n-1)} \end{pmatrix}$$

erklärt wird, und S ein neues Symbol bedeutet, definiren die Relationen

$$\begin{cases} S^m = T_x, \\ T_\alpha T_\beta = T_{\chi(\alpha,\beta)}, \\ T\ S = S\, T_{\omega(\alpha)} \end{cases}$$

eine Gruppe G von der mn^{ten} Ordnung. Diese Gruppe enthält Γ als ausgezeichnete Untergruppe in der Weise, dass $G|\Gamma$ die cyklische Gruppe m^{ter} Ordnung ist; zugleich kann jede Gruppe G von den eben erwähnten Eigenschaften auf die genannte Art aus der Gruppe Γ gebildet werden.

Dieser Satz bildet das hauptsächliche Mittel für die wirkliche Herstellung der gesuchten Gruppen. Man vergleiche etwa § 46 und § 47.

Dritter Abschnitt.

Die Ordnung pq^2.

§ 21.

Erste Kategorie der Gruppen von der Ordnung pq^2. Gruppen vertauschbarer Operationen.

Wir beginnen mit der Bestimmung der versprochenen speciellen Gruppen. Zunächst sondere ich aus den Gruppen von der Ordnung pq^2 diejenigen ab, deren Operationen sämmtlich mit einander vertauschbar sind. Dabei benutze ich gewisse Sätze, welche für Gruppen vertauschbarer Operationen gelten. Um diese Sätze einfach aussprechen zu können, möge man eine Gruppe als *zerfallend**) bezeichnen, wenn sie als directes Product (vrgl. den Schluss des 18ten Paragraphen) von zwei Gruppen niedrigerer Ordnung dargestellt werden kann. Offenbar kann jede zerfallende Gruppe als directes Product von zwei oder mehreren nichtzerfallenden Factoren dargestellt werden; ebenso ist es selbstverständlich, dass die Factoren einer so dargestellten zerfallenden Gruppe vertauschbarer Operationen selbst aus vertauschbaren Operationen bestehen. Nun kann man die zu benutzenden Sätze so aussprechen**):

1) Die nichtzerfallenden Gruppen vertauschbarer Operationen sind diejenigen cyklischen Gruppen, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist.

2) Eine zerfallende Gruppe vertauschbarer Operationen kann nur auf eine Art als directes Product nichtzerfallender Gruppen dargestellt werden.

Auf die Reihenfolge der Factoren kommt natürlich bei dieser Darstellung nichts an.

Die sämmtlichen Gruppen vertauschbarer Operationen von einer gegebenen Ordnung n lassen sich demnach leicht aufstellen. Ist nämlich

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r},$$

wobei $p_1, p_2, \dots p_r$ Primzahlen bedeuten, die aber nicht verschieden zu sein brauchen, bezeichnet man ferner mit $[m]$ die cyklische Gruppe

---

*) Herr Dyck (Mathematische Annalen Bd. 17, p. 482) gebraucht in einem solchen Fall den Ausdruck „eigentlich zerfallend". Es ist zu beachten, dass der Begriff der nichtzerfallenden Gruppen weit umfassender ist als der Begriff der einfachen Gruppen.

**) Vergl. Kronecker, Monatsberichte der Berl. Acad. 1870, p. 882 ff. und Frobenius und Stickelberger, Journal für Mathematik Bd. 86, p. 217

von der Ordnung m und stellt man ein directes Product durch Zusammenstellen der Factoren vor, so ist

$$[p_1^{\alpha_1}] [p_2^{\alpha_2}] \cdots [p_r^{\alpha_r}]$$

eine Gruppe von der Ordnung n mit lauter vertauschbaren Operationen, und es giebt so viele solcher Gruppen als es Zerlegungen der Zahl n giebt in ein Product von Primzahlpotenzen.

Die hier ausgesonderte erste Kategorie der Gruppen von der Ordnung pq^2 besteht also aus den zwei Gruppen:

$$[p] [q^2], \quad [p] [q] [q].$$

§ 22.

Eintheilung der übrigen Gruppen von der Ordnung pq^2 in Kategorien.

Die Gruppen mit nicht vertauschbaren Operationen werden jetzt eingetheilt. Es werden dabei wieder die Sylow'schen Sätze gebraucht.*) Dieselben lauten so:

> Wenn die Ordnung n einer Gruppe durch die Potenz q^α der Primzahl q und durch keine höhere Potenz dieser Primzahl theilbar ist, so existirt mindestens eine Untergruppe von der Ordnung q^α. Alle Untergruppen von dieser Ordnung sind gleichberechtigt, ihre Anzahl ist ein Theiler von $\frac{n}{q^\alpha}$ und ist zugleich congruent 1 mod. q.

Ist also die Ordnung einer Gruppe G gleich pq^2, so existirt mindestens eine Untergruppe von der Ordnung q^2; bei genauerer Betrachtung ergiebt sich, dass die Anzahl s der Untergruppen von der Ordnung q^2 nur gleich 1 oder gleich p sein kann, das letztere aber jedenfalls nur, wenn $p - 1$ durch q theilbar ist. Ich setze zuerst den Fall, dass

$$s = 1$$

ist. Es besitzt alsdann die Gruppe G eine einzige ausgezeichnete Untergruppe von der Ordnung q^2, und diese Untergruppe möge Γ heissen. Als erster Unterfall werde nun derjenige angesehen, in welchem die Gruppe Γ cyklisch ist, also durch das Zeichen $[q^2]$ vorgestellt wird. Die Gruppen von der Ordnung pq^2 mit nichtvertauschbaren Operationen, welche diesen Bedingungen genügen, falls es überhaupt solche giebt, sollen die *zweite Kategorie* ausmachen.

Es bleibt noch ein zweiter Unterfall, nämlich der, in welchem

*) Mathematische Annalen Bd. 5, p. 584. Man vergl. auch Frobenius, Journal für Mathematik Bd. 100, p. 179 bis 181.

die Gruppe Γ die nichtcyklische Gruppe von der Ordnung q^2 ist (vergl. § 1), also durch den Ausdruck

$$[q]\,[q]$$

vorgestellt wird. Die Gruppe Γ besteht in diesem Fall aus der Identität und $q^2 - 1$ Operationen von der Ordnung q. Da nun jede Untergruppe von der Ordnung q gerade $q - 1$ Operationen von der Ordnung q enthält, und zwei solcher Untergruppen, ohne identisch zu sein, nicht dieselbe Operation von der Ordnung q enthalten können, so enthält die Gruppe Γ genau

$$\frac{q^2 - 1}{q - 1} = q + 1$$

Untergruppen der Ordnung q. Diese Untergruppen seien

$$H_0,\ H_1,\ H_2, \ldots H_q.$$

Ich unterscheide nun, ob von den Gruppen H eine in der Gesammtgruppe G ausgezeichnet enthalten ist oder nicht; im ersten Fall weise ich die Gruppe G der *dritten Kategorie* zu, im andern Fall der *vierten Kategorie.*

Ueber die dritte und vierte Kategorie kann man sofort noch etwas aussagen. Die Gesammtgruppe G von der Ordnung pq^2 enthält nach dem Satz von Cauchy eine Operation S von der Ordnung p. Transformirt man jetzt die Gruppen

$$H_0,\ H_1,\ H_2, \ldots H_q$$

der Reihe nach mit der Operation S, so erhält man

$$H_{i_0},\ H_{i_1},\ H_{i_2}, \ldots H_{i_q},$$

wobei $i_0, i_1, i_2, \ldots i_q$ eine Permutation der Indices $0, 1, 2, \ldots q$ bedeutet; es müssen nämlich die sämmtlichen Untergruppen der in G ausgezeichnet enthaltenen Gruppe Γ mit S transformirt in dieselben Untergruppen übergehen. Transformirt man aber p-mal mit der Operation S, so muss schliesslich wieder die ursprüngliche Reihenfolge der Gruppen H entstehen, d. h. die p^{te} Potenz der Substitution

$$\begin{pmatrix} H_0 & H_1 & H_2 & \ldots & H_q \\ H_{i_0} & H_{i_1} & H_{i_2} & \ldots & H_{i_q} \end{pmatrix}$$

ist gleich der Identität. Löst man also diese Substitution, sowie dies gewöhnlich bei Buchstabenvertauschungen geschieht, in Cyklen auf,*) so muss jeder Cyklus, der mehr als einen Buchstaben enthält, p Buchstaben enthalten. Bleiben somit ϱ der Gruppen H bei der Transformation mit S ungeändert, so ist

$$\varrho \equiv q + 1 \bmod. p. \tag{51}$$

*) Vergl. z. B. Serret Cours d'Algèbre Supérieure 1885, T. II, p. 250.

Da nun p und q verschiedene Primzahlen bedeuten, kann ϱ nicht gleich 1 sein. Wenn jetzt z. B. H_0 in der Gruppe G ausgezeichnet enthalten ist, so muss noch eine Gruppe H, etwa $H_\varkappa$, bei der Transformation mit der Operation S ungeändert bleiben. Nun ist Γ eine Gruppe vertauschbarer Operationen, welche $H_\varkappa$ enthält; aus den Operationen von Γ und aus S kann man aber die ganze Gruppe G erzeugen, es wird also auch $H_\varkappa$ in der Gesammtgruppe G ausgezeichnet enthalten sein.

Jede Gruppe der dritten Kategorie enthält also mindestens zwei von den Gruppen H auf ausgezeichnete Weise. Gehört aber die Gruppe G der vierten Kategorie an, so muss auch jede der Gruppen H schon durch die Transformation mit der Operation S geändert werden; es ist daher $\varrho = 0$, und es folgt aus der Congruenz (51), dass *im Fall der vierten Kategorie $q+1$ durch p theilbar sein muss.*

Wir haben bis jetzt an der Voraussetzung festgehalten, dass die Anzahl s der in der Gruppe G enthaltenen Untergruppen von der Ordnung q^2 gleich 1 ist. Jetzt ist noch der Fall zu erörtern (vergl. den Anfang des Paragraphen), dass

$$s = p$$

ist, wobei p in der Form

$$p = \varkappa q + 1 \qquad (\varkappa > 0) \tag{52}$$

vorauszusetzen ist; es ist in diesem Fall also $p > q$. Es kann gezeigt werden, dass in dem fraglichen Fall eine ausgezeichnete Untergruppe von der Ordnung p vorhanden sein muss. Nimmt man nämlich an, dass t Untergruppen von der Ordnung p existiren, so ergeben die Sylow'schen Sätze, dass t entweder gleich 1 oder gleich q oder gleich q^2 und zugleich

$$t \equiv 1 \mod p$$

ist. Nun kann nicht $t = q$ sein, sonst würde ja

$$q \equiv 1 \mod p$$

folgen, was dem Umstand widerspricht, dass p grösser ist als q. Man hat also nur noch die Annahme

$$t = q^2$$

auszuschliessen. Diese Annahme zieht nach sich, dass q^2 in der Form

$$q^2 = lp + 1 \tag{53}$$

angenommen werden muss. Die Gleichungen (52) und (53) ergeben zusammen

$$q^2 = lkq + l + 1,$$

woraus folgt, dass

$$l \equiv -1 \mod q$$

ist. Die positive ganze Zahl l ist daher mindestens gleich $q-1$, und es ist deshalb aus (53) zu schliessen, dass

$$q^2 \geqq (q-1)p + 1.$$

Diese Relation ist widersprechend, sobald man

$$p > q + 1$$

annimmt. Nun war $p > q$, es würde also nur noch übrig bleiben

$$p = q + 1$$

zu setzen. Da aber p und q Primzahlen sind, so hätte man jetzt $p = 3$ und $q = 2$.

Allein auch bei diesen speciellen Zahlen p und q kommen wir auf einen Widerspruch, wenn wir $s = p$ und $t = q^2$ annehmen. Man hätte nämlich jetzt 4 Untergruppen 3^{ter} Ordnung mit je 2 Operationen 3^{ter} Ordnung. Im Ganzen müsste die Gruppe also 8 Operationen von der Ordnung 3 enthalten, und dann bleiben noch 4 andere Operationen übrig. Die Gruppe könnte also nicht mehr als eine Gruppe von der Ordnung $q^2 = 4$ enthalten. Gerade von der umgekehrten Voraussetzung sind wir aber jetzt ausgegangen. Somit ist $t = 1$ zu setzen. *Jede Gruppe von der Ordnung pq^2, die mehr als eine Untergruppe von der Ordnung q^2 enthält, enthält eine einzige Untergruppe von der Ordnung p, die somit ausgezeichnet ist.*

Ich unterscheide noch den Unterfall, dass G Operationen von der Ordnung q^2 besitzt, von demjenigen, in welchem dies nicht statthat, und weise die Gruppe G im ersten Unterfall einer *fünften*, im andern einer *sechsten Kategorie* zu. Die in diesen ganzen Paragraphen gebildeten Kategorien schliessen sich in dem Sinn aus, dass zwei davon nicht dieselbe Gruppe enthalten können.

§ 23.

Zweite Kategorie.

Es soll jetzt die zu bildende Gruppe von der Ordnung pq^2 eine einzige und deshalb ausgezeichnete Untergruppe Γ von der Ordnung q^2 enthalten; ausserdem soll Γ cyklisch sein. Man wähle, was jedenfalls möglich ist, aus der Gruppe Γ eine Operation T von der Ordnung q^2 und aus der Gruppe G eine Operation S von der Ordnung p aus; *es müssen dann die Gleichungen*

$$S^p = 1, \quad S^{-1}TS = T^\varrho, \quad T^{q^2} = 1 \tag{54}$$

bestehen, und es erzeugen S und T die ganze Gruppe G.

Um wiederum die Zahl ϱ zu bestimmen, bedenke man, dass durch Transformation der Gruppe Γ vermittelst der Operation S der Isomorphismus

$$J = \begin{pmatrix} T^\alpha \\ T^{\alpha\varrho} \end{pmatrix} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots q^2 - 1)$$

der Gruppe Γ in sich entsteht. Es ist ferner

$$J^k = \begin{pmatrix} T^\alpha \\ T^{\alpha\varrho^k} \end{pmatrix} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, .. q^2 - 1).$$

Der Isomorphismus J^k entsteht aber durch Transformation mit S^k, also ist

$$J^p = \begin{pmatrix} T^\alpha \\ T^{\alpha\varrho^p} \end{pmatrix} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots q^2 - 1)$$

der identische Isomorphismus, und

$$\varrho^p \equiv 1 \text{ mod. } q^2.$$

Nimmt man ϱ dieser Bedingung gemäss an und fasst man die Gleichungen (54) als definirende Relationen, so bestimmen dieselben eine Gruppe von der Ordnung pq^2. Man kann, um dies einzusehen, den Lehrsatz des 18ten oder den des 20ten Paragraphen benutzen. Die hypothetische Gruppe der zweiten Kategorie, von der wir ausgegangen sind, muss, falls sie existirt, durch die Relationen (54) definirbar sein (vergl. den Schluss von § 6). Es fragt sich noch, ob die durch die Relationen definirte Gruppe wirklich der betrachteten Kategorie angehört. Dies ist nicht der Fall für $\varrho = 1$, weil da alle Operationen vertauschbar werden. Man muss also für ϱ eine Zahl annehmen, die mod. q^2 zum Exponenten p gehört, und eine solche existirt nur, wenn p ein Theiler von $q(q-1)$, d. h. von $q-1$ ist.*) Unter diesen Umständen liegt eine Gruppe vor, deren Operationen nicht sämmtlich mit einander vertauschbar sind, und die eine ausgezeichnete Untergruppe von der Ordnung q^2 enthält. Da aber nach den Sätzen von Sylow zwei Untergruppen von der Ordnung q^2 gleichberechtigt sein müssten, so kann hier nur eine solche Untergruppe vorhanden sein; diese ist cyklisch, und es sind damit die Merkmale der zweiten Kategorie nachgewiesen.

Durch eine genaue Nachbildung des in § 7 gegebenen Beweises findet man nun, dass die Formel (54) für alle die noch möglichen Werthe von ϱ eine und dieselbe Gruppe liefert. *Wenn also p kein Theiler von $q-1$ ist, so existirt keine Gruppe der zweiten Kategorie; im andern Fall existirt eine einzige; dieselbe wird durch die Relationen* (54) *definirt, wobei ϱ eine Zahl bedeutet, die* mod. q^2 *zum Exponenten p gehört.*

§ 24.

Formeln für die dritte Kategorie.

Die ausgezeichnete Untergruppe Γ der zu bildenden Gruppe G soll jetzt die Form $[q]\,[q]$ haben; ausserdem sollen von den Untergruppen der Gruppe Γ, welche die Ordnung q besitzen, mindestens zwei in der

*) Gauss, Disquisitiones arithmeticae art. 89.

Gruppe G ausgezeichnet enthalten sein. Es mögen nun T_1 und T_2 Operationen von der Ordnung q bedeuten, die aus zwei solchen ausgezeichneten Untergruppen von der Ordnung q ausgewählt sind. Bedeutet noch S eine Operation der Gruppe G von der Ordnung p, *so kann man die Gleichungen*

$$(55)\quad S^p = 1,\ S^{-1}T_1S = T_1^a,\ S^{-1}T_2S = T_2^b,\ T_1^q = T_2^q = 1,$$
$$T_1T_2 = T_2T_1$$

aufstellen, und es erzeugen S, T_1 und T_2 die ganze Gruppe.

Im Hinblick auf die zweite und dritte von den Gleichungen (55) und auf die Ordnung der Operation S findet man durch einen schon mehrfach gebrauchten Schluss die Bedingung:

$$(56)\qquad a^p \equiv b^p \equiv 1 \bmod. q.$$

Wenn andererseits diese Bedingung erfüllt ist, so definiren die Gleichungen (55) jedenfalls eine Gruppe von der Ordnung pq^2. Dies folgt daraus, dass die Vertauschung

$$J = \begin{pmatrix} T_1^{\alpha} \times T_2^{\beta} \\ T_1^{a\alpha} \times T_2^{b\beta} \end{pmatrix} \qquad (\alpha,\beta = 0,1,2,\ldots q-1)$$

der q^2 Zeichen

$$T_1^{\alpha} \times T_2^{\beta} \qquad (\alpha,\beta = 0,1,2,\ldots q-1)$$

einen Isomorphismus der Gruppe Γ in sich vorstellt, dessen p^{te} Potenz vermöge der Congruenzen (56) gleich der Identität ist. Ordnet man nun den Symbolen

$$1,\ S,\ S^2,\ \ldots S^{p-1},$$

die unter sich eine Gruppe bilden, der Reihe nach die Isomorphismen

$$1,\ J,\ J^2,\ \ldots,\ J^{p-1}$$

zu, so kann der Satz des 18ten Paragraphen angewendet werden. Uebrigens kann man geradeso das zweite Hauptverfahren (§ 20) anwenden.

Wir würden unter Anderem der Bedingung (56) genügen, wenn wir $a \equiv b \equiv 1$ setzten, dann aber läge eine Gruppe vertauschbarer Operationen vor. *Von den Zahlen a und b gehört also jedenfalls die eine* mod. q *zum Exponenten p, von der anderen gilt entweder dasselbe, oder sie ist* $\equiv 1$ mod. q. Es muss also *auch p ein Theiler von $q-1$ sein. Unter diesen Umständen definiren, wie man leicht sieht, die Relationen* (55) *wirklich eine Gruppe der dritten Kategorie und zwar die allgemeinste.*

§ 25.

Anzahl der Gruppen in der dritten Kategorie.

Es handelt sich noch darum, wie viele verschiedene Gruppen wir bekommen. Da eine von den Zahlen a und b nothwendig mod. q zum

Exponenten p gehört, wollen wir, was unbeschadet der Allgemeinheit unserer Betrachtung geschehen kann, annehmen, dass dies für α der Fall sei. Jetzt bedeute wieder ϱ einen bestimmten von den Resten, die mod. q zum Exponenten p gehören; man kann nun, falls a von ϱ mod. q verschieden ist, durch Einführen einer Potenz des Symbols S an Stelle von S (vergl. § 7) bewirken, dass an Stelle von a die Zahl ϱ tritt. Es kann zugleich

$$b \equiv \varrho^{\mu} \text{ mod. } q$$

gesetzt werden. Der Werth von μ ist dabei nur mod. p bestimmt. *Die Formeln* (55) *zeigen sich jetzt in der Gestalt*

$$(57)\quad S^p = 1, \quad S^{-1}T_1S = T_1^{\varrho}, \quad S^{-1}T_2S = T_2^{\varrho^{\mu}}, \quad T_1^q = T_2^q = 1,$$
$$T_1T_2 = T_2T_1,$$

und man erhält jedenfalls alle Gruppen der dritten Kategorie, wenn man hier μ von 0 bis $p-1$ gehen lässt. Dabei ergiebt sich aber, wie gleich nachher gezeigt werden soll, dieselbe Gruppe mehr als ein Mal.

Transformirt man zunächst die Operationen T_1^{α} und T_2^{β} mit Hilfe von $S^{\varkappa}$, so erhält man (vergl. § 3):

$$S^{-\varkappa}T_1^{\alpha}S^{\varkappa} = T_1^{\alpha\varrho^{\varkappa}}, \quad S^{-\varkappa}T_2^{\beta}S^{\varkappa} = T_2^{\beta\varrho^{\varkappa\mu}},$$

woraus folgt

$$S^{-\varkappa}T_1^{\alpha}T_2^{\beta}S^{\varkappa} = T_1^{\alpha\varrho^{\varkappa}}T_2^{\beta\varrho^{\varkappa\mu}}.$$

Wird aber jetzt die Operation $T_1^{\alpha}T_2^{\beta}$ vermittelst der Operation $S^{\varkappa}T_1^{\gamma}T_2^{\delta}$ transformirt, so ergiebt sich der Ausdruck

$$(58)\qquad T_2^{-\delta}T_1^{-\gamma}S^{-\varkappa}T_1^{\alpha}T_2^{\beta}S^{\varkappa}T_1^{\gamma}T_2^{\delta} = T_1^{\alpha\varrho^{\varkappa}}T_2^{\beta\varrho^{\varkappa\mu}}.$$

Diese Operation ist für alle $\varkappa$ eine Potenz von $T_1^{\alpha}T_2^{\beta}$ dann und nur dann, wenn $\alpha \equiv 0$ oder $\beta \equiv 0$ mod. q, oder wenn $\mu \equiv 1$ mod. p ist.

Dadurch zeigt sich sofort die völlige Verschiedenheit der Gruppe, die für $\mu \equiv 1$ sich ergiebt, von den andern. Es enthält nämlich die Gruppe Γ, die aus den Operationen T_1 und T_2 erzeugt wird, wie wir gesehen haben $q+1$ Untergruppen von der Ordnung q. In dem Fall, in dem $\mu \equiv 1$ mod. p, ist jede dieser $q+1$ Untergruppen in der Gesammtgruppe G ausgezeichnet enthalten, in den andern Fällen gilt dies nur für zwei der Untergruppen, nämlich für diejenige, die aus den Potenzen von T_1 besteht und mit H_1 bezeichnet werden möge, und für diejenige, die aus den Potenzen von T_2 besteht und H_2 heissen soll.

Ich denke mir jetzt eine zweite Gruppe G' von der Ordnung pq^2, welche durch die Formeln

$$(59)\qquad S'^p = 1, \quad S'^{-1}T_1'S' = T_1'^{\varrho}, \quad S'^{-1}T_2'S' = T_2'^{\varrho^{\mu'}},$$
$$T_1'^q = T_2'^q = 1, \quad T_1'T_2' = T_2'T_1'$$

definirt sein soll. Es ist zu untersuchen, unter welchen Umständen diese Gruppe mit der durch die Formeln (57) definirten Gruppe G holoedrisch isomorph ist. Es soll jetzt weder μ noch μ' congruent 1 sein in Beziehung auf den Modul p. Die Gruppe G' hat eine einzige ausgezeichnete Untergruppe Γ' von der Ordnung q^2, die aus den Operationen T_1' und T_2' erzeugt wird, und diese Gruppe Γ' enthält gerade zwei und nicht mehr solche Untergruppen von der Ordnung q, die in G' selbst ausgezeichnet enthalten sind. Diese beiden Untergruppen bestehen beziehungsweise aus den Potenzen von T_1' und von T_2' und sollen H_1' und H_2' genannt werden. Setzt man jetzt voraus, dass die Gruppen G und G' holoedrisch isomorph auf einander bezogen seien, so muss dabei entweder der Gruppe H_1 die Gruppe H_1' und zugleich der Gruppe H_2 die Gruppe H_2' entsprechen, oder es entsprechen sich H_1 und H_2' einerseits und H_2 und H_1' andererseits.

Nun lehrt die Formel (58), dass jede Operation von H_1 in ihre eigene ϱ^{te} Potenz übergeht, wenn man sie mit einer Operation von G von der Form

$$S T_1^{\gamma} T_2^{\delta} \qquad (\gamma, \delta = 0, 1, 2, \ldots q-1) \tag{60}$$

transformirt, und dass andererseits eine Operation von G diese Form besitzen muss, wenn durch Transformation mit ihr der genannte Erfolg erzielt werden soll. Die Operationen der Gruppe H_2 gehen aber in ihre $\varrho^{\mu ten}$ Potenzen über, wenn sie mit Operationen von der Form (60) transformirt werden. Also: die Operationen von H_2 gehen in ihre $\varrho^{\mu ten}$ Potenzen über, wenn sie mit denjenigen Operationen von G transformirt werden, mit denen transformirt die Operationen von H_1 in ihre ϱ^{ten} Potenzen übergehen. Ebenso gilt natürlich die andere Aussage: die Operationen von H_2' gehen in ihre $\varrho^{\mu' ten}$ Potenzen über, wenn sie mit denjenigen Operationen von G' transformirt werden, mit denen transformirt die Operationen von H_1' in ihre ϱ^{ten} Potenzen übergehen. Wenn nun bei dem vorausgesetzten Isomorphismus zwischen G und G' die Gruppen H_1 und H_1' einerseits und H_2 und H_2' andererseits sich entsprächen, so würden die beiden gefundenen Aussagen zur Folge haben, dass

$$\varrho^{\mu} \equiv \varrho^{\mu'} \bmod q$$

und somit

$$\mu \equiv \mu' \bmod p$$

angenommen werden müsste.

Es bleibt also nur der andere Fall übrig, in dem H_1 und H_2' sich entsprechen. Wäre nun zuerst $\mu' \equiv 0 \bmod p$, so existirten in G' gar keine Operationen (vergl. (58) und (59)), mit denen transformirt die Operationen von H_2' sich änderten, während doch in der Gruppe G die Operationen (60) enthalten sind, mit denen transformirt die Opera-

tionen von H_1 in ihre ϱ^{ten} Potenzen übergeführt werden. Dabei könnte also die jetzt angenommene Art des Isomorphismus nicht bestehen. Ist nun μ' nicht durch p theilbar, so kann man μ'' so finden, dass

$$\mu'\mu'' \equiv 1 \bmod. p. \tag{61}$$

Diejenigen Operationen von G', mit denen transformirt die Operationen von H_2' in ihre ϱ^{ten} Potenzen übergehen, sind nun (vgl. (58) und (59)) von der Form

$$S'^{\mu''} T_1'^{\gamma} T_2'^{\delta} \qquad (\gamma, \delta = 0, 1, 2, \ldots q-1) \tag{62}$$

und führen die Operationen von H_1' in ihre $\varrho^{\mu''\text{ten}}$ Potenzen über. Die Operationen (62) von G' und die Operationen (60) von G müssen jetzt wegen ihres Verhaltens zu den Gruppen H_2' beziehungsweise H_1 sich entsprechen, und wegen ihres Verhaltens zu H_1' und H_2 muss

$$\varrho^{\mu''} \equiv \varrho^{\mu} \bmod. q$$

und somit auch

$$\mu'' \equiv \mu \bmod. p$$

sein. Die letzte Congruenz giebt mit (61) zusammen die Bedingung:

$$\mu'\mu \equiv 1 \bmod. p.$$

Diese Bedingung ist aber für den Isomorphismus der Gruppen G und G' auch hinreichend. Um es einzusehen, hat man nur

$$S_1 = S'^{\mu}$$

zu setzen; man findet dann aus (59) die Relationen

$$S_1^p = 1, \quad S_1^{-1} T_2' S_1 = T_2'^{\varrho}, \quad S_1^{-1} T_1' S_1 = T_1'^{\varrho^{\mu}}, \quad T_2'^q = T_1'^q = 1,$$
$$T_2' T_1' = T_1' T_2',$$

welche genau die Form der Gleichungen (57) besitzen, weshalb der am Ende von § 6 gezeigte Schluss angewendet werden kann.

Wir haben das Resultat: *Die definirenden Relationen* (57), *in denen* ϱ *eine beliebig zu wählende, mod.* q *zum Exponenten* p *gehörende Zahl bedeutet, liefern für* $\mu = 0, 1, 2, \ldots p-1$ *alle Gruppen der dritten Kategorie. Dabei ergeben zwei solche Exponenten* μ *und* μ' *dieselbe Gruppe nur dann, wenn* $\mu\mu' \equiv 1$ *mod.* p *ist.* Ist nun $p = 2$, so erhält man für $\mu = 0$ und für $\mu = 1$ zwei verschiedene Gruppen. Wenn $p \geq 3$ ist, so erhält man zunächst drei verschiedene Gruppen für $\mu = 0$, 1 und $p-1$; die andern Werthe von μ, die noch übrig sind, falls $p > 3$ ist, zerfallen in $\frac{p-3}{2}$ Paare, so dass jedes Mal die Zahlen desselben Paars, wenn sie in (57) für μ gesetzt werden, dieselbe Gruppe ergeben. Alles dieses gilt aber nur unter der im vorigen Paragraphen aufgefundenen Voraussetzung, dass $q-1$ durch p theilbar ist. Es ergiebt sich also: *Gruppen von der Ordnung* pq^2, *die der dritten Kategorie angehören, giebt es nur, wenn*

p ein Theiler von $q-1$ ist. Ist dabei p ungerade, so findet man $\frac{p+3}{2}$ Gruppen, ist $p=2$, so hat man zwei Gruppen.

Es ist noch zu bemerken, *dass eine von den erhaltenen Gruppen zerfällt.* Setzt man nämlich in den Gleichungen (57) die Zahl μ gleich Null, so wird die Operation T_2, welche eine Gruppe q^{ter} Ordnung erzeugt, mit allen anderen Operationen vertauschbar. Die Operationen S und T_1 erzeugen eine Gruppe von der Ordnung pq mit nichtvertauschbaren Operationen oder, was dasselbe heisst, sie erzeugen die nichtcyklische Gruppe von der Ordnung pq. Eine einfache Ueberlegung zeigt nun, dass in dem Fall $\mu=0$ die Gruppe G als directes Product der Gruppe q^{ter} Ordnung und der nichtcyklischen Gruppe von der Ordnung pq sich darstellen lässt.

§ 26.

Relationen für die vierte Kategorie.

Nach der in § 22 gegebenen Eintheilung kommt jetzt der Fall, dass die Gruppe G von der Ordnung pq^2 eine einzige nichtcyklische Untergruppe Γ von der Ordnung q^2 enthält, und dass keine der Untergruppen von der Ordnung q, die in Γ enthalten sind, ausgezeichnete Untergruppe der Gesammtgruppe G ist. Es ist dabei p ein Theiler von $q+1$. Ich wähle eine Operation S von der p^{ten} und eine Operation T_1 von der q^{ten} Ordnung aus der Gruppe G aus. Wenn man T_1 mit Hilfe von S transformirt, so erhält man die Operation

$$S^{-1}T_1S=T_2,$$

die auch von der q^{ten} Ordnung ist, und die nicht in T_1 ausgedrückt werden kann, weil sich sonst die aus den Potenzen von T_1 bestehende Gruppe als in G ausgezeichnet erweisen würde (§ 22). Die Operationen T_1 und T_2 sind in Γ enthalten und erzeugen diese Gruppe. Durch Iteration und Combination von T_1, T_2 und S erhält man die ganze Gruppe G. *Es lassen sich jetzt die Relationen aufstellen:*

$$(63)\quad S^p=1,\quad S^{-1}T_1S=T_2,\quad S^{-1}T_2S=T_1^{\,a}T_2^{\,b},\quad T_1^{\,q}=T_2^{\,q}=1,$$
$$T_1T_2=T_2T_1.$$

Durch Transformation mit der Operation S gehen die Operationen T_1 und T_2 in T_2 beziehungsweise $T_1^{\,a}T_2^{\,b}$ über, es geht also allgemein $T_1^{\,\alpha}T_2^{\,\beta}$ über in

$$S^{-1}T_1^{\,\alpha}SS^{-1}T_2^{\,\beta}S=T_1^{\,a\beta}T_2^{\,\alpha+b\beta}.$$

Die Vertauschung

$$J=\begin{pmatrix}T_1^{\,\alpha}\times T_2^{\,\beta}\\ T_1^{\,a\beta}\times T_2^{\,\alpha+b\beta}\end{pmatrix}\qquad(\alpha,\beta=0,1,2,\ldots q-1)$$

zwischen den q^2 Zeichen von der Form

$$T_1^{\alpha} \times T_2^{\beta}$$

stellt also den Isomorphismus dar, der bei der Transformation der Gruppe Γ mittelst der Operation S entsteht, und da S von der Ordnung p vorausgesetzt wird, so ist auch

$$J^p = 1.$$

Umgekehrt: *Wenn die Zahlen a und b mod. q so gewählt sind, dass J einen Isomorphismus der Gruppe Γ in sich darstellt, und dass die p^{te} Potenz dieses Isomorphismus gleich* 1 *ist, so stellen die Gleichungen* (63) *nach den Sätzen des* 18ten *und* 20sten *Paragraphen eine Gruppe von der Ordnung pq^2 vor. Jede von den gesuchten Gruppen ist in den Relationen* (63) *enthalten.*

§ 27.

Bestimmung des Exponenten a.

Um die noch fehlenden Bestimmungen auszuführen, betrachte man einen beliebigen Isomorphismus der Gruppe Γ in sich. Den Operationen T_1 und T_2 werden zwei Operationen

$$T_1' = T_1^k T_2^l, \qquad T_2' = T_1^m T_2^n$$

entsprechen. Offenbar darf nicht eine der Operationen T_1' und T_2' Potenz der andern sein, was nichts Anderes heisst, als dass $kn - lm$ nicht congruent Null sein darf in Beziehung auf den Modul q. Wenn andererseits $kn - lm$ der Null incongruent ist, so sind T_1' und T_2' zwei Operationen von der Ordnung q, welche die Gruppe Γ erzeugen; sie sind vertauschbar, und es zeigt sich, dass zwischen ihnen genau dieselben Relationen bestehen wie zwischen den Operationen T_1 und T_2. Lässt man also aus T_1 und T_2 die Operationen T_1' und T_2' werden, so wird aus $T_1^{\alpha} \times T_2^{\beta}$ die Operation $T_1'^{\alpha} \times T_2'^{\beta}$, und es stellt

$$(64) \quad \begin{pmatrix} T_1^{\alpha} \times T_2^{\beta} \\ T_1'^{\alpha} \times T_2'^{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{\alpha} & \times T_2^{\beta} \\ T_1^{k\alpha+m\beta} & \times T_2^{l\alpha+n\beta} \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots q-1),$$

falls $kn - lm$ der Null incongruent ist, einen Isomorphismus vor. Dieser möge jetzt kurz durch die Formel

$$J_1 = \begin{pmatrix} T_1, & T_2 \\ T_1^k T_2^l, & T_1^m T_2^n \end{pmatrix}$$

dargestellt werden.

Die Determinante

$$kn - lm$$

möge jetzt die Determinante des Isomorphismus J_1 genannt werden. Ist nun

$$J_2 = \begin{pmatrix} T_1, & T_2 \\ T_1^{k'} T_2^{l'}, & T_1^{m'} T_2^{n'} \end{pmatrix}$$

ein zweiter Isomorphismus, so findet sich, dass (s. § 8)

$$J_1 J_2 = \begin{pmatrix} T_1, & T_2 \\ T_1^{kk'+lm'} T_2^{kl'+ln'}, & T_1^{mk'+nm'} T_2^{ml'+nn'} \end{pmatrix},$$

und es ist die Determinante von $J_1 J_2$ congruent

$$(kn - lm)(k'n' - l'm').$$

Die Determinante eines Products zweier Isomorphismen ist also congruent dem Product der Determinanten der einzelnen Isomorphismen.

Wendet man dies auf den Isomorphismus J des vorigen Paragraphen an, der in der Formel

$$J = \begin{pmatrix} T_1, & T_2 \\ T_2, & T_1^a T_2^b \end{pmatrix}$$

dargestellt werden kann, so ergiebt sich die Determinante gleich $-a$, und aus der Formel

$$J^p = 1$$

folgt jetzt, dass

$$(-a)^p \equiv 1 \bmod. q \tag{65}$$

ist. Wäre nun $-a$ nicht congruent 1, so gehörte $-a$ mod. q zum Exponenten p, und es müsste p ein Theiler von $q-1$ sein. Es ist aber p als Theiler von $q+1$ vorausgesetzt. Gleichzeitig Theiler von $q-1$ und $q+1$ ist p nur, wenn $p = 2$. *Nimmt man also p als ungerade Primzahl an, so ist*

$$a \equiv -1 \bmod. q.$$

Wird andererseits a so gewählt, so ist J ein Isomorphismus.

§ 28.

Bedingungen für den Exponenten b.

Es ist also jetzt, indem wir $p > 2$ setzen,

$$J = \begin{pmatrix} T_1, & T_2 \\ T_2, & T_1^{-1} T_2^b \end{pmatrix},$$

und es berechnen sich successive die Potenzen des Isomorphismus folgendermassen (vergl. auch § 8):

$$J^2 = \begin{pmatrix} T_1, & T_2 \\ T_1^{-1} T_2^b, & T_1^{-b} T_2^{b^2-1} \end{pmatrix},$$

$$J^3 = \begin{pmatrix} T_1, & T_2 \\ T_1^{-b} T_2^{b^2-1}, & T_1^{-(b^2-1)} T_2^{b^3-2b} \end{pmatrix},$$

$$J^4 = \begin{pmatrix} T_1, & T_2 \\ T_1^{-(b^2-1)} T_2^{b^3-2b}, & T_1^{-(b^3-2b)} T_2^{b^4-3b^2+1} \end{pmatrix}$$

. . . . . .

Man findet überhaupt die Formel

$$J^n = \begin{pmatrix} T_1, & T_2 \\ T_1^{-\varphi_{n-2}(b)} T_2^{\varphi_{n-1}(b)}, & T_1^{-\varphi_{n-1}(b)} T_2^{\varphi_n(b)} \end{pmatrix},$$

wobei sich die Reihe der Functionen $\varphi_n(b)$ durch die Bedingungen

$$(66) \qquad \begin{cases} \varphi_n(b) = b\,\varphi_{n-1}(b) - \varphi_{n-2}(b), \\ \varphi_{-1}(b) = 0, \\ \varphi_0(b) = 1 \end{cases}$$

bestimmt. Die Allgemeingültigkeit dieses für J^n gefundenen Resultats kann ohne Weiteres dadurch erhärtet werden, dass man aus der Formel von J^n die von $J^n \cdot J$ berechnet und dann den Schluss von n auf $n+1$ anwendet. Es zeigt zugleich eine genauere Ueberlegung, dass die Brüche

$$\frac{\varphi_0(b)}{\varphi_1(b)}, \frac{\varphi_1(b)}{\varphi_2(b)}, \frac{\varphi_2(b)}{\varphi_3(b)}, \ldots$$

die Näherungsbrüche des unendlichen Kettenbruchs

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b} - \frac{1}{b} - \ddots$$

sind, wesshalb auch die Gleichung

$$(67) \qquad \varphi_{n-1}^2(b) - \varphi_n(b)\,\varphi_{n-2}(b) = 1$$

allgemein besteht.

Nun soll J^p gleich dem identischen Isomorphismus sein. Es ergiebt sich also aus der Formel von J^n, dass die Zahlen $\varphi_{p-2}(b)$, $\varphi_{p-1}(b)$, $\varphi_p(b)$ mod. q beziehungsweise congruent $-1, 0, 1$ sein müssen. Vermöge der für die Functionen $\varphi_n(b)$ bestehenden recurrenten Gleichung (vergl. (66)) kann aber die Bedingung für $\varphi_{p-2}(b)$ weggelassen werden. *Es ist daher der Exponent b lediglich den Bedingungen*

$$(68) \qquad \begin{cases} \varphi_p(b) \equiv +1 \bmod. q, \\ \varphi_{p-1}(b) \equiv 0 \end{cases}$$

zu unterwerfen.

§ 29.

Feststellung der Kategorie. Folgerungen.

Nimmt man $a \equiv -1$ mod. q und b den Bedingungen (68) gemäss, so stellen die Relationen (63) eine Gruppe G von der Ordnung pq^2 dar. Ehe ich die Bedingungen (68) auflöse, will ich zeigen, dass die vierte Kategorie vorliegt, wenn die Bedingungen erfüllt sind. Jedenfalls besitzt die Gruppe G eine ausgezeichnete Untergruppe Γ von der Ordnung q^2, diese Gruppe Γ (s. § 23) ist die einzige Untergruppe der

Ordnung q^2 und ist nicht cyklisch. Vermöge der Eintheilung des 22ten Paragraphen liegt also die dritte oder vierte Kategorie vor, vorausgesetzt, dass wir nicht etwa die erste Kategorie haben. Letzteres ist ausgeschlossen, denn die Gleichungen (63) zeigen sofort, dass die Operationen der Gruppe G nicht alle mit einander vertauschbar sind. Es würde aber die dritte Kategorie verlangen, dass p ein Theiler von $l-1$ sein müsste, während wir jetzt p als Theiler von $q+1$ und als ungerade Primzahl voraussetzen. *Die durch die Relationen* (63) *definirte Gruppe G gehört also wirklich der vierten Kategorie an, wenn a und b in der angegebenen Weise bestimmt werden.*

Es wird also jede der in Γ enthaltenen Untergruppen von der Ordnung q durch die Transformation mit der Operation S geändert werden (vergl. § 22). Die Transformation der ganzen Gruppe Γ mit Hilfe von S ergiebt den Isomorphismus

$$J = \begin{pmatrix} T_1, & T_2 \\ T_2, & T_1^{-1} T_2^{b} \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man nun einen beliebigen Isomorphismus J_1, so führt dieser die Operation $T_1^{\alpha} T_2^{\beta}$ über in

$$T_1^{k\alpha+m\beta}\, T_2^{l\alpha+n\beta}$$

(vergl. (64)); er führt also die Operation $T_1^{\alpha} T_2^{\beta}$ in eine Potenz ihrer selbst über, wenn

69) $$\alpha(l\alpha + n\beta) - \beta(k\alpha + m\beta) \equiv 0 \bmod. q.$$

Es wird somit der Isomorphismus J_1 eine in Γ enthaltene Untergruppe von der Ordnung q dann und nur dann ungeändert lassen, wenn α und β der Congruenz (69) gemäss bestimmt werden können, ohne dass die dabei beide der Null congruent werden. Wird dies auf den Isomorphismus J angewendet, so folgt daraus, dass die Congruenz

$$\alpha^2 + b\alpha\beta + \beta^2 \equiv 0 \bmod. q$$

nach α und β aufgelöst nur die Lösung

$$\alpha \equiv \beta \equiv 0$$

zulässt. Dies kann auch so ausgedrückt werden: *wenn von den Primzahlen p und q gilt, dass p ungerade und $q+1$ ein Vielfaches von p ist, und wenn die Zahl b den Bedingungen* (68) *gemäss gewählt wird, so ist die ganze Function*

$$x^2 + bx + 1$$

in Beziehung auf den Modul q irreducibel.

§ 30.

Die Galois'schen Imaginären.

Wenn die Bedingungen erfüllt sind, so hat die Congruenz

$$x^2 + bx + 1 \equiv 0 \bmod. q \tag{70}$$

im gewöhnlichen Sinne des Wortes keine Lösung; man kann aber nach dem Vorgang von Galois eine imaginäre Zahl als Wurzel der Congruenz einführen; gerade dadurch werden die Bedingungen (68) in sehr einfacher Weise aufgelöst. Eine strenge Begründung der Galois'schen Imaginären hat J. A. Serret gegeben.*) Es handelt sich dabei im Grund um die Einführung von *Modulsystemen*.**)

Die hier in Betracht kommenden Modulsysteme sind von specieller Art; sie bestehen aus einer Primzahl q und einer ganzen Function $F(x)$, die selbst modulo q irreducibel ist und ganzzahlige Coefficienten hat. Es werden nun die ganzen ganzzahligen Functionen der Variabeln x in Beziehung auf das Modulsystem $[q, F(x)]$ betrachtet. Diese Functionen können, falls ν der Grad von $F(x)$ ist, alle mod. $[q, F(x)]$ auf die Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{\nu-1} x^{\nu-1}$$

gebracht werden, wobei jeder Coefficient die Werthe von 0 bis $q-1$ annehmen kann. So entstehen q^ν Ausdrücke, die in Beziehung auf das Modulsystem incongruent sind; unter den Ausdrücken sind q von s frei, und unter diesen ist einer die Null. Das Product von zwei Functionen kann nur dann der Null congruent sein, wenn eine der Functionen der Null congruent ist. Es gelten nun verschiedene fruchtbare Sätze, von denen ich die folgenden gebrauchen werde:

1) Jede ganze ganzzahlige, der Null incongruente Function X von x gehört mod. $[q, F(x)]$ zu einem Exponenten m; dieser ist definirt als die kleinste Zahl, für die

$$X^m \equiv 1 \bmod. [q, F(x)].$$

Dabei ist m ein Theiler von $q^\nu - 1$, und es kann die Gleichung

$$X^x \equiv 1 \bmod. [q, F(x)]$$

nur dadurch bestehen, dass x ein Vielfaches von m ist.

2) Nimmt man irgend einen Theiler m von $q^\nu - 1$ an, so existiren Functionen, die zum Exponenten m gehören;

*) Vergl. Cours d'Algèbre Supérieure, cinquième édition 1885, t. II, section III, chapitre III.

**) Dieser Begriff ist neuerdings besonders von Kronecker betont worden. Vergl. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. 1882, pag. 72.

ist X_0 eine solche Function, so sind alle diese Functionen in der Formel X_0^n dargestellt, wo n alle Reste mod. m durchläuft, die zu m relativ prim sind.

3) Ist $\Phi(x)$ eine Function, die mod. q gleichfalls irreducibel und vom Grad ν ist, so hat die Congruenz

$$\Phi(\xi) \equiv 0 \text{ mod. } [q, F(x)]$$

gerade ν incongruente Functionen von x zu Lösungen. Ist X eine von diesen Lösungen, so stellen

$$X,\ X^q,\ X^{q^2},\ \ldots\ X^{q^{\nu-1}}$$

die ganze Reihe der Lösungen dar, und wenn ausserdem a der Coefficient von ξ^ν in der Function $\Phi(\xi)$ ist, so gilt auch die Zerlegung

$$\Phi(\xi) \equiv a(\xi - X)(\xi - X^q)(\xi - X^{q^2})\ldots(\xi - X^{q^{\nu-1}}) \text{ mod. } [q, F(x)].$$

Es wird also das Gebiet der Zahlen, die mod. q betrachtet werden, zu dem Gebiet der ganzen ganzzahligen Functionen von x erweitert, die mod. $[q, F(x)]$ betrachtet werden, und diese Functionen sind eben die Imaginären von Galois. In unserem Fall kann man, *falls q ungerade ist, einen quadratischen Nichtrest s des Moduls q ein für allemal wählen und die Function $F(x)$ mit $x^2 - s$ identificiren; ist aber $q = 2$, so setze man* $F(x) = x^2 + x + 1$. Die Congruenz (70), deren linke Seite mod. q irreducibel ist, hat nun zwei imaginäre Wurzeln j und j^q, und es ist

$$j + j^q \equiv -b \text{ mod. } [q, F(x)]$$

und

$$j^{q+1} \equiv 1 \text{ mod. } [q, F(x)]. \tag{71}$$

§ 31.

Auflösung der für den Exponenten b gefundenen Bedingungen.

Setzt man nun für b den imaginären Ausdruck $-(j + j^q)$ in die Functionen $\varphi_n(b)$ des 28ten Paragraphen ein, so findet man mit Rücksicht auf (71):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(b) &\equiv -(j + j^q) \\ \varphi_2(b) &\equiv j^2 + 1 + j^{2q} \\ \varphi_3(b) &\equiv -(j^3 + j + j^q + j^{3q}) \\ \varphi_4(b) &\equiv j^4 + j^2 + 1 + j^{2q} + j^{4q} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{ mod. } [q, F(x)].$$

Daraus ergiebt sich aber

$$\left.\begin{aligned} -(j-j^q)\,\varphi_1(b) &\equiv j^2 - j^{2q} \\ +(j-j^q)\,\varphi_2(b) &\equiv j^3 - j^{3q} \\ -(j-j^q)\,\varphi_3(b) &\equiv j^4 - j^{4q} \\ +(j-j^q)\,\varphi_4(b) &\equiv j^5 - j^{5q} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \end{aligned}\right\} \text{mod. } [q, F(x)],$$

woraus durch Induction gefunden wird:

(72) $$(-1)^n (j-j^q)\,\varphi_n(b) \equiv j^{n+1} - j^{(n+1)q} \text{ mod. } [q, F(x)].$$

Der strenge Nachweis für die Allgemeingiltigkeit der letzten Congruenz ergiebt sich mit Hilfe der recurrenten Gleichung

$$\varphi_n(b) = b\,\varphi_{n-1}(b) - \varphi_{n-2}(b)$$

durch den Schluss von n auf $n+1$.

Wenn man jetzt in der Congruenz (72) zuerst $n = p$ und dann $n = p-1$ setzt und die Congruenzen (68) benutzt, findet man

$$\left.\begin{aligned} (j^q - j) &\equiv j^{p+1} - j^{(p+1)q} \\ 0 &\equiv j^p - j^{pq} \end{aligned}\right\} \text{mod. } [q, F(x)],$$

wobei p wieder als ungerade angenommen worden ist. Die beiden Congruenzen geben combinirt

$$j^q - j \equiv j^{p+1} - j^{pq} \cdot j^q \equiv j^{p+1} - j^p \cdot j^q \equiv j^p (j - j^q)$$

und also auch

$$(j^q - j)(1 + j^p) \equiv 0 \text{ mod. } [q, F(x)].$$

Nun sind j und j^q die beiden Wurzeln der Congruenz (70) und sind somit mod. $[q, F(x)]$ verschieden. Somit ist $1 + j^p$ der Null congruent, d. h.

$$(-j)^p \equiv +1 \text{ mod. } [q, F(x)].$$

Vermöge dieser letzten Congruenz kann $-j$ nur zum Exponenten 1 oder zum Exponenten p gehören. Da nun die Function $-j$ die Variable x enthalten muss, d. h. $-j$ keine reelle, sondern eine im Sinne von Galois imaginäre Zahl ist, so kann $-j$ nicht zum Exponenten 1 gehören. Es ist also

$$b \equiv -j + (-j)^q \text{ mod. } [q, F(x)],$$

wobei $-j$ eine mod. $[q, F(x)]$ zum Exponenten p gehörige Function bedeutet.

Dieser Gedankengang kann umgekehrt werden. Die Anzahl der in Beziehung auf das angenommene Modulsystem der Null incongruenten Functionen ist $q^2 - 1$. Von dieser Anzahl ist p ein Theiler, weil p als Theiler von $q+1$ vorausgesetzt wurde. Es existiren also Functionen, die mod. $[q, F(x)]$ zum Exponenten p gehören. Ist nun i eine solche Function, so dass also auch

$$i^{q+1} \equiv 1 \bmod. [q, F(x)],$$

so kann gezeigt werden, dass $i + i^q \bmod. [q, F(x)]$ einer von x freien Function, d. h. einer (reellen) Zahl b congruent ist, und dass b den Bedingungen (68) genügt. Zunächst ergiebt sich nämlich, dass i keine reelle Zahl ist, denn es müsste sonst der Exponent, zu dem i gehört, die Zahl $q - 1$ theilen, was unmöglich ist, da der Exponent gleich p, und p ungerade als Theiler von $q + 1$ angenommen worden ist. Es ergiebt sich ferner, dass

$$\left.\begin{aligned} i &\equiv a_0 + a_1 x \\ i^2 &\equiv a_0' + a_1' x \end{aligned}\right\} \bmod. [q, F(x)],$$

und es muss desshalb drei Zahlen a, b, c geben, so dass

$$a i^2 - b i + c \equiv 0 \bmod. [q, F(x)].$$

Von den drei Zahlen ist eine als der Null incongruent zu denken; da aber i keine reelle Zahl ist, muss jedenfalls a incongruent der Null sein. Man kann aber jetzt auch $a = 1$ setzen, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen. Es hat nun die Congruenz

$$\xi^2 - b\xi + c \equiv 0 \bmod. [q, F(x)]$$

die Wurzel i. Die andere Wurzel ist also i^q, und es zeigt sich, dass

$$\left.\begin{aligned} i + i^q &\equiv b \\ i \cdot i^q &\equiv c \end{aligned}\right\} \bmod. [q, F(x)],$$

woraus zugleich folgt, dass

$$c \equiv 1 \bmod. q$$

ist.

Setzt man wieder $i + i^q$ an Stelle von b in die Functionen $\varphi_n(b)$ ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} (i - i^q)\, \varphi_p(b) &\equiv i^{p+1} - i^{(p+1)q} \\ (i - i^q)\, \varphi_{p-1}(b) &\equiv i^p - i^{pq} \end{aligned}\right\} \bmod. [q, F(x)].$$

Hieraus ergiebt sich vermöge der Congruenz

$$i^p \equiv 1 \bmod. [q, F(x)],$$

dass

$$\left.\begin{aligned} (i - i^q)\left(\varphi_p(b) - 1\right) &\equiv 0 \\ (i - i^q)\, \varphi_{p-1}(b) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod. [q, F(x)],$$

und somit

$$\left.\begin{aligned} \varphi_p(b) &\equiv 1 \\ \varphi_{p-1}(b) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod. [q, F(x)].$$

Nun treten in den beiden letzten Congruenzen sowohl rechts wie links nur Zahlen auf, es bestehen deshalb diese Congruenzen auch in Beziehung auf den einzigen Modul q, und es sind also die Bedingungen (68) erfüllt.

Bedeutet nun i eine bestimmte Function, die mod. $[q, F(x)]$ *zum Exponenten p gehört, so sind die Bedingungen* (68) *gleichwerthig mit der Bedingung*

$$b \equiv i^k + i^{kq} \text{ mod. } [q, F(x)] \quad (k = 1, 2, \ldots p-1).$$

Es ist leicht zu sehen, was übrigens für das Folgende nicht in Betracht kommt, dass sich so $\frac{p-1}{2}$ verschiedene Werthe von b ergeben.

§ 32.

Identität der gefundenen Gruppen.

Setzt man in den Gleichungen (63) für a den Werth -1 und für b alle die gefundenen Lösungen der Reihe nach ein, so ergiebt sich nur eine einzige Gruppe. Führt man nämlich die Operation

$$S' = S^k \qquad (k = 1, 2, \ldots p-1)$$

ein, so zeigt sich, dass die Transformation der Gruppe Γ mittelst der Operation S' den Isomorphismus

$$\begin{pmatrix} T_1 & , & T_2 \\ T_1^{-\varphi_{k-2}(b)} T_2^{\varphi_{k-1}(b)}, & & T_1^{-\varphi_{k-1}(b)} T_2^{\varphi_k(b)} \end{pmatrix}$$

ergiebt (vergl. § 28), und man erhält nunmehr die Gleichungen:

$$S'^p = 1, \quad S'^{-1} T_1 S' = T_1^{-\varphi_{k-2}(b)} T_2^{\varphi_{k-1}(b)},$$

$$S'^{-1} T_2 S' = T_1^{-\varphi_{k-1}(b)} T_2^{\varphi_k(b)}, \quad T_1^q = T_2^q = 1, \quad T_1 T_2 = T_2 T_1.$$

Führt man aber noch die Operation

$$T_2' = T_1^{-\varphi_{k-2}(b)} T_2^{\varphi_{k-1}(b)}$$

ein, so sind die folgenden Gleichungen richtig:

$$(73) \quad \begin{cases} S'^p = 1, \quad T_1^q = T_2'^q = 1, \quad T_1 T_2' = T_2' T_1. \quad S'^{-1} T_1 S' = T_2', \\ S'^{-1} T_2' S' = T_1^{\varphi_{k-2}(b)\varphi_k(b) - \varphi_{k-1}^2(b)} \cdot T_2'^{\varphi_k(b) - \varphi_{k-2}(b)}. \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem hat genau dieselbe Form wie das System (63), und es ist vermöge der Gleichung (67) auch hier der Exponent a gleich -1. Es ist nur jetzt

$$b' = \varphi_k(b) - \varphi_{k-2}(b)$$

an Stelle von b getreten. Wenn man nun statt b die congruente Function $i + i^q$ einsetzt, so ergiebt sich (vergl. (72))

$$(i - i^q)\left(\varphi_k(b) - \varphi_{k-2}(b)\right) \equiv i^{k+1} - i^{(k+1)q} - i^{k-1} + i^{(k-1)q} \text{ mod. } [q, F(x)].$$

Weil aber i^{q+1} congruent 1 ist, so ist die rechte Seite congruent

$$i^{k+1} - i^{(k+1)q} - i^{k-1} \cdot i^{q+1} + i^{(k-1)q} i^{q+1} = (i^k + i^{kq})(i - i^q).$$

Es ist also

$$(i - i^q)\left(\varphi_k(b) - \varphi_{k-2}(b)\right) \equiv (i - i^q)(i^k + i^{kq}) \bmod. [q, F(x)],$$

und somit

$$b' = \varphi_k(b) - \varphi_{k-2}(b) \equiv i^k + i^{kq} \bmod. [q, F(x)].$$

Vermöge der in der Zahl k enthaltenen Willkürlichkeit kann also b' mit jeder Lösung der Bedingungen (68) identificirt werden, wenn zugleich b eine bestimmte von diesen Lösungen bedeutet. Nun wissen wir bereits, dass die Gleichungen (63) unter den für a und b gefundenen Bedingungen eine Gruppe G der vierten Kategorie definiren, es kann also die Operation

$$S'^{-1} T_1 S' = T_2'$$

nicht in T_1 ausdrückbar sein (§ 22). Somit wird die Gruppe G aus T_1, T_2' und S' erzeugt, und da diese Operationen die Gleichungen (73) befriedigen, so erhält man nach § 6 dieselbe Gruppe, wenn man die Gleichungen (73) statt (63) als definirende Relationen ansieht.

§ 33.

Der Fall $p = 2$. Zusammenfassung.

Es ist noch der Fall zu behandeln, in dem $p = 2$ ist. In den letzten Paragraphen ist p als ungerade angenommen worden, dagegen sind die Betrachtungen des 27ten Paragraphen bis zur Congruenz (65) einschliesslich ganz allgemein. Diese Congruenz hat aber, falls $p = 2$ ist, zwei Lösungen

$$a \equiv \pm 1 \bmod. q.$$

Nimmt man $a \equiv -1$ an, so gilt die im 28ten Paragraphen für J^2 berechnete Formel. Diese Formel lässt aber sofort erkennen, dass J^2 nicht gleich dem identischen Isomorphismus sein kann, während doch andererseits die Bedingung

$$J^p = 1$$

früher als nothwendig gefunden wurde.

Man wird also $a \equiv +1$ zu setzen haben. Der Isomorphismus J ist dann gleich

$$\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2 & T_1 T_2^b \end{pmatrix},$$

und weil

$$J^2 = 1$$

sein soll, ergiebt sich

$$b \equiv 0 \bmod. q.$$

Die Gleichungen (63) stellen auch bei dieser Bestimmung der Exponenten a und b eine Gruppe von der Ordnung $2q^2$ dar, allein diese

Gruppe gehört nicht in die Kategorie, die uns hier beschäftigt. Es ist nämlich jetzt

$$S^{-1}T_1T_2S = (S^{-1}T_1S)(S^{-1}T_2S) = T_2T_1 = T_1T_2,$$

und es ist deshalb die aus den Potenzen des Products T_1T_2 bestehende Gruppe der Ordnung q in der Gesammtgruppe der Ordnung $2q^2$ ausgezeichnet enthalten. Es liegt also die vierte Kategorie nicht vor.

Somit existirt nur dann eine Gruppe der vierten Kategorie, und zwar eine einzige, wenn p ungerade und Theiler von $q+1$ ist. Diese Gruppe erhält man aus den definirenden Relationen (63) *indem man $a = -1$ und für b irgend eine gemeinsame Lösung der Congruenzen* (68) *setzt.*

§ 34.

Zahlenbeispiel.

Für $p = 3$ und $q = 2$ ergiebt sich die Tetraedergruppe. Setzen wir $p = 3$ und $q = 5$, so lauten die Congruenzen (68) folgendermassen:

$$\left.\begin{aligned} b^3 - 2b &\equiv 1 \\ b^2 - 1 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{mod. } 5.$$

Sie ergeben die eine gemeinschaftliche Lösung $b \equiv -1 \bmod 5$. Um dieses Resultat mit der Galois'schen Imaginärentheorie in Zusammenhang zu bringen, wähle man das Modulsystem $[5, x^2 - 2]$. Die Potenzen von x selbst ergeben die Reste

$$x,\ 2,\ 2x,\ 4,\ 4x,\ 3,\ 3x,\ 1, \ldots.$$

Versucht man es nun mit

$$\lambda = 1 + x,$$

so erhält man

$$\lambda^2 \equiv 3 + 2x, \quad \lambda^3 \equiv 2 \bmod [5, x^2 - 2],$$

und die Potenzen von λ sind der Reihe

$$\lambda,\ \lambda^2,\ 2,\ 2\lambda,\ 2\lambda^2,\ 4,\ 4\lambda,\ 4\lambda^2,\ 3,\ 3\lambda,\ 3\lambda^2,\ 1, \ldots$$

congruent. Das dritte Glied der Reihe ist eine Zahl, ebenso das 6^{te}, 9^{te}, 12^{te} etc., die andern Glieder sind jedoch nicht (reellen) Zahlen congruent. Es ist also in der That das 12^{te} Glied das erste, das der Eins congruent ist. Somit wird λ^4 zum Exponenten 3 gehören. Wir setzen daher

$$i \equiv \lambda^4 \equiv 2(1+x) \bmod [5, x^2 - 2].$$

Nun ist allemal b durch die Congruenz

$$b \equiv i + i^q \bmod [q, F(x)]$$

zu bestimmen. Hier ist $q = 5$ und

$$i^5 \equiv 2^5(1+x)^5 \equiv 2(1+x^5) \equiv 2(1-x) \bmod [5, x^2 - 2],$$

woraus man

$$b \equiv 4 \equiv -1 \bmod 5$$

erhält.

Es repräsentiren also die Gleichungen

$$S^3 = 1, \quad S^{-1}T_1S = T_2, \quad S^{-1}T_2S = T_1^{-1}T_2^{-1}, \quad T_1^5 = T_2^5 = 1,$$
$$T_1T_2 = T_2T_1$$

die einzige Gruppe 75ter Ordnung, die der vierten Kategorie angehört.

§ 35.

Bildung der Gruppen der fünften Kategorie.

Wir haben jetzt eine Gruppe der Ordnung pq^2 zu bilden, die p Untergruppen $q^{2\,\text{ter}}$ Ordnung und auch Operationen von der Ordnung q^2 enthält. Es ist zugleich (§ 22) eine ausgezeichnete Untergruppe p^{ter} Ordnung vorhanden. Bedeutet nun T eine Operation der Ordnung p, so muss diese Operation in der ausgezeichneten Untergruppe enthalten sein. Wenn wir jetzt mit S eine Operation der Gesammtgruppe G bezeichnen, und S die Ordnung q^2 besitzt, so müssen die Gleichungen bestehen:

(74) $$S^{q^2} = 1, \quad S^{-1}TS = T^a, \quad T^p = 1,$$

und es erzeugen S und T die Gruppe G.

Denkt man sich die Operation T gerade q^2-mal mit der Operation S transformirt, so ergiebt sich, dass

$$a^{q^2} \equiv 1 \bmod p$$

sein muss. Umgekehrt: wenn diese Congruenz erfüllt ist, so definiren die Gleichungen (74) nach den Sätzen des 18ten und 20ten Paragraphen eine Gruppe G von der Ordnung pq^2. Damit aber G der fünften Kategorie angehört, darf a mod. p nicht der Eins congruent sein, denn es würden die Gleichungen (74) für $a = 1$ eine Gruppe von lauter vertauschbaren Operationen ergeben. Es ist also für a eine Zahl zu setzen, die mod. p zum Exponenten q oder zum Exponenten q^2 gehört; in beiden Fällen muss q, im zweiten auch q^2 als Theiler von $p - 1$ vorausgesetzt werden. Wenn aber der Exponent a so bestimmt wird, wie eben verlangt wurde, so kann auch gezeigt werden, dass die Gruppe G in die fünfte Kategorie gehört. Man hat zu diesem Zweck eigentlich nur zu beweisen, dass G mehr als eine Untergruppe von der Ordnung q^2 enthält. Wäre aber nur eine solche Untergruppe vorhanden, so enthielte G zwei ausgezeichnete Untergruppen von den Ordnungen q^2 und p, die offenbar nur die identische Operation gemeinsam hätten, und aus deren Operationen alle Operationen der Gesammtgruppe wieder zusammengesetzt werden könnten. Daraus aber würde

nothwendig folgen*), dass G als directes Product der zwei Gruppen von den Ordnungen q^2 und p darstellbar wäre. Gruppen von diesen Ordnungen besitzen vertauschbare Operationen. Demnach müsste G selbst der ersten Kategorie angehören, was doch bei der erwähnten Bestimmung von a den Gleichungen (74) widerspricht. *Die Relationen* (74) *definiren also, wenn a mod. p zum Exponenten q oder q^2 gehört, eine Gruppe der fünften Kategorie aus der Ordnung pq^2. Wenn q kein Theiler von $p-1$ ist, so existirt keine Gruppe der fünften Kategorie. Im andern Fall findet man alle Gruppen der Kategorie auf die eben genannte Weise.*

§ 36.

Anzahl der Gruppen in der fünften Kategorie.

Setzt man jetzt

$$S_1 = S^k,$$

so bestehen die Gleichungen

$$S_1^{q^2} = 1, \quad S_1^{-1} T S_1 = T^{a^k}, \quad T^p = 1. \tag{75}$$

Betrachtet man diese als definirende Relationen, so müssen sie, wenn k zu q relativ prim ist, dieselbe Gruppe G ergeben wie die Relationen (74), wie aus § 6 hervorgeht. Bedeutet a einen bestimmten von den mod. p zum Exponenten q oder q^2 gehörenden Resten, so kann a^k irgend einem zum Exponenten q beziehungsweise q^2 gehörenden Rest congruent angenommen werden.

Wenn also q ein Theiler von $p-1$ ist, so werden die Gleichungen (74) stets dieselbe Gruppe ergeben, welche der mod. p zum Exponenten q gehörenden Zahlen man auch für a setzen mag. Ist aber $p-1$ auch durch q^2 theilbar, so kann man für a eine Zahl setzen, die mod. p zum Exponenten q gehört oder eine solche, die zum Exponenten q^2 gehört. Man bekommt im ersten Fall nur eine Gruppe und ebenso im zweiten Fall nur eine Gruppe. Die in den beiden Fällen sich ergebenden Gruppen sind aber verschieden. Wenn nämlich a_0 zum Exponenten q und a_1 zum Exponenten q^2 gehört, und G_0 durch die Relationen

$$S^{q^2} = 1, \quad S^{-1} T S = T^{a_0}, \quad T^p = 1,$$

ebenso G_1 durch

$$S'^{q^2} = 1, \quad S'^{-1} T' S' = T'^{a_1}, \quad T'^p = 1$$

definirt wird, so enthält G_0 eine Gruppe Γ_0, die aus den Potenzen von T besteht, und G_1 eine Gruppe Γ_1, die aus der Operation T' erzeugt wird. Nun ist Γ_0 die einzige Untergruppe von der Ordnung p in der Gruppe G_0 und Γ_1 die einzige Untergruppe p^{ter} Ordnung in G_1.

*) Vergl. z. B. Mathematische Annalen Bd. 34, p. 35.

Liessen sich also die Gruppen G_0 und G_1 holoedrisch isomorph auf einander beziehen, so müssten dabei Γ_0 und Γ_1 sich entsprechen. Damit steht aber im Widerspruch, dass, was sofort gezeigt werden soll, die Gruppe G_0 sich in Beziehung auf ihre Untergruppe Γ_0 anders verhält als G_1 in Beziehung auf Γ_1. Wenn man nämlich die Operation T von Γ_0 mit irgend einer Operation $S^r T^s$ von G_0 transformirt, so erhält man

$$T^{a^r}.$$

Es geht also jede Operation der Gruppe Γ_0 in sich über, wenn sie mit irgend einer der pq Operationen

$$S^{tq} T^s \begin{pmatrix} t = 0, 1, \ldots q-1 \\ s = 0, 1, \ldots p-1 \end{pmatrix}$$

transformirt wird. Aehnlich findet man aber, dass im Gegensatz dazu die Operationen von Γ_1 geändert werden durch Transformation mit jeder nicht in Γ_1 selbst enthaltenen Operation von G_1. Also sind G_0 und G_1 verschieden.

Wir haben jetzt das Resultat: *Wenn q kein Theiler von $p-1$ ist, so existirt keine Gruppe der fünften Kategorie. Wenn q ein einfacher Theiler von $p-1$ ist, so existirt eine solche Gruppe; man erhält sie, indem man in* (74) *für a irgend einen mod. p zum Exponenten q gehörenden Rest setzt. Ist q^2 Theiler von $p-1$, so hat man dieselbe Gruppe und ausserdem noch eine zweite, die man erhält, indem man a mod. p zum Exponenten q^2 gehören lässt.*

§ 37.

Sechste Kategorie. Zerfallende Gruppen aller Kategorien.

Von der fünften Kategorie unterscheidet sich die sechste nur dadurch, dass bei dieser keine Operation von der Ordnung q^2 existiren soll. Die Gruppe G, die wir bilden wollen, enthält Untergruppen von der Ordnung q^2, welche dieses Mal nach der Formel

$$[q]\ [q]$$

gebaut sein müssen. Wir wählen zunächst aus einer solchen Untergruppe zwei Operationen S_1 und S_2 aus, von denen keine eine Potenz der andern Operation ist. Bedeutet noch T eine nichtidentische Operation der ausgezeichneten Untergruppe von der Ordnung p, so müssen die Gleichungen

$$(76) \qquad S_1^q = S_2^q = 1, \quad S_1 S_2 = S_2 S_1, \quad S_1^{-1} T S_1 = T^a,$$
$$S_2^{-1} T S_2 = T^b, \quad T^p = 1$$

gelten. Wenn hier a nicht congruent 1 ist in Beziehung auf den Modul p, so gehört a zum Exponenten q; dasselbe gilt auch von b.

Falls nun nicht von vornherein einer der Exponenten a und b congruent 1 ist, kann man dies erreichen. Gehören nämlich a und b zum Exponenten q, so definire man a' durch die Congruenz

$$a\,a' \equiv 1 \bmod. p.$$

Es gehört dann auch a' zum Exponenten q, und man kann eine Zahl k so bestimmen, dass

$$a' \equiv b^k \bmod. p,$$

wobei k nicht durch q theilbar wird. Setzt man jetzt

$$S_3 = S_1 S_2^k,$$

so erhält man:

$$(77) \qquad S_1^q = S_3^q = 1, \quad S_1 S_3 = S_3 S_1, \quad S_1^{-1} T S_1 = T^a;$$
$$S_3^{-1} T S_3 = T, \quad T^p = 1.$$

Diese Relationen müssen auch die gesuchte Gruppe definiren. Hätte man also in (76) den Exponenten $b = 1$ gesetzt, so würde man der Allgemeinheit keinen Abbruch gethan haben.

Nun darf aber a nicht der Eins congruent gesetzt werden, weil sonst alle Operationen mit einander vertauschbar sein würden. a gehört also mod. p zum Exponenten q, wesshalb q als Theiler von $p-1$ zu denken ist. Aus den Gleichungen (77) geht hervor, dass S_3 mit allen anderen Operationen vertauschbar ist. S_3 erzeugt eine Gruppe von der Ordnung q; S_1 und Θ erzeugen eine andere Gruppe von der Ordnung pq. Dem directen Product dieser beiden Gruppen muss also die gesuchte Gruppe G gleich sein, und es zeigt sich andererseits, dass dieses Product die charakteristischen Eigenschaften der Kategorie besitzt.

Also: *nur, wenn q ein Theiler von $p-1$ ist, giebt es eine Gruppe der 6ten Kategorie und zwar eine einzige. Diese ist eine zerfallende Gruppe und zwar gleich dem directen Product der Gruppe q^{ter} Ordnung und der nichtcyklischen Gruppe pq^{ter} Ordnung.*

Geht man andererseits von der Aufgabe aus, eine zerfallende Gruppe G von der Ordnung pq^2 zu bestimmen, so stelle man G als directes Product von zwei Gruppen dar. Sind p und q^2 die Ordnungen dieser zwei Gruppen, so ergiebt sich für G entweder die Formel $[p]\,[q^2]$ oder die Formel $[p]\,[q]\,[q]$, d. h. es ist dann G eine Gruppe der ersten Kategorie. Soll aber die zu bestimmende Gruppe G auch nichtvertauschbare Operationen besitzen, so ist sie dem directen Product einer Gruppe q^{ter} und einer Gruppe pq^{ter} Ordnung gleichzusetzen, wobei die letztere Gruppe selbst nichtvertauschbare Operationen enthalten muss. Ist also p Theiler von $q-1$ oder q Theiler von $p-1$, so giebt es eine dritte zerfallende Gruppe G von der Ordnung pq^2; diese ist im Vorhergehenden gebildet worden und gehört je nachdem der dritten oder sechsten Kategorie an.

Vierter Abschnitt.

Ordnung pqr.

§ 38.

Eintheilung. Erste Kategorie.

Setzt man voraus, dass je zwei Operationen einer Gruppe pqr^{ter} Ordnung mit einander vertauschbar sind, so kommt man auf die Formel

$$[p]\,[q]\,[r].$$

Die durch diese Formel gegebene Gruppe ist cyklisch; sie bilde für sich allein die *erste Kategorie* der Ordnung pqr.

Um nun die übrigen Gruppen dieser Ordnung einzutheilen, *nehmen wir p als die grösste von den drei Primzahlen an.* Nach den Sätzen von Cauchy und Sylow giebt es in der zu bildenden Gruppe G Untergruppen von der Ordnung p in der Anzahl

$$1 + Rp,$$

wobei diese Anzahl zugleich Theiler von qr ist. Weil aber jetzt $p > q$ und $p > r$ sein soll, kann die fragliche Anzahl nur 1 oder qr sein.

Angenommen, es sind qr Untergruppen p^{ter} Ordnung vorhanden, so giebt es in G gerade $qr(p-1)$ Operationen*) von der Ordnung p und ausserdem noch qr andere Operationen. Ich nehme jetzt auch $q > r$ an. Es giebt jedenfalls eine Untergruppe von der q^{ten} Ordnung, und wenn es mehr als eine giebt, so ist die Anzahl dieser Untergruppen mindestens $q+1$. Man fände nun mindestens $(q+1)(q-1)$ Operationen*) von der Ordnung q, während doch nur qr Operationen eine von p verschiedene Ordnung haben. Das ist widersprechend. Es giebt also nur eine Untergruppe von der Ordnung q, und diese ist desshalb in der Gesammtgruppe G ausgezeichnet enthalten. Bedeuten jetzt U und T Operationen von den Ordnungen q und r, so gehört U der ausgezeichneten Untergruppe q^{ter} Ordnung an, und es bestehen die Gleichungen

$$T^r = 1, \quad T^{-1}UT = U^a, \quad U^q = 1, \tag{78}$$

wobei zugleich

$$a^r \equiv 1 \bmod. q \tag{79}$$

sein muss. Nun ist ersichtlich, dass T und U eine Gruppe Γ von der Ordnung qr erzeugen. Die Operationen von Γ haben Ordnungen, die jedenfalls Theiler von qr sind, es besteht also Γ aus jenen qr Operationen, die vorhin nachgewiesen wurden als die einzigen, deren

*) Vergl. die Schlüsse im Anfang von § 22.

Ordnungen von p verschieden sind. Die Operationen der Gruppe Γ sind also in gewissem Sinn einzig in ihrer Art, und es folgt daraus, dass Γ eine ausgezeichnete Untergruppe der Gesammtgruppe ist.

Ich nehme jetzt aus der Gesammtgruppe G eine Operation S von der p^{ten} Ordnung. Weil die von U erzeugte Untergruppe q^{ter} Ordnung eine ausgezeichnete ist, so gilt die Gleichung

$$S^{-1}US = U^b,$$

wobei zugleich

$$b^p \equiv 1 \bmod. q.$$

Nun ist aber $p > q$ angenommen; es kann desshalb unmöglich p ein Theiler von $q - 1$ sein, und es hat also die letzte Congruenz nur die Lösung

$$b \equiv 1 \bmod. q.$$

Man findet somit

$$S^{-1}US = U, \tag{80}$$

d. h. es sind die Operationen S und U mit einander vertauschbar.

Die Congruenz (79) ergiebt nun, dass entweder $a \equiv 1 \bmod. q$ oder $a \bmod. q$ zum Exponenten r gehört. Macht man die erste Annahme, so sind (vergl. (78)) T und U mit einander vertauschbar; die Gruppe Γ, die aus T und U erzeugt wird, ist cyklisch und enthält nur eine Untergruppe r^{ter} Ordnung. Transformirt man diese Untergruppe mit Hilfe der Operation S, so geht sie als Untergruppe der ausgezeichneten Untergruppe Γ in eine Untergruppe r^{ter} Ordnung von Γ, also in sich selbst über. Es ergiebt sich also

$$S^{-1}TS = T^c,$$

und man findet, dass

$$c \equiv 1 \bmod. r$$

sein muss, ebenso wie das analoge Resultat für b gefunden worden ist. Demnach würden je zwei der Operationen S, T, U mit einander vertauschbar sein. Es könnte also nur die Gruppe

$$[p]\ [q]\ [r]$$

vorliegen. Dies widerspricht aber der Annahme, von der wir ausgegangen sind, dass in der Gruppe G mehrere Untergruppen p^{ter} Ordnung vorhanden sein sollten.

Wenn also diese Annahme überhaupt möglich ist, so muss sie unter der Voraussetzung weiter verfolgt werden, dass $a \bmod. q$ zum Exponenten r gehört. Transformirt man jetzt wieder die Operation T mit Hilfe von S, so kann nur behauptet werden, dass eine Operation der Gruppe Γ entsteht. Also:

$$S^{-1}TS = T^k U^l. \tag{81}$$

Nun ergiebt die mittlere von den Gleichungen (78):

$$(S^{-1}T^{-1}S)\,(S^{-1}US)\,(S^{-1}TS) = S^{-1}U^aS,$$

woraus mit Berücksichtigung von (80) und von (81)

$$(U^{-l}T^{-k})\,U(T^kU^l) = U^a$$

hervorgeht. Die linke Seite der letzten Gleichung ist aber gleich

$$U^{-l}(T^{-k}UT^k)\,U^l.$$

Aus (78) findet man noch

$$T^{-2}UT^2 = T^{-1}U^aT = (T^{-1}UT)^a = U^{a^2}, \quad T^{-3}UT^3 = U^{a^3}, \ldots .$$

Es ist also

$$U^{-l}(T^{-k}UT^k)\,U^l = U^{a^k}.$$

Somit ergiebt sich auch, dass

$$U^a = U^{a^k}$$

ist, woraus die Congruenz folgt:

$$a^{k-1} \equiv 1 \bmod. q.$$

Weil aber die Zahl a mod. q zum Exponenten r gehört, so bedeutet dies, dass

$$k - 1 \equiv 0 \bmod. r$$

ist.

Statt der Gleichung (81) hat man also jetzt die Relation

$$S^{-1}TS = TU^l.$$

Daraus folgt

$$S^{-2}TS^2 = (S^{-1}TS)\,(S^{-1}U^lS).$$

Weil aber S mit U vertauschbar ist, kann die rechte Seite in die Form

$$(TU^l)\,U^l = TU^{2l}$$

gesetzt werden. Ebenso findet man

$$S^{-3}TS^3 = TU^{3l}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Allgemein ist

$$S^{-\mu}TS^\mu = TU^{\mu l},$$

Wenn man nun in dieser Gleichung $\mu = p$ macht, so ergiebt sich

$$T = TU^{pl}$$

oder

$$pl \equiv 0 \bmod. q.$$

Der Exponent l ist also durch q theilbar anzunehmen. Im Ganzen hätte man nun die Gleichungen

$$S^p = 1, \quad S^{-1}TS = T, \quad S^{-1}US = U, \quad T^r = 1, \quad T^{-1}UT = U^a,$$
$$U^q = 1,$$

wobei a mod. q zum Exponenten r gehörte. Es liegt nun offenbar eine Gruppe vor, die das directe Product ist einer Gruppe p^{ter} und einer Gruppe $q^{r^{ter}}$ Ordnung. Die Gruppe, die wir gebildet haben, entspricht aber wieder nicht der Annahme, von der wir ausgegangen sind, denn sie enthält nur eine Untergruppe p^{ter} Ordnung. Jene An-

nahme kann also gar nicht verwirklicht werden, d. h. *jede Gruppe von der Ordnung pqr enthält eine einzige und desshalb ausgezeichnete Untergruppe von der Ordnung p, wenn p die grösste der Primzahlen p, q, r bedeutet.*

Wir haben nun schon eine Gruppe von der Ordnung pqr ausgesondert, welche die erste Kategorie bildet. Die *übrigen* Gruppen dieser Ordnung rechnen wir zur *zweiten Kategorie*, wenn eine Operation qr^{ter} Ordnung vorhanden ist, zur *dritten*, wenn dies nicht der Fall ist.

§ 39.

Zweite Kategorie.

Es sei jetzt T eine in der zu bildenden Gruppe G enthaltene Operation p^{ter} Ordnung, dann stellen nach dem Vorhergehenden die Potenzen von T die Operationen einer ausgezeichneten Untergruppe vor. Wir verlangen noch von der Gruppe G, dass sie eine Operation S von der Ordnung qr enthalte; es werden also die Gleichungen

$$S^{qr} = 1, \quad S^{-1}TS = T^a, \quad T^p = 1 \tag{82}$$

bestehen, und es ist

$$a^{qr} \equiv 1 \bmod. p. \tag{83}$$

Die Operationen S und T von der qr^{ten} und p^{ten} Ordnung erzeugen die Gesammtgruppe G. Damit also nicht je zwei Operationen von G mit einander vertauschbar sind, hat man S und T als nichtvertauschbar anzunehmen, d. h. es darf a mod. p nicht der Eins congruent sein. Wählt man hinwiederum für a irgend eine Zahl, die der gefundenen Congruenz (83) genügt, so definiren die Gleichungen (82) eine Gruppe pqr^{ter} Ordnung. Diese Gruppe gehört, wenn a mit der Eins incongruent ist, wirklich zur zweiten Kategorie.

Man kann jetzt in die Gleichungen (82) an Stelle von S die Operation

$$S_1 = S^k$$

einführen. Dazu ist nur nöthig, dass k zu qr relativ prim ist, denn sonst würden S_1 und T die Gruppe pqr^{ter} Ordnung nicht wieder erzeugen. Es ergeben sich die Gleichungen

$$S_1^{qr} = 1, \quad S_1^{-1}TS_1 = T^{a^k}, \quad T^p = 1, \tag{84}$$

welche als definirende aufgefasst genau dieselbe Gruppe wie die Gleichungen (82) bestimmen. Vermöge der Congruenz (83) gehört a mod. p zu einem der Exponenten q, r oder qr. Es ist also mindestens eine der Zahlen q und r ein Theiler von $p - 1$. Ich nehme zunächst an, dass $p - 1$ durch das Product qr theilbar ist, dann kann a zu irgend einem von den drei Exponenten gehören. Ist nun qr der Exponent, dem die Zahl a zugehört, so stellt offenbar a^k vermöge der in k

steckenden Willkürlichkeit einen beliebigen von den zum Exponenten qr gehörenden Resten vor. Welchen von diesen Resten man also in den Gleichungen (82) für a setzen mag, man erhält dabei stets dieselbe Gruppe. Jetzt gehöre a mod. p zum Exponenten q; es ist zu beweisen, dass a^k jeder Zahl mod. p congruent gemacht werden kann, die selbst zum Exponenten q gehört. Sei a' eine solche Zahl, so kann man l so finden, dass

$$a^l \equiv a' \text{ mod. } p,$$

und es wird l durch q nicht theilbar sein. Ist nun die Zahl l auch nicht durch r theilbar, so hat man nur $k = l$ zu setzen. Ist jedoch l durch r theilbar, so ist dies nicht erlaubt, weil k zu qr relativ prim sein musste; man kann dann aber $k = l + q$ setzen, und es sind alle Bedingungen erfüllt. Wenn man also in den Gleichungen (82) an Stelle von a irgend einen mod. p zum Exponenten q gehörigen Rest setzt, so erhält man eine völlig bestimmte, von der speciellen Wahl des Restes unabhängige Gruppe. Entsprechendes gilt, wenn für a eine Zahl gesetzt wird, die mod. p zum Exponenten r gehört.

Wenn also $p - 1$ durch qr theilbar ist, ergeben sich drei Gruppen der zweiten Kategorie. Dass diese Gruppen in der That verschieden sind, wird so bewiesen: Jede von den Gruppen enthält eine ausgezeichnete und einzige Untergruppe von der Ordnung p; es ist diejenige, welche von der Operation T erzeugt wird. Zählt man nun die Operationen der ganzen Gruppe, die mit jeder Operation der genannten Untergruppe vertauschbar sind, so erhält man das erste Mal p, das zweite Mal rp und das dritte Mal qp Operationen.

Es zeigt sich, dass zwei von den drei Gruppen zerfallen. Wenn nämlich a mod. p zum Exponenten q gehört, so setze man

$$S_2 = S^q, \quad S_3 = S^r$$

und man erhält

$$S_2^r = 1, \quad S_2^{-1} S_3 S_2 = S_3, \quad S_2^{-1} T S_2 = T, \quad S_3^q = 1,$$
$$S_3^{-1} T S_3 = T^{a^r}, \quad T^p = 1.$$

Hier ist S_2 mit allen anderen Operationen vertauschbar. Dieses Gleichungssystem kann, wie eine nähere Ueberlegung zeigt, als ein definirendes für die Gruppe gewählt werden, und diese stellt sich jetzt dar als directes Product einer Gruppe r^{ter} und einer Gruppe qp^{ter} Ordnung. Ganz ebenso zerfällt die Gruppe, welche man erhält, wenn a mod. p zum Exponenten r gehört.

Der Fall, in dem nur eine der Zahlen q, r Theiler von $p - 1$ ist, erledigt sich von selbst. Man findet schliesslich das Ergebniss: *Alle Gruppen pqr^{ter} Ordnung $(p > q, r)$ von der zweiten Kategorie sind in den Formeln* (82) *dargestellt, wobei a mod. p zum Exponenten q oder r oder qr gehört. Jede dieser drei Annahmen liefert, wenn sie*

möglich ist, nur eine Gruppe; sind sie alle drei möglich, so geben sie drei verschiedene Gruppen; die beiden ersten geben zerfallende Gruppen. Ist qr Theiler von $p-1$, so sind die drei Annahmen möglich; wenn eine der Zahlen q, r Theiler von $p-1$ ist, so ist nur eine Annahme möglich; in den andern Fällen existirt keine Gruppe der Kategorie.

§ 40.

Vorbereitung zur Erörterung der dritten Kategorie.

Nunmehr wird angenommen, dass die zu bildende Gruppe G keine Operation von der Ordnung qr besitzt. Jedenfalls enthält die Gruppe eine Operation U von der p^{ten} Ordnung, und diese Operation erzeugt (vergl. § 38) eine ausgezeichnete Untergruppe, d. h. die Operation U ist nur mit ihren eigenen primitiven Potenzen gleichberechtigt. Wir wollen jetzt irgend zwei Operationen W und W' der Gruppe *äquivalent* nennen, wenn eine Gleichung von der Form

$$W = W' U^{\alpha}$$

besteht; es ergiebt sich auch sofort, dass zwei Operationen, die einer dritten äquivalent sind, einander äquivalent sind. Für jede Operation W giebt es einen kleinsten Exponenten s, für den W^s der identischen Operation äquivalent ist, und es soll der Exponent s die *relative* Ordnung der Operation W heissen. Damit nun W^e der Identität äquivalent ist, muss e ein Vielfaches von s sein; es ergiebt sich daraus noch, dass die absolute Ordnung einer Operation stets ein Vielfaches von der relativen Ordnung ist. Aus der Gleichung

$$W^s = U^{\beta}$$

folgt ausserdem die Gleichung

$$W^{ps} = 1,$$

und es ist also die absolute Ordnung ein Theiler von dem p-fachen der relativen Ordnung. Die absolute Ordnung ist also gleich s oder gleich ps.

Es sollen jetzt die sämmtlichen Operationen der Gruppe G in eine Tabelle geordnet werden, in der Art, dass äquivalente Operationen in dieselbe Horizontalreihe kommen. Man erhält dadurch eine Tabelle von der Beschaffenheit der im 9^{ten} Paragraphen aufgestellten. Im jetzt vorliegenden Fall sind in jeder Horizontalreihe p Operationen, und die Zahl der Horizontalreihen ist qr. Diese Reihen lassen sich nun selbst multipliciren, und es gelten dabei die gruppentheoretischen Gesetze. Die Reihen bilden eine Gruppe von der Ordnung qr. *Ich nehme noch an, dass $q > r$ sein soll.* Von zwei Operationen q^{ter} Ordnung, die in einer Gruppe qr^{ter} Ordnung enthalten sind, gilt nun (vergl. § 2), dass die eine gleich einer Potenz der anderen ist. Wenden

wir dies auf die gegebenen Horizontalreihen an, indem die k^{te} und die l^{te} Reihe die Ordnung q besitzen sollen. Es muss dann die l^{te} Reihe eine Potenz, etwa die μ^{te} Potenz, der k^{ten} Reihe sein. Das heisst mit anderen Worten, dass jede Operation der l^{ten} Reihe der μ^{ten} Potenz jeder Operation der k^{ten} Reihe äquivalent ist. Von zwei Operationen, deren relative Ordnung gleich q ist, muss also die eine einer Potenz der andern äquivalent sein. Hat ferner irgend eine Operation der Gruppe G die absolute Ordnung q, so ist die relative Ordnung der Operation ein Theiler von q. Diese relative Ordnung, die nicht gleich 1 sein kann, ist also gleich q. Somit kann man schliessen, *dass von zwei Operationen q^{ter} Ordnung die eine einer Potenz der andern äquivalent ist.*

§ 41.

Formeln für die dritte Kategorie.

Nach diesen Vorbereitungen nehmen wir zwei Operationen S und T von der q^{ten} und r^{ten} Ordnung an. Es ergeben sich nun sofort die Gleichungen

$$S^q = 1, \quad T^r = 1, \quad S^{-1}US = U^a, \quad T^{-1}UT = U^b. \tag{85}$$

Weil aber die Operationen

$$S, \quad T^{-1}ST$$

die Ordnung q besitzen, ist die zweite einer Potenz der ersten äquivalent, und man kann noch die Gleichung

$$T^{-1}ST = S^\mu U^\nu \tag{86}$$

aufstellen.

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Exponenten a, b, μ, ν sind jetzt näher zu bestimmen. Zunächst ist vermöge eines schon oft angewendeten Schlusses

$$a^q \equiv b^r \equiv 1 \bmod. p. \tag{87}$$

Es zeigt sich ferner mit Hilfe der Gleichung (86), dass die folgenden Umformungen gemacht werden können:

$$\begin{aligned} T^{-1}\left(S^{-1}(TUT^{-1})\ S\right) T &= (T^{-1}S^{-1}T)\ U(T^{-1}ST) \\ &= (U^{-\nu}S^{-\mu})\ U(S^\mu U^\nu) \\ &= U^{-\nu}(S^{-\mu}US^\mu)\ U^\nu. \end{aligned}$$

Nun ergiebt die dritte von den Gleichungen (85) (vergl. den dritten Paragraphen):

$$S^{-\mu}US^\mu = U^{a^\mu},$$

und man findet die Gleichung

$$T^{-1}\left(S^{-1}(TUT^{-1})\ S\right) T = U^{a^\mu}. \tag{88}$$

Die vierte von den Formeln (85) ergiebt

$$U = TU^bT^{-1}.$$

Wenn man hier rechts und links mit b' potenzirt und die Zahl b' der Congruenz

$$b'b \equiv 1 \text{ mod. } p$$

gemäss annimmt, so erhält man

$$U^{b'} = TUT^{-1}.$$

Jetzt lässt sich einsehen, dass

$$(89)\quad T^{-1}\left(S^{-1}(TUT^{-1})\,S\right)T = T^{-1}(S^{-1}U^{b'}S)\,T = T^{-1}(S^{-1}US)^{b'}T$$
$$= T^{-1}U^{ab'}T = (T^{-1}UT)^{ab'} = U^{ab'b}$$
$$= U^a.$$

Der Vergleich von (88) und (89) liefert die Gleichung

$$U^{a^\mu} = U^a.$$

Daraus folgt aber, weil a sicherlich nicht durch p theilbar ist,

$$(90)\qquad a^{\mu-1} \equiv 1 \text{ mod. } p.$$

Vermöge der Bedingungen (87) ist a mod. p entweder der Eins congruent oder es gehört a in Beziehung auf diesen Modul zum Exponenten q. Wäre nun das letztere der Fall, so würde die Congruenz (90) nach sich ziehen, dass

$$\mu \equiv 1 \text{ mod. } q\,.$$

sein müsste. Es würde die Gleichung (86) dann die Gestalt

$$T^{-1}ST = SU^\nu$$

annehmen. Dieses Resultat kann man dadurch ausdrücken, dass im angenommenen Fall S und T *relativ* vertauschbare Operationen sein müssen. Die relative Ordnung des Products ST ergiebt sich nun gleich qr und daraus die absolute Ordnung gleich qr oder gleich pqr. Das eine wie das andere widerspricht den Eigenschaften der dritten Kategorie. Es muss also $a \equiv 1$ mod. p angenommen werden, d. h. die Operationen S und U sind mit einander vertauschbar. Daraus folgt, wenn man beide Seiten der Gleichung (86) mit q potenzirt,

$$1 = U^{q\nu}$$

und

$$q\nu \equiv 0 \text{ mod. } p.$$

Es muss ν durch p theilbar sein.

Wir haben jetzt das Bestehen der folgenden Gleichungen nachgewiesen:

$$(91)\quad T^r = 1,\quad T^{-1}ST = S^\mu,\quad T^{-1}UT = U^b,\quad S^q = 1,\quad U^p = 1,$$
$$SU = US,$$

und es muss zugleich sein

$$b^r \equiv 1 \bmod. p, \quad \mu^r \equiv 1 \bmod. q.$$

Da die Annahme (s. o.) $\mu \equiv 1 \bmod. q$ auf keine Gruppe der dritten Kategorie führen kann, so gehört μ mod. q zum Exponenten r. Die Symbole U, S, T bilden in dieser Folge vermöge der Relationen (91) eine Scala (s. § 6). Eine Gruppe, welche durch die Relationen (91) definirt ist, hat also alle ihre Operationen in der Form

$$T^\gamma S^\alpha U^\beta \begin{pmatrix} \gamma = 0, 1, \ldots r-1 \\ \alpha = 0, 1, \ldots q-1 \\ \beta = 0, 1, \ldots p-1 \end{pmatrix}$$

und ist höchstens von pqr^{ter} Ordnung. Die Gruppe, die hier vorausgesetzt war, sollte gerade diese Ordnung haben, sie muss aus den ihr angehörigen mit U, S, T bezeichneten Operationen erzeugt werden können, und diese müssen die Relationen (91) befriedigen. Also wird (§ 6) die vorausgesetzte Gruppe, falls sie existirt, mit der durch (91) definirten identisch sein.

§ 42.

Die gefundenen Bedingungen sind hinreichend.

Wählt man nun μ und b so, dass sie den Bedingungen genügen, im Uebrigen aber auf beliebige Weise, so kann man zeigen, dass die Relationen (91) eine Gruppe pqr^{ter} Ordnung definiren, die in die dritte Kategorie gehört. Es ergeben nämlich die drei letzten von den Gleichungen (91), wenn sie als definirende betrachtet werden, eine Gruppe Γ von der Ordnung pq. Ein holoedrischer Isomorphismus dieser Gruppe in sich wird durch die Formel

$$J = \begin{pmatrix} S, & U \\ S^\mu, & U^b \end{pmatrix},$$

d. h. genauer durch die Bedingung definirt, dass allgemein für $\alpha = 0, 1, 2, \ldots q-1$ und $\beta = 0, 1, 2, \ldots p-1$ die Operation $S^\alpha U^\beta$ durch

$$S^{\alpha\mu} U^{\beta b}$$

ersetzt werden soll. Die r^{te} Potenz dieses Isomorphismus ist gleich dem identischen Isomorphismus. Wählt man jetzt das Symbol T von der Ordnung r und ordnet ihm den Isomorphismus J und somit der Operation T^k den Isomorphismus J^k zu, so ergeben die früher entwickelten Principien, dass die Gleichungen (91) eine Gruppe pqr^{ter} Ordnung definiren.

Um zu beweisen, dass diese Gruppe der dritten Kategorie angehört, genügt es zu erhärten, dass sie eine Operation qr^{ter} Ordnung nicht

enthält. Angenommen nun, es wäre eine Operation von der Ordnung qr vorhanden, so wäre die relative Ordnung dieser Operation (vergl. § 40) auch gleich qr. Die im Paragraphen 40 angeführten Horizontalreihen müssten eine cyklische Gruppe constituiren, also eine Gruppe, deren Operationen sämmtlich mit einander vertauschbar sind. Je zwei Operationen der gebildeten Gruppe qpr^{ter} Ordnung wären somit relativ vertauschbar, und es müsste darum einen Exponenten c geben, derart, dass

$$T^{-1}ST = SU^c.$$

Diese Gleichung aber widerspricht direct der zweiten von den Gleichungen (91), in der μ mod. q der Eins incongruent ist.

§ 43.

Anzahl der Gruppen.

Führt man in die Gleichungen (91) an Stelle von T eine primitive Potenz dieser Operation ein, so tritt an Stelle von μ eine der Eins mod. q incongruente Potenz von μ. Es geschieht also der Allgemeinheit dadurch kein Eintrag, dass man für μ einen bestimmten von den Resten des Moduls q wählt, die zum Exponenten r gehören; wenn man nur für b der Reihe nach alle die den Bedingungen entsprechenden Reste des Moduls p setzt, so muss man immer noch die sämmtlichen Gruppen der Kategorie erhalten. Ist nun $p-1$ kein Vielfaches von r, so ist

$$b \equiv 1 \text{ mod. } p,$$

und man erhält eine einzige Gruppe. Die pqr Operationen dieser Gruppe werden erhalten, wenn man jede Operation der aus S und T erzeugten Gruppe von der Ordnung qr mit jeder Potenz von U multiplicirt, wobei diese Potenzen von U mit den Operationen $S^\alpha T^\gamma$ vertauschbar sind. Man hat also das directe Product der Gruppe p^{ter} Ordnung mit der nichtcyklischen Gruppe qr^{ter} Ordnung.

Wenn jedoch die Primzahl r in $p-1$ als Theiler enthalten ist, so möge ϱ eine bestimmte Zahl bedeuten, die mod. p zum Exponenten r gehört. Die Zahlen, die für b gesetzt werden müssen, sind dann durch die Formel

$$b = \varrho^h \quad (h = 0, 1, 2, \ldots r-1)$$

dargestellt. Die durch die Gleichungen (91) definirte Gruppe G enthält eine einzige und ausgezeichnete Untergruppe Γ_1 von der Ordnung p (s. § 38), aber auch eine ausgezeichnete Untergruppe Γ_2 von der Ordnung q, die aus den Potenzen von S besteht. Die letztere ausgezeichnete Untergruppe muss vermöge der Sylow'schen Sätze auch die einzige sein, welche die Ordnung q besitzt. Sucht man jetzt die

Operationen der Gesammtgruppe, mit denen transformirt jede Operation von Γ_2 in ihre μ^{te} Potenz übergeht, so findet man

$$T S^{\alpha} U^{\beta} \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots q-1 \\ \beta = 0, 1, 2, \ldots p-1 \end{pmatrix}.$$

Wenn man aber mit Hilfe dieser pq Operationen die Operationen der Untergruppe Γ_1 transformirt, so geht jede in ihre b^{te} Potenz über. Wird also die Zahl b mod. p geändert, so ändert sich auch eine Eigenschaft, welche der Gruppe G in Beziehung auf ihre beiden Untergruppen Γ_1 und Γ_2 zukommt. Von diesen beiden Untergruppen ist jede einzig in ihrer Art, wesshalb der Rest, den die Zahl b mod. p liefert, für die Gruppe G selbst charakteristisch sein muss. Jeder der r Reste, die für b gesetzt werden dürfen, liefert somit eine andere Gruppe*). Für $b = 1$ ergiebt sich wieder eine zerfallende Gruppe.

Wir haben jetzt bewiesen: *Eine Gruppe von der Ordnung pqr, $p > q > r$, und der dritten Kategorie ist nur möglich, wenn r Theiler von $q - 1$ ist. Man erhält jede dieser Gruppen gerade ein Mal, wenn man in* (91) *für μ irgend eine bestimmte mod. q zum Exponenten r gehörende Zahl und für b alle mod. p incongruenten der Bedingung*

$$b^r \equiv 1 \text{ mod. } p$$

genügenden Reste einsetzt. Ist $p - 1$ nicht durch r theilbar, so existirt eine einzige solche Gruppe, die zerfällt; im andern Fall existiren r Gruppen der Kategorie, von denen eine zerfällt.

Die nicht ausdrücklich als zerfallend bezeichneten Gruppen sind nichtzerfallend. Man kann nämlich leicht die zerfallenden Gruppen pqr^{ter} Ordnung direct bilden und sieht dann, dass sie schon genannt sind.

Fünfter Abschnitt.

Die Ordnungen p^3 und p^4.

§ 44.

Formeln für die Gruppen p^{3ter} Ordnung.

Herr Sylow**) hat gezeigt, dass jede Gruppe, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist, mindestens eine nichtidentische ausgezeichnete Operation enthält. Bedeutet Θ eine solche Operation und V eine beliebige Operation der Gruppe, so ist

$$V^{-1} \Theta V = \Theta;$$

*) Ein ähnlicher Schluss findet sich in genauerer Ausführung im 25^{ten} Paragraphen.

**) Mathematische Annalen Bd. 5 p. 588.

Θ *ist mit jeder Operation der Gruppe vertauschbar. Ich beschränke auch im Folgenden den Namen* Θ *auf Operationen von der genannten Eigenschaft.* Dadurch erspare ich mir die ausdrückliche Anführung einiger Gleichungen.

Ich will jetzt alle Gruppen von der Ordnung p^3 bilden. Irgend eine Gruppe G von dieser Ordnung enthält eine Operation Θ; offenbar kann man annehmen, dass Θ die Ordnung p besitzt; denn man könnte dies nöthigenfalls erreichen, indem man eine Potenz von Θ an Stelle von Θ setzt. Nun mögen zwei Operationen V und W der Gruppe G äquivalent genannt werden, wenn eine Gleichung von der Form

$$V = W\Theta^\alpha$$

besteht. Die p^3 Operationen der Gruppe G können jetzt wieder nach dem Vorgang des 9ten und des 40ten Paragraphen auf ein Schema vertheilt werden, das aus p^2 Horizontalreihen besteht. Jede Reihe besteht aus p unter einander äquivalenten Operationen, und es mögen die Potenzen von Θ die erste Reihe bilden. Es entsteht zugleich eine Gruppe von der Ordnung p^2, deren Operationen durch die Horizontalreihen vorgestellt werden. Diese neue Gruppe von neuen Operationen muss auch eine ausgezeichnete Operation von der p^{ten} Ordnung enthalten; die k^{te} Horizontalreihe stelle eine solche Operation vor, wobei also $k > 1$ ist. Bedeutet nun S eine Operation der Gruppe G aus der k^{ten} Reihe und V eine beliebige Operation von G, so muss $V^{-1}SV$ der k^{ten}, und S^p der ersten Reihe angehören. Man hat also die Gleichungen

$$V^{-1}SV = S\Theta^\alpha, \quad S^p = \Theta^\alpha,$$

während die Operation S selbst keiner Potenz von Θ gleich ist.

Nun definirt man einen zweiten Aequivalenzbegriff, indem man festsetzt, dass zwei Operationen V und W aus der Gruppe G einander äquivalent sein sollen, wenn eine Gleichung von der Form

$$V = WS^\beta\Theta^\alpha \tag{92}$$

besteht. Ordnet man auf Grund dieser neuen Festsetzung die Operationen von G in Reihen von äquivalenten Operationen, so erhält man p Reihen, von denen die erste aus den Operationen

$$S^\beta\Theta^\alpha \ (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots p-1)$$

bestehen soll. Es entsteht dabei zugleich eine neue Gruppe von der Ordnung p, deren Operationen durch die neuen Reihen vorgestellt werden. Jede nichtidentische Operation dieser neuen Gruppe hat die Ordnung p, d. h. für jede nicht in der ersten Reihe enthaltene Operation S_1 der Gruppe G ist die p^{te} Potenz die niedrigste, welche die Form

$$S^\beta\Theta^\alpha$$

annimmt.

Man kann also die Gleichungen

$$(93) \qquad S_1^p = S^c\Theta^d, \quad S_1^{-1}SS_1 = S\Theta^b, \quad S^p = \Theta^a, \quad \Theta^p = 1$$

aufstellen, und da offenbar in der Formel

$$S_1^\gamma S^\beta \Theta^\alpha$$

p^3 verschiedene Operationen enthalten sind, so erzeugen die Operationen S_1, S und Θ die ganze Gruppe G. Betrachtet man aber die Relationen (93) als definirende einer Gruppe, so bilden die Symbole Θ, S, S_1 — mit Rücksicht auf die noch hinzuzudenkenden Relationen, welche die Vertauschbarkeit von Θ mit den anderen Operationen ausdrücken — eine Scala (§ 6). Die Relationen (93) definiren eine Gruppe von höchstens $p^{3\,\text{ter}}$ Ordnung. Wenn nun die angenommene Gruppe, deren Operationen Θ, S, S_1 die Gleichungen (93) erfüllen sollten, existirt, so ist sie durch (93) im Sinn der definirenden Relationen dargestellt. Die Frage nach der Existenz jener Gruppe ist gleichbedeutend mit der Frage, ob die durch die Relationen definirte Gruppe wirklich von der Ordnung p^3 ist. Dies ist nur der Fall, wenn b und c einer Bedingung genügen, die aber erst im übernächsten Paragraphen entwickelt werden soll.

§ 45.

Formeln für die $p^{4\,\text{te}}$ Ordnung.

Denkt man sich eine Gruppe von der Ordnung p^4, so kann man aus ihr zunächst zwei Operationen Θ und S ganz so wie im vorigen Paragraphen wählen. Es wird dann wieder der zweite Aequivalenzbegriff festgesetzt, indem die Gleichung (92) die Aequivalenz von V und W erklären soll. Die Operationen der Gruppe $p^{4\,\text{ter}}$ Ordnung vertheilen sich aber jetzt auf p^2 Reihen von äquivalenten Operationen. Man erhält dadurch eine neue Gruppe von p^2 neuen Operationen, und es muss unter diesen eine ausgezeichnete Operation p^{ter} Ordnung vorhanden sein. Aus der Reihe, welche eine solche Operation vorstellt, ist die Operation S_1 der ursprünglichen Gruppe zu entnehmen. Schliesslich definirt man einen dritten Aequivalenzbegriff, indem man V und W für äquivalent erklärt, wenn

$$V = WS_1^\gamma S^\beta \Theta^\alpha.$$

Es muss sich eine Operation S_2 der ursprünglichen Gruppe finden, deren p^{te} Potenz in diesem Sinn der Identität äquivalent ist, während S_2 nicht in S_1, S und Θ ausgedrückt werden kann.

So findet man die Gleichungen:

$$(94) \qquad \begin{gathered} S_2^p = S_1^h S^i \Theta^k, \quad S_2^{-1}S_1S_2 = S_1S^e\Theta^f, \quad S_2^{-1}SS_2 = S\Theta^g, \\ S_1^p = S^c\Theta^d, \quad S_1^{-1}SS_1 = S\Theta^b, \quad S^p = \Theta^a, \quad \Theta^p = 1. \end{gathered}$$

Die Operationen S_2, S_1, S, Θ erzeugen die ganze Gruppe $p^{4\text{ter}}$ Ordnung. Kehrt man jetzt die Betrachtung um, indem man die Gleichungen (94) als definirende auffasst — natürlich zusammen mit denjenigen, die stillschweigend hinzugedacht werden — so erhält man nicht immer eine Gruppe von der Ordnung p^4. Damit dies wirklich der Fall ist, muss man noch gewisse Eigenschaften der Exponenten fordern, die nachher entwickelt werden sollen.

§ 46.

Zahlentheoretische Bedingung im Fall der Ordnung p^3.

Ich suche nun die Relation zwischen den Exponenten b und c in den Gleichungen (93). Zunächst stellen die Gleichungen

$$S^p = \Theta^a, \quad \Theta^p = 1 \tag{95}$$

jedenfalls eine Gruppe Γ von der Ordnung p^2 dar. Ist nämlich $a \equiv 0 \bmod. p$, so liegt unmittelbar die Gruppe vor, die wir mit $[p]$ $[p]$ bezeichnen. Wenn aber a mod. p der Null nicht congruent ist, definire man a' durch die Bedingung

$$a'a \equiv 1 \bmod. p;$$

man hat sich jetzt nur die cyklische Gruppe von der Ordnung p^2 zu denken, S mit einer primitiven Operation dieser Gruppe und Θ mit $S^{a'p}$ zu identificiren, um zu sehen, dass man die genannte cyklische Gruppe vor sich hat.

Nehmen wir einmal an, die durch (93) definirte Gruppe sei von der Ordnung p^3, so bedeuten*) S_1, S, Θ wieder die früher gewählten Operationen einer vorausgesetzten Gruppe von der Ordnung p^3, und transformirt man S und Θ mit Hilfe der Operation S_1, so erhält man (vergl. (93)):

$$S_1^{-1} S S_1 = S\Theta^b, \quad S_1^{-1}\Theta S_1 = \Theta.$$

Diejenige Gruppe, welche aus S und Θ erzeugt werden kann und welche mit $\{S, \Theta\}$ bezeichnet werden soll, besteht aus den Operationen von der Form

$$S^\beta \Theta^\alpha,$$

die unter einander vertauschbar sind. Transformirt man diese Operationen mit Hilfe von S_1, so ergiebt sich

$$S_1^{-1} S^\beta \Theta^\alpha S_1 = (S_1^{-1} S S_1)^\beta S_1^{-1}\Theta^\alpha S_1 = S^\beta \Theta^{b\beta+\alpha}.$$

*) Es ist leicht zu sehen, dass die Gruppe nicht von der $p^{3\text{ten}}$ Ordnung sein könnte, wenn im Sinn von § 6 aus den Relationen (93) sich ergäbe Θ aequ. 1 oder S aequ. Θ^μ oder S_1 aequ. $S^\varrho\Theta^\sigma$.

Die Formel

$$J = \begin{pmatrix} S^\beta \Theta^\alpha \\ S^\beta \Theta^{b\beta+\alpha} \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots p-1), \tag{96}$$

welche offenbar eine Substitution zwischen den p^2 Operationen darstellt, wird also einen Isomorphismus der Gruppe $\{S, \Theta\}$ in sich ausdrücken müssen. Aus der Gleichung

$$S_1^p = S^c \Theta^d$$

folgt noch (vergl. § 10), dass die p malige Transformation der Gruppe $\{S, \Theta\}$ mit Hilfe der Operation S_1 dasselbe ergiebt wie die Transformation dieser Gruppe mit der in ihr enthaltenen Operation $S^c\Theta^d$, und dass die Operationen S_1 und $S^c\Theta^d$ vertauschbar sind. Mit anderen Worten heisst dies, dass

$$J^p = 1$$

ist, und dass die Substitution J die Operation $S^c\Theta^d$ nicht versetzt.

Es wären also noch gewisse Fragen zu erledigen, welche an die Substitution J anknüpfen. Diese Substitution ist aus den Operationen der Gruppe $\{S, \Theta\}$ gebildet, und diese Gruppe ist nichts Anderes als die Gruppe Γ, deren definirende Relationen wir im System (95) kennen. Die Frage, ob die Substitution J wirklich einen Isomorphismus darstellt, lasse ich zunächst beiseite. Es berechnet sich leicht, dass

$$J^\mu = \begin{pmatrix} S^\beta \Theta^\alpha \\ S^\beta \Theta^{\mu b\beta+\alpha} \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots p-1)$$

ist, und somit

$$J^p = 1.$$

Ferner setzt die Substitution J an Stelle der Operation $S^c\Theta^d$ die Operation $S^c\Theta^{bc+d}$. Also muss die Gleichung

$$S^c\Theta^d = S^c\Theta^{bc+d}$$

bestehen; sie ist der Congruenz

$$bc \equiv 0 \bmod p \tag{97}$$

gleichwerthig.

Um einzusehen, dass ein Isomorphismus vorliegt, bedenke man, dass die Operationen $S\Theta^b$ und Θ der durch die definirenden Relationen (95) bestimmten Gruppe diese Gruppe wiedererzeugen und selbst die Relationen (95) befriedigen. Nach dem am Schluss von § 6 gegebenen Princip ist also

$$\begin{pmatrix} S, & \Theta \\ S\Theta^b, & \Theta \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus der betrachteten Gruppe in sich, dieser Isomorphismus ersetzt aber die Operation $S^\beta\Theta^\alpha$ durch

$$S^\beta \Theta^{b\beta+\alpha}$$

und ist also nichts Anderes als die oben mit J bezeichnete Substitution (96).

Wenn also b und c der Bedingung (97) genügen, so sind die Fragen in bejahendem Sinn beantwortet; man kann nun den Lehrsatz des 20ten Paragraphen anwenden.

Die Relationen (93) *definiren dann eine Gruppe $p^{3\text{ter}}$ Ordnung, wenn mindestens eine der Zahlen b und c durch p theilbar ist. Man erhält so zugleich die allgemeinste Gruppe der genannten Ordnung.*

§ 47.

Zahlentheoretische Bedingungen im Fall der Ordnung p^4.

Nach den Untersuchungen des 45ten Paragraphen ist jede Gruppe von der Ordnung p^4 unter denjenigen enthalten, welche durch die Relationen (94) definirt werden. Wenn andererseits diese Relationen eine Gruppe definiren, die wirklich von der $p^{4\text{ten}}$ Ordnung ist — eine Gruppe höherer Ordnung definiren sie schon ihrer Form wegen nicht — so kann man die Symbole S_2, S_1, S, Θ als die nach § 45 aus der vorausgesetzten Gruppe von der Ordnung p^4 ausgesuchten Operationen deuten. S_1, S, Θ erzeugen vermöge der gemachten Annahmen eine Gruppe von der Ordnung p^3, die mit $\{S_1, S, \Theta\}$ bezeichnet werden soll. Diese Gruppe muss in der Gesammtgruppe ausgezeichnet enthalten sein, und zwar erhält man, wenn man sie mittelst der Operation S_2 transformirt, den Isomorphismus

$$J = \begin{pmatrix} S_1, & S, & \Theta \\ S_2^{-1}S_1S_2, & S_2^{-1}SS_2, & S_2^{-1}\Theta S_2 \end{pmatrix}$$

oder, wie aus den Gleichungen (94) erhellt,

$$J = \begin{pmatrix} S_1, & S, & \Theta \\ S_1S^e\Theta^f, & S\Theta^g, & \Theta \end{pmatrix}. \tag{98}$$

Aus der Gleichung

$$S_2^p = S_1^h S^i \Theta^k$$

folgt noch (vergl. § 10 und § 46), dass der Isomorphismus J^p der Gruppe $\{S_1, S, \Theta\}$ in sich identisch ist mit demjenigen Isomorphismus, der durch Transformation der Gruppe mit der der Gruppe selbst angehörenden Operation $S_1^h S^i \Theta^k$ entsteht, und dass diese letztere Operation von der Substitution J nicht versetzt wird.

Nun bilden die Gleichungen (93) einen Theil von den Gleichungen (94), und es ist ersichtlich, dass die Gruppe $\{S_1, S, \Theta\}$ keine andere sein kann, als die durch die Relationen (93) definirte, welche jetzt mit Δ bezeichnet werden soll. Die Exponenten b und c müssen der Bedingung

$$bc \equiv 0 \text{ mod. } p$$

genügen. Unter dieser Bedingung ist die Gruppe Δ bereits als von der Ordnung p^3 nachgewiesen, während die Gruppe $p^{4\,\text{ter}}$ Ordnung erst gemacht werden soll. An die definirenden Relationen (93) der Gruppe Δ ist nun die Beantwortung von drei noch offenen Fragen zu knüpfen:

1) ob die Formel (98) wirklich einen Isomorphismus der Gruppe Δ in sich darstellt,

2) ob die p^{te} Potenz dieses Isomorphismus dem genannten cogredienten Isomorphismus gleich ist,

3) ob im Isomorphismus (98) die Operation $S_1^h S^i \Theta^k$ ihre Stelle behält.

Nehmen wir jetzt den Lehrsatz des 20^{ten} Paragraphen hinzu, so wird ersichtlich, *dass die Bejahung dieser drei Fragen zusammen mit der Congruenz* $bc \equiv 0 \bmod p$ *die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür abgiebt, dass die Relationen* (94) *eine Gruppe von der Ordnung* p^4 *definiren. Man findet vermittelst dieser Relationen die allgemeinste Gruppe* $p^{4\,\text{ter}}$ *Ordnung.*

§ 48.

Entwicklung der Bedingungen für den letzten Fall.

Die Operationen, welche in dem fraglichen Isomorphismus (98) an Stelle der erzeugenden Operationen S_1, S und Θ treten sollen, heissen

$$S_1 S^e \Theta^f, \quad S\Theta^g, \quad \Theta; \tag{99}$$

offenbar kann man aus diesen die Operationen S_1, S, Θ selbst wieder zusammensetzen und also auch die ganze Gruppe erzeugen. Nach dem am Schluss des 6^{ten} Paragraphen aufgestellten Princip hätten wir somit nur die Operationen (99) in die definirenden Gleichungen (93) einzusetzen. Wir erhalten

$$(S_1 S^e \Theta^f)^p = (S\Theta^g)^c \Theta^d, \quad (S\Theta^g)(S_1 S^e \Theta^f) = (S_1 S^e \Theta^f)(S\Theta^g)\Theta^b,$$
$$(S\Theta^g)^p = \Theta^a, \quad \Theta^p = 1.$$

Wenn diese Gleichungen — vermöge der definirenden Relationen (93) und der stillschweigend hinzugedachten — richtig sind, so ist die Frage 1) des vorigen Paragraphen zu bejahen.

Die Berechnung ergiebt nun, dass diese Gleichungen mit Ausnahme der ersten erfüllt sind, welches auch die Werthe der Exponenten sein mögen. Weil sich ferner Θ mit den andern Operationen vertauschen lässt, kommt die erste Gleichung darauf hinaus, dass

$$(S_1 S^e)^p = S^c \Theta^{g c + d}$$

sein muss. Um jetzt in dieser letzten Gleichung die linke Seite zu entwickeln, potenzire man die zweite von den Gleichungen (93) mit μ; man erhält

$$S_1^{-1} S^\mu S_1 = S^\mu \Theta^{\mu h},$$

woraus folgt, dass

$$S^\mu S_1 = S_1 S^\mu \Theta^{\mu b} \tag{100}$$

ist. Nun berechnet man die Potenzen von $S_1 S^e$ successive:

$$S_1 S^e S_1 S^e = S_1 (S^e S_1)\, S^e.$$

Dies ist aber vermöge der Formel (100) gleich

$$S_1 (S_1 S^e \Theta^{eb})\, S^e = S_1^2 S^{2e} \Theta^{eb}.$$

Ferner ist

$$S_1 S^e S_1 S^e S_1 S^e = (S_1^2 S^{2e} \Theta^{eb})\, (S_1 S^e) = S_1^2 (S^{2e} S_1)\, S^e \Theta^{eb}$$

und nach der Formel (100) gleich

$$S_1^2 (S_1 S^{2e} \Theta^{2eb})\, S^e \Theta^{eb} = S_1^3 S^{3e} \Theta^{(1+2)eb}.$$

Ebenso

$$\begin{aligned}(S_1 S^e)^4 &= (S_1 S^e)^3\, S_1 S^e = (S_1^3 S^{3e} \Theta^{(1+2)eb})\, S_1 S^e \\ &= S_1^3 (S^{3e} S_1)\, S^e \Theta^{(1+2)eb} \\ &= S_1^3 (S_1 S^{3e} \Theta^{3eb})\, S^e \Theta^{(1+2)eb} \\ &= S_1^4 S^{4e} \Theta^{(1+2+3)eb}.\end{aligned}$$

Durch Induction findet man die Formel

$$(S_1 S^e)^\mu = S_1^\mu S^{\mu e}\, \Theta^{\frac{\mu(\mu-1)}{2} eb},$$

deren Allgemeingiltigkeit durch den Schluss von μ auf $\mu + 1$ leicht nachzuweisen ist.*)

Die Gleichung

$$(S_1 S^e)^p = S^c \Theta^{gc+d},$$

welche wir zu discutiren hatten, liefert jetzt

$$S_1^p S^{pe} \Theta^{\frac{p(p-1)}{2} eb} = S^c \Theta^{gc+d},$$

oder, wenn für S_1^p und S^p ihre Werthe aus den Gleichungen (93) eingesetzt werden,

$$S^c \Theta^d \Theta^{ae} \Theta^{\frac{p(p-1)}{2} eb} = S^c \Theta^{gc+d}.$$

Man kommt also auf die Bedingung

$$ae + \frac{p(p-1)}{2}\, eb \equiv gc \bmod. p;$$

wenn sie erfüllt ist, und nur dann, ist die Frage 1) *zu bejahen.*

Um nun die zweite der im letzten Paragraphen aufgeworfenen Fragen zu beantworten, berechne ich die Potenzen des Isomorphismus (98). Es ist

---

*) Es liesse sich zeigen, was wir aber nicht nöthig haben, dass diese Gleichung auch für negative Werthe von μ gilt.

$$J^2 = \begin{pmatrix} S_1, & S, & \Theta \\ (S_1 S^e \Theta^f)\,(S\Theta^g)^e \Theta^f, & (S\Theta^g)\,\Theta^g, & \Theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} S_1, & S, & \Theta \\ S_1 S^{2e} \Theta^{2f+ge}, & S\Theta^{2g}, & \Theta \end{pmatrix}.$$

Ferner findet man

$$J^3 = \begin{pmatrix} S_1, & S, & \Theta \\ S_1 S^{3e} \Theta^{3f+(1+2)ge}, & S\Theta^{3g}, & \Theta \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Formel, die wiederum durch den Schluss von μ auf $\mu + 1$ bewiesen werden kann, lautet:

$$J^\mu = \begin{pmatrix} S_1, & S, & \Theta \\ S_1 S^{\mu e} \Theta^{\mu f + \frac{\mu(\mu-1)}{2} ge}, & S\Theta^{\mu g}, & \Theta \end{pmatrix}.$$

Es muss auch noch der cogrediente Isomorphismus der Gruppe Δ in sich berechnet werden, der entsteht, wenn man die Gruppe Δ mit der in ihr enthaltenen Operation $S_1^h S^i \Theta^k$ transformirt. Wenn man zunächst nur S_1 transformirt, erhält man:

$$(\Theta^{-k} S^{-i} S_1^{-h})\, S_1\, (S_1^h S^i \Theta^k) = S^{-i} S_1 S^i.$$

Nun ergiebt sich aus der Gleichung (100):

$$S_1 = S^{-\mu} S_1 S^\mu \Theta^{\mu b},$$

und wenn die Potenz von Θ auf die linke Seite gebracht wird,

$$S_1 \Theta^{-\mu b} = S^{-\mu} S_1 S^\mu.$$

Die Transformation von S_1 mittelst der Operation $S_1^h S^i \Theta^k$ ergiebt also

$$S_1 \Theta^{-ib}.$$

Die Transformation von S ergiebt vorerst

$$(\Theta^{-k} S^{-i} S_1^{-h})\, S\, (S_1^h S^i \Theta^k) = S^{-i} (S_1^{-h} S S_1^h)\, S^i.$$

Aus der Gleichung (vergl. (93))

$$S_1^{-1} S S_1 = S\Theta^b$$

zieht man aber die folgenden

$$\begin{aligned} S_1^{-2} S S_1^2 &= S_1^{-1} S S_1 \Theta^b = S\Theta^{2b}, \\ S_1^{-3} S S_1^3 &= S\Theta^{3b}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ S_1^{-h} S S_1^h &= S\Theta^{hb}. \end{aligned} \tag{101}$$

Die Transformation von S ergiebt also

$$S\Theta^{hb}.$$

Der erwähnte cogrediente Isomorphismus der Gruppe Δ in sich wird somit durch die Formel

$$\begin{pmatrix} S_1, & S, & \Theta \\ S_1\Theta^{-ib}, & S\Theta^{hb}, & \Theta \end{pmatrix}$$

ausgedrückt.

Dieser Isomorphismus muss mit J^p übereinstimmen, und man erhält durch den Vergleich mit der für J^μ aufgestellten Formel

$$\begin{aligned} S_1 S^{pe}\Theta^{pf+\frac{p(p-1)}{2}ge} &= S_1\Theta^{-ib}, \\ S\Theta^{pg} &= S\Theta^{hb} \end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen (93)

$$\begin{aligned} \Theta^{ae+\frac{p(p-1)}{2}ge} &= \Theta^{-ib}, \\ 1 &= \Theta^{hb}. \end{aligned}$$

Somit ist die Frage 2) *des letzten Paragraphen zu bejahen oder zu verneinen, je nachdem das System der Congruenzen*

$$\begin{cases} ae+\frac{p(p-1)}{2}ge+ib \equiv 0 \\ hb \equiv 0 \end{cases} \text{ mod. } p$$

erfüllt ist oder nicht.

Um die letzte Frage zu beantworten, bedenke man, dass der Isomorphismus (98) vermöge des Ausdrucks, den wir für ihn in der Formel (98) selbst gegeben haben, das Product

$$S_1^h S^i \Theta^k$$

durch

$$(S_1 S^e\Theta^f)^h (S\Theta^g)^i \Theta^k = (S_1 S^e)^h S^i \Theta^{fh+gi+k}$$

ersetzen muss. Nun ist (s. o.)

$$(S_1 S^e)^h = S_1^h S^{he}\Theta^{\frac{h(h-1)}{2}eb}.$$

Man findet also im Ganzen

$$\left(S_1^h S^{he}\Theta^{\frac{h(h-1)}{2}eb}\right) S^i\Theta^{fh+gi+k},$$

was mit der Operation

$$S_1^h S^i \Theta^k$$

selbst übereinstimmen wird, wenn

$$S^{he}\Theta^{\frac{h(h-1)}{2}eb+fh+gi+k} = \Theta^k$$

ist. *Dazu ist erstens nöthig, dass* he *durch* p *theilbar ist, und dann, indem wir*

$$he = ps$$

setzen, dass

$$\Theta^{as}\Theta^{\frac{h(h-1)}{2}eb+fh+gi+k} = \Theta^k,$$

d. h. dass

$$\frac{h(h-1)}{2} eb + as + fh + gi \equiv 0 \mod p.$$

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so ist die 3te Frage des letzten Paragraphen zu bejahen.

§ 49.

Anzahl der Gruppen von der Ordnung p^3.

Die Gleichungen (93) des 44ten Paragraphen ergeben, wenn die Bedingung

$$bc \equiv 0 \mod p$$

erfüllt ist, eine Gruppe von der Ordnung p^3, und zwar erhält man auf diese Weise jede solche Gruppe. Ist nun insbesondere

$$b \equiv 0 \mod p,$$

so ist von den Operationen

$$S_1,\ S,\ \Theta$$

jede mit jeder vertauschbar; es liegt dann eine Gruppe vor, deren sämmtliche Operationen mit einander *vertauschbar* sind. *In diesem besonderen Fall erhält man also eine von den drei Gruppen:*

$$[p^3],\quad [p^2]\,[p],\quad [p]\,[p]\,[p].$$

Zwei von diesen Gruppen zerfallen, und andere zerfallende Gruppen der Ordnung p^3 giebt es nicht.

Nimmt man b der Null incongruent an, so besitzt die Gruppe in S und S_1 zwei Operationen, die nicht mit einander vertauscht werden können. In diesem Fall ist $c \equiv 0 \mod p$, und es ist erlaubt

$$c = 0$$

zu setzen. *Man bekommt dadurch die definirenden Relationen*

(102) $\quad S_1^{\,p} = \Theta^d,\quad S^p = \Theta^a,\quad S_1^{-1} S S_1 = S\Theta^b,\quad \Theta^p = 1.$

Es sind hier für a und d die Reste $0, 1, 2, \ldots p-1$, für b die Reste $1, 2, \ldots p-1$ zu setzen, und es ist nun zu untersuchen, wie viele von einander verschiedene Gruppen auf diese Weise entstehen.

Zu diesem Zweck erhebe man den allgemeinsten Ausdruck einer Operation der Gruppe

$$S_1^{\,\alpha} S^\beta \Theta^\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, \ldots p-1)$$

auf die μ^{te} Potenz. Zunächst ist

$$(S_1^{\,\alpha} S^\beta \Theta^\gamma)^\mu = (S_1^{\,\alpha} S^\beta)^\mu \Theta^{\gamma\mu}.$$

Nun ergiebt die Gleichung (101), wenn in ihr $h = \alpha$ gesetzt und beiderseits mit β potenzirt wird,

$$S_1^{-\alpha} S^\beta S_1^{\,\alpha} = S^\beta \Theta^{\alpha\beta b}$$

oder

$$S^\beta S_1^{\,\alpha} = S_1^{\,\alpha} S^\beta \Theta^{\alpha\beta b}.$$

Diese Gleichung ermöglicht es nun, eine beliebige Potenz von $S_1^{\alpha} S^{\beta}$ zu berechnen, gerade so wie die Gleichung (100) es ermöglicht hat, dass eine beliebige Potenz von $S_1 S^{\varepsilon}$ berechnet worden ist. Schliesslich findet man die Gleichung

$$(S_1^{\alpha} S^{\beta} \Theta^{\gamma})^{\mu} = S_1^{\alpha\mu} S^{\beta\mu} \Theta^{\alpha\beta\delta \frac{\mu(\mu-1)}{2} + \gamma\mu}.$$

Wird hier $\mu = p$ gesetzt, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (102):

$$(103) \qquad (S_1^{\alpha} S^{\beta} \Theta^{\gamma})^{p} = \Theta^{\alpha d + \beta a + \alpha\beta\delta \frac{p(p-1)}{2}}.$$

Jetzt hat man zu unterscheiden, ob die Primzahl p gleich 2 ist oder nicht. Es sei zunächst p von 2 verschieden; dann ist $\frac{p(p-1)}{2}$ durch p theilbar, und die rechte Seite der Gleichung (103) ist gleich

$$\Theta^{\alpha d + \beta a}.$$

Wenn nun a und d beide der Null congruent sind, so hat jede Operation der Gruppe, mit der einzigen Ausnahme der identischen Operation, die Ordnung p, wenn aber von den Zahlen a und d eine der Null incongruent ist oder beide, so existiren Operationen von der Ordnung p^2. Daraus erhellt, dass sich mindestens zwei Gruppen finden müssen.

Ist a der Null incongruent, so setze man

$$S_1' = S_1 S^{w},$$

nachdem w gemäss der Congruenz

$$aw \equiv a - d \bmod. p$$

bestimmt ist. Man erhält nun die Relationen

$$S_1'^{p} = \Theta^{a}, \quad S^{p} = \Theta^{a}, \quad S_1'^{-1} S S_1' = S \Theta^{b}, \quad \Theta^{p} = 1.$$

Da die Operation S_1 aus S_1' und S gebildet und somit die ganze Gruppe aus

$$S_1', \; S, \; \Theta$$

erzeugt werden kann, dürfen die neuen Relationen als definirende betrachtet werden. Statt S_1' und S führe ich jetzt die Operationen S_1'' und S' ein, welche durch die Gleichungen

$$S_1'' = S_1'^{v}, \qquad S' = S^{v}$$

bestimmt sind. Es ergeben sich jetzt die Relationen

$$S_1''^{p} = \Theta^{av}, \quad S'^{p} = \Theta^{av}, \quad S_1''^{-1} S' S_1'' = S' \Theta^{v^2 b}, \quad \Theta^{p} = 1.$$

Ueber den Exponenten v kann man noch verfügen, $0 < v \leq p-1$. Man setze für v die Congruenz

$$vb \equiv a \bmod. p$$

fest und führe gleichzeitig die Operation

$$\Theta' = \Theta^{av}$$

an Stelle von Θ ein. Dadurch bekommt man das System

$$S_1''^p = \Theta', \quad S'^p = \Theta', \quad S_1''^{-1} S' S_1'' = S'\Theta', \quad \Theta'^p = 1.$$

Auf dasselbe System kann man in ganz entsprechender Weise die Gruppe zurückführen, wenn man von dem Exponenten d weiss, dass er der Null incongruent ist.

Als letzter Fall bleibt derjenige übrig, in dem $a \equiv d \equiv 0 \bmod. p$. Setzt man unter diesen Umständen

$$\Theta'' = \Theta^b,$$

so ergeben sich die Gleichungen

$$S_1^p = 1, \quad S^p = 1, \quad S_1^{-1} S S_1 = S\Theta'', \quad \Theta''^p = 1,$$

welche als definirende gelten können.

Das Resultat kann also folgendermassen ausgedrückt werden: *Wenn die Primzahl p ungerade ist, so giebt es zwei Gruppen von der Ordnung p^3 mit nichtvertauschbaren Operationen. Man erhält beide aus den Formeln* (102), *indem man b mod. p der Null incongruent annimmt, die erste, indem man von den Zahlen a und d mindestens eine incongruent Null, die zweite, indem man $a \equiv d \equiv 0$ setzt.*

§ 50.

Die Ordnung 8.

Bei der Untersuchung der Gruppen $p^{3\text{ter}}$ Ordnung, die nichtvertauschbare Operationen enthalten, wurde bis jetzt die Annahme ausgeschlossen, dass $p = 2$. Die Gleichung (103) giebt unter dieser Voraussetzung

$$(S_1^\alpha S^\beta \Theta^\gamma)^2 = \Theta^{\alpha d + \beta a + \alpha\beta b}.$$

Jedenfalls hat man $b = 1$ zu setzen; für a und d sind aber vier Fälle möglich:

$$a = 0, \ d = 0; \quad a = 0, \ d = 1; \quad a = 1, \ d = 0; \quad a = 1, \ d = 1.$$

In diesen Fällen erhält man für

$$(S_1^\alpha S^\beta \Theta^\gamma)^2 \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1)$$

beziehungsweise

$$\Theta^{\alpha\beta}, \quad \Theta^{\alpha(1+\beta)}, \quad \Theta^{\beta(1+\alpha)}, \quad \Theta^{(1+\alpha)(1+\beta)-1}.$$

Man kann nun leicht berechnen, dass in den drei ersten Fällen je 5 Operationen 2^{ter} Ordnung vorhanden sind, während im vierten Fall nur eine solche Operation existirt. Der vierte Fall ist also von den andern verschieden.

Nimmt man aber den zweiten Fall an, so hat man nur die Operation

$$S' = S_1 S$$

einzuführen, wodurch man die Gleichungen

$$S'^2 = 1, \quad S^2 = 1, \quad S'^{-1} S S' = S\Theta, \quad \Theta^2 = 1$$

erhält. Der zweite Fall giebt also dasselbe wie der erste, und dasselbe kann auch vom dritten gezeigt werden.

Es giebt also zwei Gruppen 8^{ter} *Ordnung mit nichtvertauschbaren Operationen. Die erste ergiebt sich aus der Formel* (102), *wenn das Zahlensystem* a, b, d *mit* $0, 1, 0$ *oder* $0, 1, 1$ *oder* $1, 1, 0$ *identificirt wird; die zweite Gruppe erhält man für* $a = b = d = 1$.

Von diesen Gruppen stellt die letzte das Multiplicationsgesetz der Quaternioneneinheiten*) dar. Man hat, um dies zu sehen, nur zu setzen:

$$\Theta = -1, \quad S = i, \quad S_1 = j,$$

und es wird dann

$$SS_1 = ij = k,$$

wobei für den Augenblick i, j, k die Hamilton'schen Symbole bedeuten.

§ 51.

Zusammenfassung des für die Ordnung p^4 Gefundenen. Vorbereitungen für eine Eintheilung dieser Ordnung.

Für die Ordnung p^4 haben wir das System der Relationen (94) aufgefunden. Dieses System definirt wirklich eine Gruppe p^{4ter} Ordnung, wenn die in den Paragraphen 47 und 48 genannten Bedingungen erfüllt sind. Die Exponenten auf den rechten Seiten der Relationen (94) könnten dabei beliebig grosse Zahlen sein; ja sogar, wenn unter diesen Exponenten negative vorkommen, so würden die Relationen als definirende einen Sinn behalten (§ 6), und es würden auch dann die gefundenen Bedingungen nothwendig und hinreichend dafür sein, dass die so definirte Gruppe von der p^{4ten} Ordnung ist. Es genügt aber vollständig, die Exponenten aus der Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots p-1$ zu nehmen. Im 48^{ten} Paragraphen hat sich unter anderem ergeben, dass he durch p theilbar sein muss, und es war dann

$$he = ps$$

gesetzt worden. Jetzt kann man sagen, dass eine der Zahlen h und e jedenfalls gleich Null sein muss. Es ist also auch $s = 0$ zu setzen, so dass man auch aus der Bedingung

$$\frac{h(h-1)}{2} cb + as + fh + gi \equiv 0 \bmod. p$$

die ersten beiden Glieder streichen kann.

Man kann somit die bis jetzt gefundenen Resultate so zusammenfassen: *Die Relationen* (94):

---

*) W. R. Hamilton, Elements of Quaternions p. 158. Man vergleiche auch Dyck, Math. Annalen Bd. 20, p. 43 und 44.

$$S_2^p = S_1^h S^i \Theta^k, \quad S_2^{-1} S_1 S_2 = S_1 S^e \Theta^f, \quad S_2^{-1} S S_2 = S\Theta^g, \quad S_1^p = S^c \Theta^d,$$
$$S_1^{-1} S S_1 = S\Theta^b, \quad S^p = \Theta^a, \quad \Theta^p = 1,$$

auf deren rechten Seiten die Exponenten von 0 *bis* $p-1$ *gehen, definiren eine Gruppe, welche dann und nur dann von der* $p^{4\text{ten}}$ *Ordnung ist, wenn die Bedingungen*

$$(104) \quad \begin{cases} bc = hb = he = 0, \\ ae + \frac{p(p-1)}{2} be \equiv gc \bmod p, \\ ae + \frac{p(p-1)}{2} ge + ib \equiv 0 \bmod p, \\ fh + gi \equiv 0 \bmod p \end{cases}$$

bestehen. Im andern Fall ist die definirte Gruppe von niedrigerer Ordnung (§ 6). *Jede Gruppe* $p^{4\text{ter}}$ *Ordnung ist in den Relationen enthalten.*

Die Operationen der Gruppe werden nun in Reihen geordnet, so dass die in derselben Reihe sich nur durch eine Potenz von Θ unterscheiden. Man erhält so ein Schema von der schon mehrfach benutzten Beschaffenheit, in welchem die Reihen selbst eine Gruppe $p^{3\text{ter}}$ Ordnung constituiren. Es wäre leicht nachzuweisen, dass man definirende Relationen für diese Gruppe $p^{3\text{ter}}$ Ordnung erhält, wenn man in den Gleichungen (94) die Potenzen von Θ weglässt. Die Gruppe, die so entsteht, hat lauter mit einander vertauschbare Operationen, wenn $e = 0$ ist, dagegen auch nichtvertauschbare Operationen, wenn

$$e = 1, 2, 3, \ldots p-1.$$

Aus diesem Grund behandle ich den Fall für sich, dass $e = 0$ *ist.* Es ergeben in diesem Fall die zweite, dritte und fünfte von den Gleichungen (94):

$$S_1 S_2 = S_2 S_1 \Theta^f, \quad S S_2 = S_2 S \Theta^g, \quad S S_1 = S_1 S \Theta^b.$$

Von den letzten drei Gleichungen besagt z. B. die erste, dass es erlaubt ist, das Symbol S_2 über das Symbol S_1 hinweg nach links zu setzen, wofern man zugleich den Factor Θ^f hinzufügt. Vermöge der drei Gleichungen kann man nun jedes irgendwie aus S_2, S_1, S, Θ gebildete Product in die Form

$$S_2^\alpha S_1^\beta S^\gamma \Theta^\delta$$

umrechnen. Man findet so

$$S_2^{-1}(S_2^\mu S_1^\nu S^\varrho \Theta^\sigma) S_2 = (S_2^\mu S_1^\nu S^\varrho \Theta^\sigma) \Theta^{g\varrho + f\nu},$$
$$S_1^{-1}(S_2^\mu S_1^\nu S^\varrho \Theta^\sigma) S_1 = (S_2^\mu S_1^\nu S^\varrho \Theta^\sigma) \Theta^{b\varrho - f\mu},$$
$$S^{-1}(S_2^\mu S_1^\nu S^\varrho \Theta^\sigma) S = (S_2^\mu S_1^\nu S^\varrho \Theta^\sigma) \Theta^{-b\nu - g\mu}.$$

Daraus folgt, dass die Operation

$$S_2^{\mu} S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma} \tag{105}$$

mit den Operationen S_2, S_1 und S vertauschbar ist unter der Bedingung, dass die Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} f\nu + g\varrho &\equiv 0 \\ -f\mu \quad + b\varrho &\equiv 0 \\ -g\mu - b\nu \quad &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{ mod. } p \tag{106}$$

bestehen. Bedenkt man noch, dass sich Θ mit allen andern Operationen vertauschen lässt, und dass die ganze Gruppe aus den Operationen S_2, S_1, S und Θ erzeugt wird, so kann man sagen: Die Congruenzen (106) bilden die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Operation (105) mit allen anderen Operationen vertauschbar, d. h. in der Gruppe ausgezeichnet enthalten ist.

Die Determinante der Gleichungen (106) ist

$$\begin{vmatrix} 0 & f & g \\ -f & 0 & b \\ -g & -b & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Es lassen sich deshalb die Zahlen μ, ν, ϱ aus der Reihe

$$0, 1, 2, \ldots p-1$$

auswählen, so dass sie den Congruenzen (106) genügen und nicht sämmtlich gleich Null sind. Setzt man diese Zahlen in die Formel (105) ein, so erhält man eine Operation Θ', die in der betrachteten Gruppe ausgezeichnet enthalten und keiner Potenz von Θ gleich ist. Um das letztere einzusehen, hat man nur zu bedenken, dass die Gleichungen (94) es ermöglichen, jede Operation der Gruppe in eine der p^4 Formen

$$S_2^{\mu} S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma} \quad (\mu, \nu, \varrho, \sigma = 0, 1, 2, \ldots p-1)$$

überzuführen, und dass diese Formen wegen der Ordnung der Gruppe verschiedene Operationen darstellen müssen. Nun sei $p^{\varepsilon} (\varepsilon = 1, 2, 3)$ der kleinste Exponent, mit dem potenzirt die Operation Θ' einer Potenz von Θ gleich wird; wofern man jetzt

$$\Theta_1 = \Theta'^{p^{\varepsilon-1}}$$

setzt, ist Θ_1 eine ausgezeichnete Operation der Gruppe, von der die p^{te} Potenz und keine niedrigere in Θ ausgedrückt werden kann.

Der betrachtete Fall lässt sich jetzt auf den anderen besonderen Fall zurückführen, dass $g = b = 0$ ist. Wenn nämlich g und b nicht beide gleich Null sind, so haben wir nur das im 44ten und 45ten Paragraphen geschilderte Verfahren wiederum auf die durch die Gleichungen (94) definirte Gruppe anzuwenden. Zuerst wird man wieder Θ als erzeugende Operation wählen; an zweiter Stelle wird man aber jetzt

nicht S wählen, sondern die Operation Θ_1, die soeben nachgewiesen wurde; dann hat man in der geschilderten Weise fortzufahren. Dadurch ergiebt sich eine neue Darstellung derselben Gruppe durch neue definirende Relationen. Diese Relationen haben die Form (94), aber andere Exponenten, und zwar sind nun b und g gleich 0, während es denkbar ist, dass dafür e wieder auftritt. *Man erhält also alle Gruppen von der Ordnung p^4, wenn man die Gleichungen* (94) *einerseits unter der Annahme $b = g = 0$, andererseits unter der Annahme $e = 1, 2, \ldots p-1$ discutirt.*

§ 52.

Aufstellung von drei Kategorien.

Ich suche nun die Gruppen $p^{4\,\text{ter}}$ Ordnung einzutheilen. Zunächst setze ich in den Gleichungen (94) die Exponenten b und g gleich Null. Dadurch wird S mit allen anderen Operationen vertauschbar. Ich schreibe jetzt Θ_1 an Stelle von S und lasse die dritte und fünfte von den Gleichungen weg. *Das System der Relationen bekommt dadurch folgende Form:*

$$(107)\quad S_2^{\,p} = S_1^{\,h}\Theta_1^{\,i}\Theta^k,\quad S_2^{-1}S_1S_2 = S_1\Theta_1^{\,e}\Theta^f,\quad S_1^{\,p} = \Theta_1^{\,c}\Theta^d,$$
$$\Theta_1^{\,p} = \Theta^a,\quad \Theta^p = 1.$$

Die Operationen der vorliegenden Gruppe sind alle mit einander vertauschbar dann und nur dann, wenn e und f beide gleich Null sind.

Wir werden natürlich die *Gruppen mit vertauschbaren Operationen* aussondern und aus ihnen eine *erste Kategorie* bilden. Es sind dies die Gruppen

$$[p^4],\quad [p^3][p],\quad [p^2][p^2],\quad [p^2][p][p],\quad [p][p][p][p].$$

Es fragt sich nun, was für Gruppen aus den Formeln (107) entspringen, wenn mindestens eine der Zahlen e und f von Null verschieden ist. Die Exponenten müssen den Bedingungen (104) genügen. Wäre nun h von Null verschieden, so ergäben diese Bedingungen

$$e = 0,$$

und da auch g im vorliegenden Fall gleich Null ist, ergäbe die letzte der Bedingungen:

$$f = 0.$$

Wir müssen also $h = 0$ setzen. Die Bedingungen ergeben dann nur noch, dass

$$(108)\qquad ae = 0$$

sein muss. Man berechnet ohne Schwierigkeiten, dass

$$S_2^{-1}(S_2^{\mu}S_1^{\nu}\Theta_1^{\varrho}\Theta^{\sigma})S_2 = (S_2^{\mu}S_1^{\nu}\Theta_1^{\varrho}\Theta^{\sigma})\,\Theta_1^{\nu e}\Theta^{\nu f},$$
$$S_1^{-1}(S_2^{\mu}S_1^{\nu}\Theta_1^{\varrho}\Theta^{\sigma})S_1 = (S_2^{\mu}S_1^{\nu}\Theta_1^{\varrho}\Theta^{\sigma})\,\Theta_1^{-\mu e}\Theta^{-\mu f},$$

und dass also die p^2 Operationen von der Form

$$\Theta_1^{\varrho}\Theta^{\sigma}$$

die einzigen sind, welche die Gruppe ausgezeichnet enthält. Die sämmtlichen in der Gruppe ausgezeichnet enthaltenen Operationen bilden aber offenbar eine Untergruppe, die für die ganze Gruppe charakteristisch ist. Diese Untergruppe ist hier von der Ordnung p^2, und die Gruppe $p^{4\text{ter}}$ Ordnung ist jedenfalls nicht dieselbe in zwei solchen Fällen, in denen sich die charakteristische Untergruppe als verschieden herausstellt. Diese Untergruppe ist durch die Relationen

$$\Theta_1^p = \Theta^a, \quad \Theta^p = 1$$

definirt; sie ist also cyklisch oder nicht, je nachdem a von Null verschieden oder gleich Null ist.

Ich bilde demgemäss eine *zweite* und eine *dritte* Kategorie von Gruppen $p^{4\text{ter}}$ Ordnung. *Beide Kategorien ergeben sich aus den Gleichungen* (107), *indem man* $h = 0$ *und von den Zahlen* e *und* f *eine als von Null verschieden annimmt. Die Gruppen der zweiten Kategorie werden dann dadurch erhalten, dass* $a = 0$ *gesetzt wird, und die der dritten dadurch, dass* $a = 1, 2, \ldots p-1$ *gesetzt wird.* Im letzten Fall zieht die Bedingung (108) noch nach sich, dass $e = 0$ und also f von Null verschieden sein muss. Im Uebrigen sind die Exponenten beliebig. Für die dritte Kategorie lässt sich das Formelsystem noch vereinfachen. Da nämlich a von Null verschieden ist, kann man a' der Congruenz

$$a\,a' \equiv 1 \bmod p$$

gemäss bestimmen. Es ist dann

$$\Theta = \Theta_1^{a'p}, \quad \Theta_1^i\Theta^k = \Theta_1^m, \quad \Theta_1^c\Theta^d = \Theta_1^n, \quad \Theta^f = \Theta_1^{lp}.$$

Dabei können die Exponenten m und n wegen der in i, k, c, d steckenden Willkür noch irgend welche Zahlen aus der Reihe

$$0, 1, 2, \ldots p^2 - 1$$

sein; l *dagegen muss,* da f von Null verschieden sein sollte, *gleich einer Zahl der Reihe* $1, 2, \ldots p-1$ *gesetzt werden, die definirenden Relationen für die dritte Kategorie können jetzt in die Form*

(109) $S_2^p = \Theta_1^m, \; S_1^p = \Theta_1^n, \; S_2^{-1}S_1S_2 = S_1\Theta_1^{lp}, \; \Theta_1^{p^2} = 1$

gesetzt werden.

§ 53.

Aufstellung der vierten Kategorie.

Es soll jetzt eine *vierte Kategorie* aus denjenigen neuen Gruppen gebildet werden, die aus den Gleichungen (94) hervorgehen, wenn einer der Exponenten b und g von Null verschieden ist. Den Fall, dass

$e = 0$ ist, haben wir jetzt nicht mehr zu berücksichtigen. Er kann nach § 51 keine neuen Gruppen geben. Nimmt man aber den Exponenten e verschieden von Null an, also gleich $1, 2, \ldots p-1$, so erhält man stets eine Gruppe, die keiner der drei ersten Kategorien angehört. Um dies einzusehen, transformire man die Operation

$$S_2^{\mu} S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma} \qquad (\mu, \nu, \varrho, \sigma = 0, 1, 2, \ldots p-1)$$

mit S_2 und mit S_1. Bei dieser Berechnung gestatte man sich, die Potenzen von Θ, die ja mit allen Operationen vertauschbar sind, zunächst einfach wegzulassen. Die Rechnung ist dann geradeso zu vollführen, als ob S_2 und S_1 mit S vertauschbar wären, und als ob die Stellung zweier Symbole S_1 und S_2 nach der Regel

$$S_1 S_2 = S_2 S_1 S^e$$

verändert werden dürfte. Nachdem die ganze Rechnung beendigt ist, muss man eine Potenz von Θ beifügen, um deren Exponenten wir uns aber nicht weiter kümmern wollen. So ergiebt sich

$$S_2^{-1}(S_2^{\mu} S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma}) S_2 = (S_2^{\mu} S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma}) S^{\nu e} \Theta^{w},$$
$$S_1^{-1}(S_2^{\mu} S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma}) S_1 = (S_2^{\mu} S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma}) S^{-\mu e} \Theta^{v}.$$

Nun ist e von Null verschieden. Die Operation

$$S_2^{\mu} S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma} \qquad (\mu, \nu, \varrho, \sigma = 0, 1, 2, \ldots p-1)$$

kann vermöge der gefundenen Gleichungen jedenfalls nur dann in der Gruppe ausgezeichnet enthalten sein, wenn $\mu = \nu = 0$ ist, d. h. wenn die Operation von der Form

$$S^{\varrho} \Theta^{\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 0, 1, 2, \ldots p-1)$$

ist. Es müsste aber dann auch

$$(S^{\varrho} \Theta^{\sigma}) \Theta^{-\sigma} = S^{\varrho}$$

und, wenn $\varrho = 1, 2, \ldots p-1$ wäre, auch S in der Gruppe ausgezeichnet enthalten sein. Letzteres ist augenscheinlich nicht der Fall, weil in den Gleichungen

$$S_2^{-1} S S_2 = S \Theta^{g}, \qquad S_1^{-1} S S_1 = S \Theta^{b}$$

einer der Exponenten g und b sicher nicht gleich Null ist. *Also liegt eine Gruppe vor, in der nur die Potenzen von Θ, also nur p Operationen ausgezeichnet enthalten sind, und man hat folglich in der That einen neuen Fall.*

Es müssen die Gleichungen (104) bestehen, und da jetzt e von Null verschieden ist, ergeben diese Gleichungen, dass $h = 0$ zu setzen ist. Lässt man nun vorläufig wieder die Potenzen von Θ weg, so gewinnen die Gleichungen (94) folgendes Aussehen:

(110) $$S_2^{p} = S^{t}, \quad S_2^{-1} S_1 S_2 = S_1 S^{e}, \quad S_2^{-1} S S_2 = S, \quad S_1^{p} = S^{c},$$
$$S_1^{-1} S S_1 = S, \quad S^{p} = 1.$$

Dieses Gleichungssystem ist im Grunde dasselbe wie das System (102), wenn man

$$S_2,\ S_1,\ S$$

beziehungsweise mit den Operationen

$$S_1,\ S,\ \Theta$$

von (102) identificirt. Die Rechnungen, welche zur Vereinfachung des Formelsystems (102) benutzt worden sind, lassen sich nun auch hier anwenden. Ist z. B. c eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots p-1$, und $p > 2$, so setze man

$$S'' = (S_2 S_1^w)^p,\quad S' = S_1^p,\quad S_0 = S^{cp}, \tag{111}$$

wobei v und w sich durch die Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} cw &\equiv c - i \\ ve &\equiv c \end{aligned}\right\} \text{mod. } p$$

bestimmen. Führt man die Operationen S'', S' und S_0 ein, so erhält man nach (110):

$$S''^p = S_0,\quad S''^{-1}S'S'' = S'S_0,\quad S''^{-1}S_0S'' = S_0,\quad S'^p = S_0,$$
$$S'^{-1}S_0S' = S_0,\quad S_0^p = 1.$$

Führt man nunmehr drei Operationen S'', S' und S_0 ein, die durch (111) bestimmt sind, wobei aber in (111) die Operationen S_2, S_1 und S als den Relationen (94) genügend angesehen werden, und zugleich $h=0$ ist, so muss sich ergeben:

$$S''^p = S_0\Theta^m,\quad S''^{-1}S'S'' = S'S_0\Theta^n,\quad S''^{-1}S_0S'' = S_0\Theta^s,\quad S'^p = S_0\Theta^t,$$
$$S'^{-1}S_0S' = S_0\Theta^x,\quad S_0^p = \Theta^y,\quad \Theta^p = 1,$$

wobei m, n, s, t, x, y Exponenten sind, über die, bei dieser Art der Ableitung, vorläufig nichts Näheres gesagt werden kann.

Nun ist in den beiden Paragraphen 49 und 50 für $p \geqq 2$ gezeigt worden, dass die Gleichungen (102), wenn b der Null incongruent ist, auf zwei typische Formen führen. Diese Formen sind, wenn wir die Bezeichnungen der Gleichungen (110) anwenden,

1) $S_2^p = S,\ S_2^{-1}S_1S_2 = S_1S,\ S_2^{-1}SS_2 = S,\ S_1^p = S,\ S_1^{-1}SS_1 = S,$
$S^p = 1,$

2) $S_2^p = 1,\ S_2^{-1}S_1S_2 = S_1S,\ S_2^{-1}SS_2 = S,\ S_1^p = 1,\ S_1^{-1}SS_1 = S,$
$S^p = 1.$

Wenn wir hier Potenzen von Θ hinzufügen, kommen wir auf zwei Systeme von folgender Form:

$$\left\{\begin{aligned} &S_2^p = S\Theta^k,\ S_2^{-1}S_1S_2 = S_1S\Theta^f,\ S_2^{-1}SS_2 = S\Theta^g,\ S_1^p = S\Theta^d, \\ &S_1^{-1}SS_1 = S\Theta^b,\ S^p = \Theta^a,\ \Theta^p = 1. \end{aligned}\right. \tag{112}$$

$$(113)\quad \begin{cases} S_2^p = \Theta^k,\ S_2^{-1}S_1S_2 = S_1S\Theta^f,\ S_2^{-1}SS_2 = S\Theta^g,\ S_1^p = \Theta^d, \\ S_1^{-1}SS_1 = S\Theta^b,\ S^p = \Theta^a,\ \Theta^p = 1. \end{cases}$$

Jede Gruppe $p^{4\,ter}$ Ordnung von der vierten Kategorie muss in einem dieser beiden Systeme enthalten sein.

Ueber die neuen Exponenten, die wir jetzt mit

$$a,\ b,\ d,\ g,\ f,\ k$$

bezeichnen, wissen wir vorläufig nichts; allein wir haben jedenfalls auch hier b und g nicht beide gleich Null anzunehmen, denn sonst enthielte die Gruppe p^2 ausgezeichnete Operationen und könnte nicht der vierten Kategorie angehören. Ferner müssen die Bedingungen (104) auch jetzt wieder erfüllt sein. Wenden wir diese Bedingungen auf die Formeln (112) an. Es liegt hier ein Specialfall der Gleichungen (94) vor, in welchem

$$h = 0,\quad i = 1,\quad e = 1,\quad c = 1$$

ist. Die Bedingungen (104) liefern daher der Reihe nach

$$b = 0,\quad a = g,\quad a + \frac{p(p-1)}{2}g \equiv 0 \bmod p,\quad g = 0,$$

d. h. also

$$a = b = g = 0.$$

Dies ist aber der ausgeschlossene Fall, in dem b und g beide gleich Null sind.

Es kann also nur das Formelsystem (113) in Betracht kommen. In diesem Fall ist

$$h = 0,\quad i = 0,\quad e = 1,\quad c = 0.$$

Die Bedingungen (104) ergeben nun

$$\left.\begin{aligned} a + \tfrac{p(p-1)}{2}b &\equiv 0 \\ a + \tfrac{p(p-1)}{2}g &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod p.$$

Ist p eine ungerade Primzahl, so ist $a = 0$, und die Exponenten bleiben im Uebrigen uneingeschränkt. Wenn aber $p = 2$ ist, so ergiebt sich

$$a \equiv -b \equiv -g \bmod 2,$$

und da b und g nicht beide gleich Null sein sollen, so ist

$$a = b = g = 1$$

zu setzen.

Die Gruppen $p^{4\,ter}$ Ordnung von der vierten Kategorie sind also, wenn p ungerade ist, in den Formeln

$$(114)\quad \begin{cases} S_2^p = \Theta^k,\ S_2^{-1}S_1S_2 = S_1S\Theta^f,\ S_2^{-1}SS_2 = S\Theta^g,\ S_1^p = \Theta^d, \\ S_1^{-1}SS_1 = S\Theta^b,\ S^p = 1,\ \Theta^p = 1 \end{cases}$$

enthalten, wenn aber $p = 2$ ist, so hat man statt dessen die Gleichungen:

$$(115)\quad \begin{cases} S_2^2 = \Theta^k, \quad S_2^{-1} S_1 S_2 = S_1 S \Theta^f, \quad S_2^{-1} S S_2 = S\Theta, \quad S_1^2 = \Theta^d, \\ S_1^{-1} S S_1 = S\Theta, \quad S^2 = \Theta, \quad \Theta^2 = 1. \end{cases}$$

Die Systeme (114) *und* (115) *geben auch stets Gruppen von der genannten Beschaffenheit, wenn in dem ersten System mindestens eine der Zahlen b und g aus der Reihe* $1, 2, \ldots p-1$ *genommen wird.*

§ 54.

Zweite Kategorie.

Es handelt sich jetzt um die Erörterung der in dem Formelsystem

$$S_2^p = \Theta_1^i \Theta^k, \quad S_1 S_2 = S_2 S_1 \Theta_1^e \Theta^f, \quad S_1^p = \Theta_1^c \Theta^d, \quad \Theta_1^p = 1, \quad \Theta^p = 1$$

enthaltenen Gruppen (vergl. § 52), wobei die Exponenten e und f nicht beide gleich Null sind. Man bezeichne mit U und U' irgend zwei Operationen der Gruppe:

$$U = S_2^\alpha S_1^\beta \Theta_1^\gamma \Theta^\delta \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, 2, \ldots p-1),$$
$$U' = S_2^{\alpha'} S_1^{\beta'} \Theta_1^{\gamma'} \Theta^{\delta'} \quad (\alpha', \beta', \gamma', \delta' = 0, 1, 2, \ldots p-1);$$

nach einer schon mehrfach, z. B. im 49ten Paragraphen, benutzten Methode berechnet man nun folgende Ausdrücke:

$$U'^{-1} U U' U^{-1} = \Theta_1^{(\alpha'\beta - \alpha\beta')e} \cdot \Theta^{(\alpha'\beta - \alpha\beta')f}$$
$$= (\Theta_1^e \Theta^f)^{\alpha'\beta - \alpha\beta'},$$
$$(116)\qquad U^p = (\Theta_1^i \Theta^k)^\alpha (\Theta_1^c \Theta^d)^\beta (\Theta_1^e \Theta^f)^{\alpha\beta \frac{p(p-1)}{2}}.$$

Die Gesammtheit derjenigen Operationen der Gruppe, welche in die Form

$$U'^{-1} U U' U^{-1}$$

gesetzt werden können, besteht somit aus den sämmtlichen Potenzen der Operation

$$\Theta_1^e \Theta^f.$$

Diese Potenzen machen eine Gruppe aus, die von der p^{ten} Ordnung ist und mit H bezeichnet werden soll.

Wegen der Gleichung (116) *nehme ich zunächst wieder an, dass $p > 2$ ist;* es ergiebt sich dann

$$(117)\qquad U^p = (\Theta_1^i \Theta^k)^\alpha (\Theta_1^c \Theta^d)^\beta.$$

Diejenigen Operationen der Gruppe, die in die Form

$$U^p$$

gesetzt werden können, bilden also eine Untergruppe K. Je nachdem nun die Operationen

$$\Theta_1^i \Theta^k, \quad \Theta_1^c \Theta^d$$

beide gleich der Identität, oder nicht beide gleich der Identität, aber von einander abhängig*), oder von einander unabhängig sind, wird die Gruppe K die Ordnung 1 oder p oder p^2 besitzen. In dem mittleren von diesen zuletzt genannten drei Fällen ist noch darauf zu achten, ob die Untergruppe K mit der Untergruppe H übereinstimmt oder nicht. Dieser Fall theilt sich also, und es erscheinen dadurch vier Fälle. Offenbar ist die Ordnung der Untergruppe K und das Verhalten dieser Untergruppe zur Untergruppe H für die ganze Gruppe charakteristisch. Zwei Gruppen $p^{4\text{ter}}$ Ordnung, welche zwei verschiedenen von den genannten Fällen angehören, können nicht holoedrisch isomorph sein, und jeder der Fälle kommt vor, weil die Exponenten i, k, c, d, e, f entsprechend gewählt werden können.

Es lässt sich nun zeigen, dass jedem Fall nur eine Gruppe entspricht, *so dass also genau vier Gruppen in der betrachteten Kategorie vorhanden sind.* Im ersten Fall ist $i = k = c = d = 0$, und wenn man

$$\Theta_1^e \Theta^f = \Theta'$$

setzt und irgend eine von Θ' unabhängige, aus Θ und Θ_1 ableitbare Operation mit Θ'' bezeichnet, *so findet man als definirende Relationen*

$$S_2^p = 1, \quad S_1 S_2 = S_2 S_1 \Theta', \quad S_1^p = 1, \quad \Theta'^p = 1, \quad \Theta''^p = 1.$$

Man hat eine zerfallende Gruppe vor sich.

In den andern Fällen möge Θ' irgend eine primitive Operation der mit H bezeichneten Gruppe bedeuten, und Θ'' ganz so wie vorher gewählt werden. Als zweiter Fall wird nun derjenige angesehen, in welchem die Gruppe K von der p^{ten} Ordnung ist und mit H übereinstimmt. Es ist dann

$$\Theta_1^e \Theta^f = \Theta'^l, \quad \Theta_1^i \Theta^k = \Theta'^m, \quad \Theta_1^c \Theta^d = \Theta'^n.$$

Der Exponent l ist der Null incongruent, ebenso einer von den Exponenten m und n. Wir wollen annehmen es sei

$$n = 1, 2, \ldots, p-1,$$

der andere Fall kann ebenso behandelt werden. Man bestimme jetzt (vergl. § 49) w durch die Congruenz

$$nw \equiv n - m \bmod. p$$

und v gemäss der Bedingung

$$vl \equiv n \bmod. p.$$

Wenn man nun statt S_2, S_1, Θ_1, Θ als erzeugende Operationen einführt

$$S_2' = (S_2 S_1^w)^v, \quad S_1' = S_1^v, \quad \Theta_1' = \Theta'^{nv}$$

und Θ'', *so erhält man die Relationen:*

*) D. h. eine sei Potenz der andern.

$$S_2'^p = \Theta_1', \quad S_1'S_2' = S_2'S_1'\Theta_1', \quad S_1'^p = \Theta_1', \quad \Theta_1'^p = 1, \quad \Theta''^p = 1.$$

Es liefert auch dieser Fall eine zerfallende Gruppe.

Im dritten Fall ist die Gruppe K auch von der p^{ten} Ordnung, stimmt aber nicht mit H überein. Man kann nun die oben beschriebene Wahl von Θ'' so einrichten, dass die Operation Θ'' aus der Gruppe K genommen wird. Es ist dann

$$\Theta_1^e\Theta'^f = \Theta'^l, \quad \Theta_1^i\Theta'^k = \Theta''^m, \quad \Theta_1^c\Theta'^d = \Theta''^n,$$

und es gilt von den Zahlen l, m, n dasselbe wie vorhin. Ich nehme wieder an, dass n der Reihe $1, 2, \ldots p-1$ angehört, und bestimme w durch die Congruenz

$$nw \equiv -m \bmod. p.$$

Setzt man jetzt

$$S_2' = S_2S_1^w, \quad \Theta_2 = \Theta''^n, \quad \Theta_0 = \Theta'^l,$$

so erhält man die definirenden Relationen:

$$S_2'^p = 1, \quad S_1S_2' = S_2'S_1\Theta_0, \quad S_1^p = \Theta_2, \quad \Theta_0^p = 1, \quad \Theta_2^p = 1.$$

Um noch den letzten Fall zu erledigen, bedenke man, dass der Ausdruck (117), wenn α und β alle Zahlen von 0 bis $p-1$ durchlaufen, die sämmtlichen p^2 aus Θ und Θ_1 ableitbaren Operationen darstellt. Man wähle wieder Θ' und Θ'' in der angegebenen Weise. Man kann nun zwei Operationen S_1' und S_2' der Gesammtgruppe so finden, dass

$$S_1'^p = \Theta', \quad S_2'^p = \Theta''.$$

Diese Operationen S_1' und S_2' sind von der Ordnung p^2 und können nicht aus Θ' und Θ'' gebildet werden. Es kann aber auch keine Gleichung von der Form

$$S_2' = S_1'^\sigma\Theta'^\mu\Theta''^\nu$$

bestehen, weil aus einer solchen Gleichung folgen müsste, dass

$$S_2'^p = S_1'^{\sigma p}.$$

Es zeigt sich jetzt, dass man aus S_2', S_1', Θ' und Θ'' wieder die ganze Gruppe erzeugen kann. Man kommt, indem man diese erzeugenden Operationen einführt, auf die definirenden Relationen

$$S_2'^p = \Theta'', \quad S_1'S_2' = S_2'S_1'\Theta'^s, \quad S_1'^p = \Theta', \quad \Theta'^p = 1, \quad \Theta''^p = 1.$$

Die mittlere Relation ergiebt sich aus dem Umstand, dass jede Operation von der Form

$$S_2'^{-1}S_1'S_2'S_1'^{-1}$$

einer Potenz von Θ' gleich sein muss. Ueber den Exponenten s ist weiter nichts bekannt, als dass er eine von den Zahlen $1, 2, \ldots p-1$ sein muss, weil sonst keine Gruppe der betrachteten Kategorie vorliegen könnte. Bestimmt man wieder v durch die Bedingung

$$vs \equiv 1 \bmod. p$$

und führt man statt S_2', S_1', Θ' und Θ'' die v^{ten} Potenzen S_2'', S_1'', Θ_0', Θ_0'' dieser Operationen ein, *so erhält man als definirende Relationen:*

$$S_2''^p = \Theta_0'', \quad S_1'' S_2'' = S_2'' S_1'' \Theta_0', \quad S_1''^p = \Theta_0', \quad \Theta_0'^p = 1, \quad \Theta_0''^p = 1.$$

§ 55.

Zweite Kategorie in der Ordnung 16.

Es ist noch zu erörtern, was geschieht, wenn die Primzahl $p = 2$ ist. Die Formel (116) geht unter diesen Umständen in die folgende über

$$U^p = (\Theta_1^i \Theta^k)^\alpha (\Theta_1^c \Theta^d)^\beta (\Theta_1^e \Theta^f)^{\alpha\beta}. \tag{118}$$

Ich setze wieder

$$\Theta_1^e \Theta^f = \Theta'.$$

In diesem Fall besteht die Gruppe H lediglich aus den Operationen 1 und Θ'; es ist also Θ' die einzige nichtidentische Operation, welche in die Form

$$U'^{-1} U U' U^{-1}$$

gesetzt werden kann. Ferner wären die Operationen von der Form

$$U^p$$

wieder zu betrachten, die aber jetzt nicht nothwendig eine Gruppe ausmachen. Man hat nun zwei Möglichkeiten in Betracht zu ziehen: entweder ist jeder der beiden Ausdrücke

$$\Theta_1^i \Theta^k, \qquad \Theta_1^c \Theta^d$$

durch Θ' darstellbar, oder einer von beiden ist es sicher nicht. Tritt der erste Umstand ein, so sind alle Operationen von der Form U^p in der Operation Θ' ausdrückbar, andernfalls nicht. Die Operation Θ' spielt aber eine ganz besondere Rolle in der Gruppe, derart, dass zwei Gruppen von der betrachteten Art nur so holoedrisch isomorph sein könnten, dass die Operationen, welche beiderseits die Rolle von Θ' spielen, einander zugeordnet wären. Also bedeuten offenbar die erwähnten beiden Möglichkeiten zwei verschiedene Arten des Verhaltens, die für die Gruppe charakteristisch sind.

Das eine Mal hat man nun

$$\Theta_1^i \Theta^k = \Theta'^m, \quad \Theta_1^c \Theta^d = \Theta'^n \qquad (m, n = 0, 1),$$

und da S_2, S_1 und Θ' für sich eine Gruppe 8^{ter} Ordnung erzeugen, ist leicht zu sehen, dass die Gruppe 16^{ter} Ordnung zerfällt, als directes Product einer Gruppe 8^{ter} und einer Gruppe zweiter Ordnung darstellbar ist. Die Gruppe 8^{ter} Ordnung kann nun nach dem Früheren auf ihre einfachste Form gebracht werden, wobei wir zweierlei erhalten können. Die Gruppe 16^{ter} Ordnung ist deshalb durch eines von den beiden folgenden Systemen dargestellt:

$$S_2'^2 = 1, \quad S_1' S_2' = S_2' S_1' \Theta', \quad S_1'^2 = 1, \quad \Theta'^2 = 1, \quad \Theta''^2 = 1$$

oder

$$S_2'^2 = \Theta', \quad S_1' S_2' = S_2' S_1' \Theta', \quad S_1'^2 = \Theta', \quad \Theta'^2 = 1, \quad \Theta''^2 = 1.$$

Wir haben hier zwei verschiedene Gruppen vor uns. Die erste hat nämlich, wie die Formel (118) zeigt, 11 Operationen von der Ordnung 2, die zweite 3 solche Operationen.

Tritt nun aber der andere Umstand ein, dass von den Operationen

$$\Theta_1^i \Theta^k, \qquad \Theta_1^c \Theta^d$$

jedenfalls eine nicht in Θ' ausgedrückt werden kann, so gelte dies von der ersten Operation:

$$\Theta_1^i \Theta^k = \Theta''.$$

Ferner sei

$$\Theta_1^c \Theta^d = \Theta''^s \Theta'^t.$$

Setzt man jetzt

$$S_1' = S_2^s S_1,$$

so giebt die Gleichung (118)

$$S_1'^2 = \Theta'^{t+s}.$$

Führt man nun S_1', Θ', Θ'' als neue erzeugende Operationen ein, indem man S_2 beibehält, so erhält man entweder

$$S_2^2 = \Theta'', \quad S_2^{-1} S_1' S_2 = S_1' \Theta', \quad S_1'^2 = \Theta', \quad \Theta'^2 = 1, \quad \Theta''^2 = 1$$

oder

$$S_2^2 = \Theta'', \quad S_2^{-1} S_1' S_2 = S_1' \Theta', \quad S_1'^2 = 1, \quad \Theta'^2 = 1, \quad \Theta''^2 = 1$$

als definirende Relationen. Diese beiden Systeme repräsentiren verschiedene Gruppen, und zwar enthält die erste 3, die zweite dieser Gruppen 7 Operationen zweiter Ordnung.

Es hat sich also ergeben, dass auch im Fall $p^4 = 16$ *vier Gruppen der zweiten Kategorie angehören, und zwar sind diese Gruppen durch dieselben Formelsysteme dargestellt, die für ein ungerades p im vorhergehenden Paragraphen gefunden worden sind.* Dies beruht aber auf der besondern Wahl der Grundformeln.

In der zweiten Kategorie der Gruppen $p^{4\,\text{ter}}$ Ordnung fanden sich, ob $p > 2$ war oder gleich 2, zwei zerfallende Gruppen. Man kann umgekehrt Gruppen $p^{4\,\text{ter}}$ Ordnung als directe Producte zu bilden suchen; es zeigt sich dann, dass ausser den beiden gefundenen Gruppen und ausser den nichtcyklischen Gruppen der ersten Kategorie keine zerfallenden Gruppen in der betrachteten Ordnung existiren.

§ 56.

Dritte Kategorie.

Die dritte Kategorie ist durch die Formeln (109) dargestellt:

$$S_2^p = \Theta_1^m, \quad S_1^p = \Theta_1^n, \quad S_1 S_2 = S_2 S_1 \Theta_1^{lp}, \quad \Theta_1^{p^2} = 1.$$

Hier bedeutet l eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots p-1$, und m und n gehören der Reihe $0, 1, 2, \ldots p^2 - 1$ an. Zunächst berechnet man wieder die Potenzen der allgemeinen Operation

$$S_2^\alpha S_1^\beta \Theta_1^\gamma \quad \begin{pmatrix} \alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots p-1 \\ \gamma = 0, 1, 2, \ldots p^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Es ergiebt sich

$$(119) \qquad (S_2^\alpha S_1^\beta \Theta_1^\gamma)^\mu = S_2^{\alpha\mu} S_1^{\beta\mu} \Theta_1^{\alpha\beta l p \frac{\mu(\mu-1)}{2} + \mu\gamma}.$$

Bedeutet p eine ungerade Primzahl, so folgt aus dieser Gleichung, dass

$$(120) \qquad (S_2^\alpha S_1^\beta \Theta_1^\gamma)^p = \Theta_1^{\alpha m + \beta n + \gamma p},$$

und man kann jetzt zeigen, dass verschiedene Fälle vorliegen, je nachdem m und n beide durch p theilbar sind oder nicht. Im ersten Fall zeigt die Gleichung (120), dass eine beliebige Operation der Gruppe, wenn sie mit p^2 potenzirt wird, die identische Operation ergiebt, im andern Fall sind Operationen von der Ordnung p^3 vorhanden, indem eine von den Operationen S_1 und S_2 jedenfalls diese Ordnung besitzt.

Im ersten Fall haben die Congruenzen

$$(121) \qquad \left.\begin{aligned} m + pw &\equiv 0 \\ n + pv &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{ mod. } p^2$$

Lösungen, und wenn man

$$(122) \qquad S'' = S_2 \Theta_1^w, \quad S' = S_1 \Theta_1^v, \quad \Theta' = \Theta_1^l$$

als neue erzeugende Operationen einführt, *so ergeben sich die definirenden Relationen*

$$S''^p = 1, \quad S'^p = 1, \quad S'S'' = S''S'\Theta'^p, \quad \Theta'^{p^2} = 1.$$

Im zweiten Fall wollen wir annehmen, dass beispielsweise der Exponent n nicht durch p theilbar sei. Man bestimme x durch die Congruenz

$$m + nx \equiv 0 \text{ mod. } p^2$$

und y durch die Congruenz

$$ly \equiv n \text{ mod. } p.$$

Wenn man nun die Operationen

$$S'' = (S_2 S_1^x)^y. \quad \Theta' = \Theta_1^n$$

einführt, *so erhält man die Relationen*

$$S''^p = 1, \quad S_1^p = \Theta', \quad S_1 S'' = S'' S_1 \Theta'^p, \quad \Theta'^{p^2} = 1.$$

Es führt also jeder der beiden Fälle gerade auf eine Gruppe.

Ist die Primzahl p gleich 2, *so ergeben sich dieselben Formelsysteme als Resultat.* An Stelle der Gleichung (120) tritt in diesem Fall die folgende

$$(S_2^\alpha S_1^\beta \Theta_1^\gamma)^2 = \Theta_1^{\alpha m + \beta n + 2\alpha\beta + 2\gamma},$$

die für $p = 2$, $l = 1$, $\mu = 2$ sofort aus (119) sich ergiebt. Wiederum ist der Fall, in dem m und n beide durch 2 theilbar sind, gänzlich verschieden von demjenigen, in welchem eine der Zahlen m und n ungerade ist. Im ersten Falle bestimme man w und v aus den Congruenzen (121) und führe dann die Substitution (122) aus. Man erhält dann wieder

$$S''^2 = 1, \quad S'^2 = 1, \quad S'S'' = S''S'\Theta'^2, \quad \Theta'^4 = 1.$$

Im zweiten Fall definire man x durch die Bedingung

$$m + (n+2)x \equiv 0 \bmod. 4,$$

indem man n als ungeraden Exponenten, also n gleich 1 oder 3, annimmt. Nachher setze man

$$S'' = (S_2 S_1^x)^n, \quad \Theta' = \Theta_1^n,$$

und es ergeben sich die Relationen

$$S''^2 = 1, \quad S_1^2 = \Theta', \quad S_1 S'' = S'' S_1 \Theta'^2, \quad \Theta'^4 = 1.$$

Unter allen Umständen enthält also die dritte Kategorie der Gruppen $p^{4\text{ter}}$ *Ordnung genau zwei Gruppen.*

§ 57.

Eine Eigenschaft einer der gefundenen Gruppen.

Die Gruppe, welche durch die Formeln

$$S'^p = 1, \quad S^p = 1, \quad SS' = S'S\Theta^p, \quad \Theta^{p^2} = 1$$

dargestellt ist, *kann nicht aus zweien ihrer Operationen erzeugt werden.* Für ein solches Verhalten dürfte wohl, abgesehen von zerfallenden Gruppen, kein Beispiel bekannt sein, während wir hier eine nichtzerfallende Gruppe haben (§ 55 Schluss).

Um bei der vorliegenden Gruppe die erwähnte Eigenschaft nachzuweisen, nehme ich zwei Operationen an:

(123) $$S'^\mu S^\nu \Theta^\sigma, \quad S'^{\mu'} S^{\nu'} \Theta^{\sigma'}.$$

Zunächst möge der Fall untersucht werden, dass

$$\mu\nu' - \mu'\nu \equiv 0 \bmod. p.$$

In diesem Fall ist es möglich, die Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} \mu\alpha - \mu'\beta &\equiv 0 \\ \nu\alpha - \nu'\beta &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod. p$$

so zu befriedigen, dass die Zahlen α und β sich nicht beide als der Null congruent ergeben. Durch Rechnung findet sich dann, dass die Ausdrücke

$$(S'^{\mu}S^{\nu}\Theta^{\sigma})^{\alpha}, \quad (S'^{\mu'}S^{\nu'}\Theta^{\sigma'})^{\beta}$$

sich nur um eine Potenz von Θ unterscheiden. Eine der Operationen (123) kann also in der andern und in Θ ausgedrückt werden; da aber die p^{te} Potenz irgend einer Operation der Gruppe (vergl. (119)) in Θ ausdrückbar ist, so sieht man jetzt, dass aus den Operationen (123) keinesfalls mehr als p^3 Operationen gebildet werden können.

Wir denken uns also jetzt, dass

$$\mu\nu' - \mu'\nu$$

mod. p der Null incongruent ist. Irgend ein aus den Operationen (123) gebildeter Ausdruck hat nun die Gestalt:

$$(S'^{\mu}S^{\nu}\Theta^{\sigma})^{\gamma}(S'^{\mu'}S^{\nu'}\Theta^{\sigma'})^{\delta}(S'^{\mu}S^{\nu}\Theta^{\sigma})^{\varepsilon}(S'^{\mu'}S^{\nu'}\Theta^{\sigma'})^{\zeta}\ldots.$$

Wenn ein einzelner Ausdruck von dieser Form vorliegt, so kann man allmählig alle die Symbole S' an das linke Ende schaffen. Wegen der Relation

$$SS' = S'S\Theta^{p}$$

hat man dabei jedesmal Θ^{p} hinzuzufügen, so oft man ein Symbol S' über ein Symbol S linkswärts hinweggesetzt hat. Vereinigt man nun alle die Symbole S', nachdem sie alle links stehen, und vereinigt man schliesslich auch die Symbole S und die Symbole Θ, so erhält man

$$(124) \qquad S'^{\mu(\gamma+\varepsilon+\cdots)+\mu'(\delta+\zeta+\cdots)}S^{\nu(\gamma+\varepsilon+\cdots)+\nu'(\delta+\zeta+\cdots)} \times \Theta^{\sigma(\gamma+\varepsilon+\cdots)+\sigma'(\delta+\zeta+\cdots)+\varkappa p}.$$

Dabei ist $\varkappa$ eine Zahl, um deren Beschaffenheit wir uns nicht weiter kümmern; es genügt zu wissen, dass $\varkappa$ eine ganze Zahl ist.

Wir untersuchen jetzt, ob der gefundene Ausdruck einer Potenz von Θ gleich sein kann. In diesem Fall müssen die Congruenzen

$$\left.\begin{aligned}\mu(\gamma+\varepsilon+\cdots)+\mu'(\delta+\zeta+\cdots)&\equiv 0\\ \nu(\gamma+\varepsilon+\cdots)+\nu'(\delta+\zeta+\cdots)&\equiv 0\end{aligned}\right\} \text{ mod. } p$$

bestehen. Diese Congruenzen ergeben aber, weil $\mu\nu' - \mu'\nu$ der Null incongruent ist, dass

$$\left.\begin{aligned}\gamma+\varepsilon+\cdots&\equiv 0\\ \delta+\zeta+\cdots&\equiv 0\end{aligned}\right\} \text{ mod. } p.$$

Nun gewinnt der Ausdruck (124) die Gestalt

$$\Theta^{\lambda p}.$$

Es können also nur diejenigen Potenzen von Θ in den Operationen

(123) ausgedrückt werden, die Potenzen von Θ^p sind. Keinenfalls also können alle Operationen der Gruppe aus zweien von ihnen gebildet werden.*)

§ 58.

Vierte Kategorie. Vereinfachung der Formeln (114).

Um die Anzahl der Gruppen vierter Kategorie zunächst für $p>2$ zu bestimmen, vereinfachen wir die Formeln (114). Von den Exponenten b und g ist einer von Null verschieden. Man kann aber unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass g von Null verschieden sein soll; wenn man nämlich:

$$S_2'' = S_1^{-1}, \quad S_1'' = S_2$$

setzt, so erhält man als neue definirende Relationen

$$S_2''^p = \Theta^{-d}, \quad S_2''^{-1} S_1'' S_2'' = S_1'' S \Theta^{f-b}, \quad S_2''^{-1} S S_2'' = S\Theta^{-b},$$
$$S_1''^p = \Theta^k, \quad S_1''^{-1} S S_1'' = S\Theta^g, \quad S^p = 1, \quad \Theta^p = 1,$$

in denen $-b$, oder was dasselbe ist $p-b$, die Rolle spielt, die vorher g gespielt hat.

Bestimmt man nun v aus der Congruenz

$$vg + b \equiv 0 \bmod. p$$

und führt

$$S_1' = S_2^v S_1$$

ein, so ergeben die Gleichungen (114), in denen jetzt $0 < g \leqq p-1$ angenommen wird:

$$S_2^p = \Theta^k, \quad S_2^{-1} S_1' S_2 = S_1' S \Theta^f, \quad S_2^{-1} S S_2 = S\Theta^g, \quad S_1'^p = \Theta^{d'},$$
$$S_1'^{-1} S S_1' = S, \quad S^p = 1, \quad \Theta^p = 1.$$

Die vierte von diesen Gleichungen ergiebt sich nämlich durch den schon früher benutzten Kunstgriff, dass von den Potenzen der Operation Θ abgesehen wird. Dadurch erhält man aus (114) die Gleichungen

$$S_2^p = 1, \quad S_2^{-1} S_1 S_2 = S_1 S, \quad S_1^p = 1, \quad S^p = 1$$

zwischen drei Symbolen S_2, S_1, S, von denen das letzte mit den andern vertauschbar ist. Es ist dann die p^{te} Potenz eines beliebigen Ausdrucks von der Form

$$S_2^\alpha S_1^\beta S^\gamma$$

gleich der Identität (vergl. § 49). So ergiebt sich, wenn die Potenzen von Θ wieder berücksichtigt werden, dass vermöge der Gleichungen (114) die Operation

*) Die Eigenschaft, von der hier die Rede ist, kommt auch einer der Gruppen zu, die in dem Formelsystem (55) enthalten sind. Man hat nur in den Formeln (55) die Zahlen a und b gleich zu nehmen und zwar gleich einer Zahl, die mod. q zum Exponenten p gehört.

$$S_1'^p = (S_2^\varrho S_1)^p$$

gleich einer Potenz von Θ sein muss.

Es können nun die Gleichungen noch weiter vereinfacht werden. Setzt man nämlich

$$S\Theta^\sigma = S', \qquad \Theta^\varrho = \Theta',$$

so erhält man *als einfachste Darstellung der Gruppe vierter Kategorie*:

$$(125)\quad \begin{cases} S_2^p = \Theta'^k,\ S_2^{-1}S_1'S_2 = S_1'S',\ S_2^{-1}S'S_2 = S'\Theta',\ S_1'^p = \Theta'^{d''}, \\ S_1'^{-1}S'S_1' = S',\ S'^p = 1,\ \Theta'^p = 1, \end{cases}$$

wobei $p > 2$ angenommen ist.

§ 59.

Bedingungen für den Isomorphismus von zwei in den Formeln (125) enthaltenen Gruppen.

In diesen Gleichungen kann man wieder die Buchstaben Θ, S, S_1, S_2 zur Bezeichnung der Operationen verwenden. Wir denken uns jetzt zwei Gruppen G und G', *G definirt durch die Gleichungen*

$$(126)\quad \begin{cases} S_2^p = \Theta^k,\ S_2^{-1}S_1S_2 = S_1S,\ S_2^{-1}SS_2 = S\Theta,\ S_1^p = \Theta^d, \\ S_1^{-1}SS_1 = S,\ S^p = 1,\ \Theta^p = 1 \end{cases}$$

und G' definirt durch das System

$$(127)\quad \begin{cases} S_2'^p = \Theta'^k,\ S_2'^{-1}S_1'S_2' = S_1'S',\ S_2'^{-1}S'S_2' = S'\Theta',\ S_1'^p = \Theta'^{d'}, \\ S_1'^{-1}S'S_1' = S',\ S'^p = 1,\ \Theta'^p = 1. \end{cases}$$

Es ist die Frage, unter welchen Umständen G und G' holoedrisch isomorph sind.

Nun sind die Potenzen von Θ die einzigen Operationen der Gruppe G, die mit allen andern Operationen vertauschbar sind; dies ist im 53ten Paragraphen bewiesen worden. Zugleich geht aus dem betreffenden Beweis hervor, dass jede Operation von der Form

$$S^\varrho\Theta^\sigma$$

nur um eine Potenz von Θ geändert wird, wenn man sie mit irgend einer Operation der Gruppe transformirt, und dass die Operationen dieser Form die einzigen von der genannten Eigenschaft sind. Ferner ist S_1 sowohl mit Θ als mit S vertauschbar, und es sind die Operationen von der Form

$$S_1^\tau S^\varrho\Theta^\sigma$$

die einzigen, die mit jeder Operation von der Form

$$S^\varrho\Theta^\sigma$$

vertauschbar sind.

Bedenkt man ausserdem, dass genau das Entsprechende von der durch die Gleichungen (127) definirten, aus Θ', S', S_1', S_2' erzeugten Gruppe ausgesagt werden kann, so kommt man zu dem Resultat: Wenn die beiden Gruppen G und G' holoedrisch isomorph sind, so entsprechen den Potenzen von Θ die Potenzen von Θ', den aus Θ und S ableitbaren Operationen von G die aus Θ' und S' ableitbaren Operationen von G' und endlich den Operationen von der Form

$$S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma}$$

die Operationen von der Form

$$S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma}.$$

Nehmen wir jetzt an, dass Isomorphismus bestehe, und dass den Operationen Θ', S', S_1', S_2' von G' die Operationen $\overline{\Theta}, \overline{S}, \overline{S_1}, \overline{S_2}$ der Gruppe G entsprechen, so ist nothwendig

$$(128) \qquad \begin{cases} \overline{\Theta} = \Theta^u, \quad \overline{S} = S^y \Theta^w, \quad \overline{S_1} = S_1^x S^y \Theta^s, \\ \overline{S_2} = S_2^{\mu} S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma}. \end{cases}$$

Dabei müssen die Exponenten $w, y, s, \nu, \varrho, \sigma$ im Rahmen von 0 bis $p-1$ gedacht werden, während u, v, x, μ der Reihe $1, 2, \ldots p-1$ angehören. Wegen der isomorphen Beziehung müssen nun die Operationen $\overline{\Theta}, \overline{S}, \overline{S_1}, \overline{S_2}$ denselben Relationen genügen, wie die entsprechenden Operationen Θ', S', S_1', S_2', *d. h. es müssen die Gleichungen*

$$(129) \qquad \begin{cases} \overline{S_2}^p = \overline{\Theta}^k, \quad \overline{S_2}^{-1} \overline{S_1} \overline{S_2} = \overline{S_1} \overline{S}, \quad \overline{S_2}^{-1} \overline{S} \overline{S_2} = \overline{S} \overline{\Theta}, \quad \overline{S_1}^p = \overline{\Theta}^d, \\ \overline{S_1}^{-1} \overline{S} \overline{S_1} = \overline{S}, \quad \overline{S}^p = 1, \quad \overline{\Theta}^p = 1 \end{cases}$$

bestehen.

Umgekehrt, wenn die Operationen der Gruppe G:

$$\Theta^u, \quad S^y \Theta^w, \quad S_1^x S^y \Theta^s, \quad S_2^{\mu} S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma},$$

in welchen die Exponenten den genannten Bedingungen genügen, die Gleichungen (129) befriedigen, so haben wir damit vier Operationen von G, die zusammen die Gruppe G wieder erzeugen und welche die definirenden Relationen (127) der Gruppe G' erfüllen. Daraus aber folgt nach einem schon vielfach benutzten Schluss, dass die Gruppe G mit der Gruppe G' holoedrisch isomorph ist.

§ 60.

Entwicklung der Bedingungen.

Jetzt ist zu untersuchen, wann die Gleichungen (129) sich erfüllen lassen. Im Hinblick auf die in (128) gegebenen Ausdrücke von $\overline{\Theta}, \overline{S}, \overline{S_1}, \overline{S_2}$ lauten diese Gleichungen folgendermassen:

$$(130)\quad \begin{cases} (S_2^{\mu} S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma})^p = \Theta^{k' u}, \\ (S_1^{\varkappa} S^{\lambda} \Theta^{\tau})\,(S_2^{\mu} S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma}) = (S_2^{\mu} S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma})\,(S_1^{\varkappa} S^{\lambda} \Theta^{\tau})\,(S^{\varrho} \Theta^{\omega}), \\ (S^{\varrho} \Theta^{\omega})\,(S_2^{\mu} S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma}) = (S_2^{\mu} S_1^{\nu} S^{\varrho} \Theta^{\sigma})\,(S^{\varrho} \Theta^{\omega})\,\Theta^{u}, \\ (S_1^{\varkappa} S^{\lambda} \Theta^{\tau})^p = \Theta^{d' u}, \\ (S^{\varrho} \Theta^{\omega})\,(S_1^{\varkappa} S^{\lambda} \Theta^{\tau}) = (S_1^{\varkappa} S^{\lambda} \Theta^{\tau})\,(S^{\varrho} \Theta^{\omega}), \\ (S^{\varrho} \Theta^{\omega})^p = 1, \\ \Theta^{pu} = 1. \end{cases}$$

Diese Gleichungen müssten nun richtig sein vermöge der zwischen den Symbolen Θ, S, S_1, S_2 bestehenden definirenden Relationen (126).

Nun sind ja zwei von den drei Symbolen Θ, S, S_1 mit einander vertauschbar, und man erkennt leicht, dass die drei letzten von den Gleichungen (130) stets erfüllt sind. Um den Inhalt der übrigen Gleichungen zu entwickeln, machen wir folgende Umformungen. Von den Gleichungen (126) liefert die dritte

$$(131)\qquad S_2^{-\beta} S^{\alpha} S_2^{\beta} = S^{\alpha} \Theta^{\alpha\beta},$$

und die zweite

$$(132)\qquad S_2^{-1} S_1^{\beta} S_2 = S_1^{\beta} S^{\beta}.$$

Diese letzte Gleichung ergiebt aber

$$S_2^{-2} S_1^{\beta} S_2^{2} = (S_2^{-1} S_1^{\beta} S_2)\,(S_2^{-1} S^{\beta} S_2),$$

und dies ist vermöge (131) und (132) gleich

$$S_1^{\beta} S^{2\beta} \Theta^{\beta}.$$

Also ist auch

$$S_2^{-3} S_1^{\beta} S_2^{3} = (S_2^{-1} S_1^{\beta} S_2)\,(S_2^{-1} S^{2\beta} S_2)\,\Theta^{\beta}$$

oder vermöge (131) und (132) gleich

$$S_1^{\beta} S^{3\beta} \Theta^{(1+2)\beta}.$$

Ganz allgemein findet man

$$S_2^{-\alpha} S_1^{\beta} S_2^{\alpha} = S_1^{\beta} S^{\alpha\beta} \Theta^{[1+2+\cdots+(\alpha-1)]\beta},$$

d. h.

$$(133)\qquad S_1^{\beta} S_2^{\alpha} = S_2^{\alpha} S_1^{\beta} S^{\alpha\beta} \Theta^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\beta}.$$

Jetzt kann man eine beliebige Potenz der Operation

$$S_2^{\alpha} S^{\beta}$$

berechnen. Es ist

$$(S_2^{\alpha} S_1^{\beta})\,(S_2^{\alpha} S_1^{\beta}) = S_2^{\alpha} (S_1^{\beta} S_2^{\alpha})\, S_1^{\beta}$$

und mit Rücksicht auf (133) gleich

$$S_2^{2\alpha} S_1^{\beta} S^{\alpha\beta} \Theta^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\beta} S_1^{\beta}.$$

Da aber S_1 mit Θ und S vertauschbar ist, ergiebt sich

$$(S_2^{\alpha} S_1^{\beta})^2 = S_2^{2\alpha} S_1^{2\beta} S^{\alpha\beta} \Theta^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\beta}.$$

Hieraus folgt nun

$$(S_2^{\alpha} S_1^{\beta})^2 S_2^{\alpha} S_1^{\beta} = S_2^{2\alpha} (S_1^{2\beta} S_2^{\alpha}) (S_2^{-\alpha} S^{\alpha\beta} S_2^{\alpha}) S_1^{\beta} \Theta^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\beta}.$$

Wir wenden wieder die Gleichungen (133) und (131) an und finden

$$(S_2^{\alpha} S_1^{\beta})^3 = S_2^{3\alpha} S_1^{3\beta} S^{(1+2)\alpha\beta} \Theta^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(1+2)\beta+\alpha^2\beta}.$$

Die allgemeine Potenz ist von der Form

$$(S_2^{\alpha} S_1^{\beta})^{\lambda} = S_2^{\lambda\alpha} S_1^{\lambda\beta} S^{a_\lambda \alpha\beta} \Theta^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} a_\lambda \beta + b_\lambda \alpha^2\beta}. \tag{134}$$

Um einzusehen, dass dies wirklich stets gilt, hat man nur den angegebenen Ausdruck noch einmal mit

$$S_2^{\alpha} S_1^{\beta}$$

von rechts zu multipliciren; man erhält dann einen Ausdruck von derselben Form:

$$S_2^{(\lambda+1)\alpha} S_1^{(\lambda+1)\beta} S^{a_{\lambda+1}\alpha\beta} \Theta^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} a_{\lambda+1}\beta + b_{\lambda+1}\alpha^2\beta}.$$

Zugleich ergiebt sich auf diese Weise, dass

$$a_{\lambda+1} = a_\lambda + \lambda,$$
$$b_{\lambda+1} = b_\lambda + a_\lambda;$$

und da die Anfangswerthe von a_λ und b_λ auch bekannt sind:

$$a_1 = 0, \qquad b_1 = 0,$$

so findet man

$$a_\lambda = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2},$$
$$b_\lambda = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{6}. \tag{135}$$

Schliesslich lässt sich eine Formel für eine beliebige Potenz von

$$S_2^{\alpha} S_1^{\beta} S^{\gamma} \Theta^{\delta}$$

ableiten. Hat man nämlich λ Klammern

$$(S_2^{\alpha} S_1^{\beta} S^{\gamma} \Theta^{\delta}) (S_2^{\alpha} S_1^{\beta} S^{\gamma} \Theta^{\delta}) \ldots (S_2^{\alpha} S_1^{\beta} S^{\gamma} \Theta^{\delta}) \tag{136}$$

zu multipliciren, so kann man zunächst alle Potenzen von Θ an das rechte Ende des Ausdrucks bringen. Dann kann man aber auch alle Potenzen von S nach rechts bringen; es ist dabei nur zu beachten, dass, so oft eine Potenz S^{γ} über eine Potenz S_2^{α} hinüber gesetzt wird, der Factor $\Theta^{\alpha\gamma}$ zugefügt werden muss (vergl. (131)). Man beginnt damit, die Potenz S^{γ} aus der vorletzten Klammer von (136) nach rechts zu schaffen; diese Potenz ist einmal über eine Potenz S_2^{α} hinwegzusetzen. Nachdem dies geschehen ist, bringt man die Potenz S^{γ} aus der drittletzten Klammer nach rechts. Diese Potenz ist zweimal über

einen Factor S_2^{α} hinwegzusetzen. Indem man so fortfährt, erhält man schliesslich

$$(S_2^{\alpha} S_1^{\beta} S^{\gamma} \Theta^{\delta})^{\lambda} = (S_2^{\alpha} S_1^{\beta})^{\lambda} S^{\gamma\lambda} \Theta^{\delta\lambda + (1+2+\cdots+(\lambda-1))\alpha\gamma}.$$

Daraus erhält man mit Rücksicht auf (134) und (135)

$$(S_2^{\alpha} S_1^{\beta} S^{\gamma} \Theta^{\delta})^{\lambda}$$
$$= S_2^{\lambda\alpha} S_1^{\lambda\beta} S^{\lambda\gamma + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\alpha\beta} . \Theta^{\lambda\delta + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\alpha\gamma + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\cdot\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\beta + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{6}\alpha^2\beta}.$$

In dieser Formel setze man jetzt $\lambda = p$. Da p hier als ungerade Primzahl angenommen wird, so ist $\frac{p(p-1)}{2}$ durch p theilbar, und es ergiebt sich mit Rücksicht auf die erste, vierte, sechste und siebente von den Gleichungen (126):

$$(137) \qquad (S_2^{\alpha} S_1^{\beta} S^{\gamma} \Theta^{\delta})^{p} = \Theta^{k\alpha + d\beta + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}\alpha^2\beta}.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (126) und der aus ihnen entwickelten Gleichungen (131), (133), (137) kann man nun die linken und die rechten Seiten der Gleichungen (130) in die Form

$$S_2^{a} S_1^{b} S^{c} \Theta^{b}$$

bringen. Vergleicht man hernach jedesmal die beiden Seiten, so ergeben sich die folgenden Congruenzen:

$$(138) \qquad \left\{ \begin{array}{r} k\mu + dv + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}\mu^2 v \equiv k'u \\ \mu x \equiv v \\ \mu y + \frac{\mu(\mu-1)}{2} x \equiv w \\ \mu v \equiv u \\ dx \equiv d'u \end{array} \right\} \text{mod. } p.$$

Das Ergebniss dieses und des vorigen Paragraphen kann so zusammengefasst werden: *Die definirenden Gleichungssysteme* (126) *und* (127) *stellen dann und nur dann holoedrisch isomorphe Gruppen dar, wenn die Zahlen* w, y, v *im Rahmen von* 0 *bis* $p-1$ *und die Zahlen* u, v, x, μ *im Rahmen von* 1 *bis* $p-1$ *so bestimmt werden können, dass die Congruenzen* (138) *erfüllt sind. Dabei ist* $p > 2$ *angenommen.*

§ 61.

Discussion der Bedingungen. Anzahl der Gruppen.

Aus der ersten, vierten und zweiten von den Bedingungen (138) erhält man

$$(139) \qquad k\mu + dv + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}\mu^2 v \equiv k'x\mu^2 \text{ mod. } p,$$

ferner aus der fünften, vierten und zweiten

$$dx \equiv d' x \mu^2 \text{ mod. } p.$$

Diese Congruenz ergiebt aber, da x nicht durch p theilbar ist,

$$d \equiv d' \mu^2 \text{ mod. } p. \tag{140}$$

Man denke sich jetzt, dass μ, ν und x den Congruenzen (139) und (140) gemäss bestimmt seien. Es liefern nun von den Bedingungen (138) die zweite die Zahl v und hernach die vierte die Zahl u; nachdem ausserdem noch y beliebig angenommen ist, liefert die dritte von den Bedingungen (138) die Zahl w. Sind ferner μ und x der Null incongruent, so ergeben sich auch v und u als der Null incongruent, und es zeigt sich, dass überhaupt alle Bedingungen erfüllt sind. Somit ist bloss noch die folgende Frage zu erörtern: *Wie müssen die Zahlen k, d, k', d' beschaffen sein, damit die Zahlen μ, ν und x den Congruenzen* (139) *und* (140) *gemäss und zugleich so bestimmt werden können, dass μ und x der Null incongruent sind?*

Die Bedingung (140) ergiebt sofort, dass d und d' beide gleich Null sein, oder beide im Rahmen von 1 bis $p-1$ liegen müssen, ausserdem, dass im letzteren Fall d und d' entweder beide quadratische Reste oder beide quadratische Nichtreste des Moduls p sein müssen. Die weitere Erörterung erfordert aber, dass die Fälle, in denen $p > 3$ ist, von dem Fall $p = 3$ getrennt werden. Ist $p > 3$, so geht die Congruenz (139) in

$$k\mu + d\nu \equiv k' x \mu^2 \text{ mod. } p \tag{141}$$

über. Sind dabei d und d' beide gleich Null, so ist die Bedingung (140) von selbst erfüllt, und die Congruenz (141) giebt, da μ der Null incongruent sein soll,

$$k \equiv k' x \mu.$$

Es müssen also in diesem Fall k und k' entweder beide gleich Null oder beide im Rahmen von 1 bis $p-1$ sein. Tritt das erste ein, so sind alle Bedingungen von selbst erfüllt, wenn nicht, so kann man x und μ auf verschiedene Arten den Bedingungen entsprechend wählen. Sind aber d und d' beide der Null incongruent, und ist wieder $p > 3$, wobei zugleich

$$\left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{d'}{p}\right),^*)$$

so kann man μ aus der Bedingung (140) und dann, nachdem man für x irgend eine von den Zahlen $1, 2, \ldots p-1$ gesetzt hat, ν aus der Bedingung (141) bestimmen.

Wenn also die Primzahl p grösser als 3 *ist, so ergeben die*

*) $\left(\frac{d}{p}\right)$ bedeutet hier das Legendre'sche Zeichen.

Gleichungen (126) *vier Gruppen. Diese Gruppen werden folgendermassen durch Specialisirung der Exponenten gefunden:*

Erste Gruppe: $d = 0, \quad k = 0;$

Zweite Gruppe: $d = 0, \quad k = 1, 2, \ldots p-1;$

Dritte Gruppe: $0 < d \leqq p-1, \quad \left(\frac{d}{p}\right) = +1, \quad k$ *beliebig;*

Vierte Gruppe: $0 < d \leqq p-1, \quad \left(\frac{d}{p}\right) = -1, \quad k$ *beliebig.*

Jetzt ist die Untersuchung für $p = 3$ zu machen. Es ist unter diesen Umständen:

$$\mu^2 \equiv 1 \bmod. 3,$$

und die Bedingungen gehen über in

(142) $$k\mu + (d+1)\nu \equiv k'x \bmod. 3,$$
$$d \equiv d' \bmod. 3.$$

Man setzt $d = d' = 0$ oder $d = d' = 1$ oder $d = d' = 2$. In den ersten beiden Fällen kann man μ und x in beliebiger Weise gleich 1 oder 2 setzen und dann ν aus (142) bestimmen. Im dritten Fall bleibt als einzige Bedingung noch

$$k\mu \equiv k'x \bmod. 3.$$

In dieser Bedingung können μ und x der Null incongruent gesetzt werden, wenn k und k' beide gleich Null oder beide der Null incongruent sind.

Wir erhalten also aus den Relationen (126) *vier Gruppen* 81^{ter} *Ordnung, indem wir so specialisiren:*

Erste Gruppe: $d = 0, \quad k$ *beliebig;*

Zweite Gruppe: $d = 1, \quad k$ *beliebig;*

Dritte Gruppe: $d = 2, \quad k = 0;$

Vierte Gruppe: $d = 2, \quad k = 1, 2.$

Wenn somit p irgend eine ungerade Primzahl bedeutet, so giebt es stets vier Gruppen in der vierten Kategorie der Ordnung p^4.

§ 62.

Die Gruppen der vierten Kategorie in der Ordnung 16.

Wir haben noch die Aufgabe, die Anzahl der durch die Gleichungen (115) dargestellten Gruppen zu bestimmen. Indem man an Stelle der Operation S die Operation

$$S\Theta^f$$

einführt, für die nachher wieder das Zeichen S geschrieben werden kann, erhalten die Gleichungen die Gestalt

$$(143)\quad \begin{cases} S_2^2 = \Theta^k, \quad S_2^{-1}S_1S_2 = S_1S, \quad S_2^{-1}SS_2 = S\Theta, \quad S_1^2 = \Theta^d, \\ S_1^{-1}SS_1 = S\Theta, \quad S^2 = \Theta, \quad \Theta^2 = 1. \end{cases}$$

Da k und d je die Werthe 0 und 1 annehmen können, so ergeben sich zunächst vier mögliche Annahmen, von denen aber die beiden folgenden

$$k = 0, \quad d = 1; \quad k = 1, \quad d = 0$$

dieselbe Gruppe liefern. Es folgt nämlich aus der zweiten von den Gleichungen (143)

$$S_2S^{-1} = S_1^{-1}S_2S_1.$$

Führt man nun an Stelle von S die Operation

$$S' = S^{-1} = S^3$$

ein, so erhält man ein System von derselben Form wie (143), wobei aber die Operationen S_2 und S_1 und ebenso die Exponenten k und d ihre Rollen getauscht haben.

Man erhält also alle Gruppen 16^{ter} *Ordnung vierter Kategorie, indem man in den Relationen* (143) *für das Zahlenpaar* k, d *setzt:*

$$0, 0; \quad 0, 1; \quad 1, 1.$$

Dadurch entstehen drei verschiedene Gruppen. Um dies zu zeigen, bestimmen wir die Anzahl der Operationen von der Ordnung 2. Sieht man zunächst wieder von den Potenzen der Operation Θ ab, so ergiebt sich (vergl. § 50)

$$(S_2^{\alpha}S_1^{\beta}S^{\gamma})^2 = S^{\alpha\beta}.$$

Mit Rücksicht auf die Potenzen von Θ ist also

$$(S_2^{\alpha}S_1^{\beta}S^{\gamma}\Theta^{\delta})^2 = S^{\alpha\beta}\Theta^{w},$$

wobei w irgendwie von α, β und γ abhängt. Daraus folgt aber, dass eine Operation von der Ordnung 2 in einer der Formen

$$S^{\gamma}\Theta^{\delta}, \quad S_2S^{\gamma}\Theta^{\delta}, \quad S_1S^{\gamma}\Theta^{\delta}$$

enthalten sein muss. In der ersten Form ist nur eine Operation von der Ordnung 2 enthalten, nämlich Θ. Man findet nun noch mit Hilfe der 1^{ten}, 3^{ten}, 6^{ten} und 7^{ten} von den Formeln (143)

$$(S_2S^{\gamma}\Theta^{\delta})^2 = \Theta^k$$

und ebenso mittelst der 4^{ten}, 5^{ten}, 6^{ten} und 7^{ten} von den Formeln

$$(S_1S^{\gamma}\Theta^{\delta})^2 = \Theta^d.$$

Je nachdem nun das Zahlenpaar k, d gleich 0, 0 oder 0, 1 oder 1, 1 ist, findet man die Anzahl der Operationen 2^{ter} Ordnung in der Gruppe gleich 9 oder 5 oder 1. Die drei Fälle geben also wirklich Verschiedenes.

§ 63.

Uebersicht über die gewonnenen Gruppen.

Zum Schlusse gebe ich eine Zusammenstellung der sämmtlichen Gruppen von den Ordnungen p, p^2, p^3, p^4, pq, pq^2, pqr. Dabei werde ich wiederum die cyklische Gruppe m^{ter} Ordnung durch das Zeichen $[m]$ darstellen. Ausserdem soll $[m, n, s]$ die durch die Relationen

$$S^m = 1, \quad S^{-1}TS = T^a, \quad T^n = 1$$

definirte Gruppe bedeuten, wobei s ein Theiler von m sein und a mod. n zum Exponenten s gehören soll. Diese Gruppe hängt in den hier in Betracht kommenden Fällen davon nicht ab, welche der zum Exponenten s gehörigen Zahlen für a gewählt wird. Für $[m, n, m]$ soll auch $[m, n]$ geschrieben werden. Das directe Product zweier Gruppen wird durch die Zusammenstellung der Zeichen der zwei Gruppen ausgedrückt (vergl. den Schluss von § 18). Für eine Reihe von Gruppen werden die definirenden Relationen aufgeführt, dabei bedeuten die Symbole Θ, Θ_1, Θ_2 stets Operationen, die mit allen andern vertauscht werden können.

Die Zusammenstellung, in der zwei Gruppen, die besonders aufgeführt werden, stets verschieden sind, und zerfallende Gruppen stets als directe Producte dargestellt erscheinen, ist nun die folgende:

Ordnung p. Eine Gruppe: $[p]$.

Ordnung p^2. Zwei Gruppen: $[p^2]$, $[p][p]$.

Ordnung p^3. Drei Gruppen mit durchweg vertauschbaren Operationen: $[p^3]$, $[p^2][p]$, $[p][p][p]$.

Ausserdem noch zwei Gruppen:

1) $S_1^p = 1, \quad S^p = 1, \quad S_1^{-1}SS_1 = S\Theta, \quad \Theta^p = 1;$
2) $S_1^p = \Theta, \quad S^p = \Theta, \quad S_1^{-1}SS_1 = S\Theta, \quad \Theta^p = 1.$

Diese beiden Gruppen werden nachher mit $[*]$ und mit $\begin{bmatrix}**\end{bmatrix}$ bezeichnet.

Ordnung p^4. Fünf Gruppen vertauschbarer Operationen:

$$[p^4], \ [p^3][p], \ [p^2][p^2], \ [p^2][p][p], \ [p][p][p][p].$$

Sechs Gruppen, je mit p^2 ausgezeichneten Operationen:

1) $[*][p]$; 2) $\begin{bmatrix}**\end{bmatrix}[p]$;
3) $S_2^p = 1, \quad S_1S_2 = S_2S_1\Theta_1, \quad S_1^p = \Theta_2, \quad \Theta_1^p = \Theta_2^p = 1;$
4) $S_2^p = \Theta_2, \quad S_1S_2 = S_2S_1\Theta_1, \quad S_1^p = \Theta_1, \quad \Theta_1^p = \Theta_2^p = 1;$
5) $S_2^p = 1, \quad S_1^p = 1, \quad S_1S_2 = S_2S_1\Theta^p, \quad \Theta^{p^2} = 1;$
6) $S_2^p = 1, \quad S_1^p = \Theta, \quad S_1S_2 = S_2S_1\Theta^p, \quad \Theta^{p^2} = 1.$

Vier, beziehungsweise drei Gruppen, je mit p ausgezeichneten Operationen, nämlich:

I. $p > 3$. Vier Gruppen, die sich aus dem Formelsystem

$$S_2^p = \Theta^k, \quad S_2^{-1} S_1 S_2 = S_1 S, \quad S_2^{-1} S S_2 = S\Theta, \quad S_1^p = \Theta^d,$$
$$S_1^{-1} S S_1 = S, \quad S^p = 1, \quad \Theta^p = 1$$

durch folgende Specialisirungen ergeben:

1) $d = 0, \quad k = 0;$
2) $d = 0, \quad k = 1, 2, \ldots p - 1;$
3) $0 < d \leq p - 1, \quad \left(\frac{d}{p}\right) = +1, \quad k$ beliebig;
4) $0 < d \leq p - 1, \quad \left(\frac{d}{p}\right) = -1, \quad k$ beliebig.

II. $p = 3$. Vier Gruppen, die sich aus demselben Formelsystem ergeben durch die Specialisirungen:

1) $d = 0, \quad k$ beliebig;
2) $d = 1, \quad k$ beliebig;
3) $d = 2, \quad k = 0;$
4) $d = 2, \quad k = 1, 2.$

III. $p = 2$. Drei Gruppen, die sich aus den Relationen

$$S_2^2 = \Theta^k, \quad S_2^{-1} S_1 S_2 = S_1 S, \quad S_2^{-1} S S_2 = S\Theta, \quad S_1^2 = \Theta^d,$$
$$S_1^{-1} S S_1 = S\Theta, \quad S^2 = \Theta, \quad \Theta^2 = 1$$

ergeben mit:

1) $k = d = 0;$
2) $k = 0, \quad d = 1;$
3) $k = d = 1.$

Ordnung pq $(p > q)$. Eine Gruppe vertauschbarer Operationen:

$$[p]\,[q].$$

Wenn q Theiler von $p - 1$ ist, so existirt auch eine Gruppe mit nichtvertauschbaren Operationen: $[q, p]$.

Ordnung pq^2. Zwei Gruppen vertauschbarer Operationen:

$$[p]\,[q^2], \quad [p]\,[q]\,[q].$$

Gruppen mit nichtvertauschbaren Operationen; sie existiren nur unter bestimmten Bedingungen:

I. $q - 1$ *durch* p *theilbar*. $\frac{p+5}{2}$, beziehungsweise (wenn $p = 2$) drei Gruppen, die eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung q^2 und keine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung p besitzen:

$$1)\ [p, q^2], \qquad 2)\ [p, q]\,[q],$$

$$3)\ S^p = 1,\ S^{-1}T_1S = T_1^{\varrho},\ S^{-1}T_2S = T_2^{\varrho^{\mu}},\ T_1^q = T_2^q = 1,$$
$$T_1T_2 = T_2T_1.$$

In den Formeln 3) bedeutet ϱ eine Zahl, die mod. q zum Exponenten p gehört, und man hat für μ eine Reihe von unter sich und mit Null incongruenten Resten des Moduls p zu setzen, von denen keine zwei ein der Eins congruentes Product ergeben. Die Aenderung von ϱ beeinflusst die Gruppe nicht.

II. *p ungerade und Theiler von $q+1$.* Eine Gruppe mit einer ausgezeichneten Untergruppe der Ordnung q^2 und ohne ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung p:

$$S^p = 1,\ S^{-1}T_1S = T_2,\ S^{-1}T_2S = T_1^{-1}T_2^b,\ T_1^q = T_2^q = 1,$$
$$T_1T_2 = T_2T_1.$$

b genügt den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}\varphi_p(b) &\equiv +1\\ \varphi_{p-1}(b) &\equiv 0\end{aligned}\right\} \text{mod. } q,$$

wobei $\varphi_n(b)$ den Nenner des n^{ten} Näherungswerthes des Kettenbruchs

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b} - \frac{1}{b} - \cdots$$

bedeutet. Die Gruppe wird dadurch nicht beeinflusst, wie im Uebrigen b gewählt wird.

III. *q Theiler von $p-1$.* Zwei oder drei Gruppen mit je einer ausgezeichneten Untergruppe von der Ordnung p und ohne ausgezeichnete Untergruppe von der Ordnung q^2, nämlich:

$$[q^2, p, q], \qquad [q, p]\,[q]$$

und ausserdem, wenn $p-1$ auch durch q^2 theilbar ist,

$$[q^2, p].$$

Die beiden ersten der in III genannten und die in II genannte Gruppe kommen gleichzeitig vor, wenn $p = 3$, $q = 2$.

Anzahl der Gruppen von der Ordnung pq^2.

1) $p = 2$, q ungerade: Fünf Gruppen.
2) p ungerade und Theiler von $q-1$: $\frac{p+9}{2}$ Gruppen.
3) $p = 3$, $q = 2$: Fünf Gruppen.
4) p Theiler von $q+1$, p und q ungerade: Drei Gruppen.
5) q Theiler von $p-1$, $p > 3$ und q^2 Nichttheiler von $p-1$: Vier Gruppen.
6) q^2 Theiler von $p-1$: Fünf Gruppen.
7) Weder p Theiler von $q-1$ oder $q+1$ noch q Theiler von $p-1$: Zwei Gruppen.

Ordnung pqr $(p > q > r)$. Eine Gruppe vertauschbarer Operationen: $[p]\,[q]\,[r]$.

Gruppen mit nichtvertauschbaren Operationen:

I. $p-1$ *hat mit* qr *einen gemeinsamen Theiler*. Eine oder drei Gruppen, die eine Operation von der Ordnung qr enthalten:

1) $p-1$ nur durch q theilbar: $[q, p]\,[r]$.

2) $p-1$ nur durch r theilbar: $[r, p]\,[q]$.

3) $p-1$ durch qr theilbar: Die beiden unter 1) und 2) genannten Gruppen und ausserdem: $[qr, p]$.

II. r *Theiler von* $q-1$. Eine, beziehungsweise r Gruppen, die keine Operation der Ordnung qr enthalten, nämlich einmal:

$$[r, q]\,[p]$$

und, wenn r auch Theiler von $p-1$ ist, ausserdem $r-1$ Gruppen:

$$T^r = 1, \quad T^{-1}ST = S^\mu, \quad T^{-1}UT = U\varrho^h, \quad S^q = 1, \quad U^p = 1,$$
$$SU = US.$$

Dabei gehört μ mod. q zum Exponenten r und ϱ mod. p zum Exponenten r; wie man im Uebrigen r und ϱ wählt, ist gleichgültig, man erhält dieselben $r-1$ Gruppen, indem h die Werthe $1, 2, \ldots r-1$ durchläuft.

Anzahl aller Gruppen von der Ordnung pqr.

	q u. r Theiler von $p-1$.	q Theiler, r Nichttheiler von $p-1$.	q Nichttheiler, r Theiler von $p-1$.	q u. r Nichttheiler v. $p-1$.
r Theiler von $q-1$.	$r+4$	3	$r+2$	2
r Nichttheiler von $q-1$.	4	2	2	1

Tübingen, den 28. März 1893.

Die Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen.

(Erste Abhandlung).

Von

A. Krazer in Strassburg i. E.

Im zweiten Theile der Abhandlung: „Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen“ (Leipzig 1892, Teubner) ist das allgemeine Transformationsproblem der Thetafunctionen vollständig gelöst, und man erhält aus den dort mitgetheilten Resultaten die Lösung eines jeden speciellen Transformationsproblems, entweder, indem man in der allgemeinen Transformationsformel (Formel (A) pag. 128) an Stelle der darin vorkommenden Grössen α, β, γ, δ die gegebenen speciellen Zahlenwerthe einführt, oder, indem man die vorliegende specielle Transformation nach den angegebenen Regeln aus einfachen zusammensetzt, die diesen einfachen Transformationen entsprechenden Thetaformeln der aufgestellten Formelsammlung entnimmt und in der im sechsten Abschnitte entwickelten Weise zu einer einzigen Formel vereinigt. Diesen letzteren Weg habe ich in der Abhandlung: „Ueber ein specielles Problem der Transformation der Thetafunctionen“ (Journal f. r. u. a. Mathematik, Bd. 111, pag. 63) eingeschlagen, und die dortige Behandlung des gewählten Beispieles soll als Vorbild für die Durchführung einer solchen Aufgabe dienen.

Um nun die Bedeutung der in der oben genannten Abhandlung für die Lösung des Transformationsproblems der Thetafunctionen angegebenen neuen Gesichtspunkte deutlich hervortreten zu lassen, soll im Nachfolgenden die Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen nach den dort aufgestellten Regeln durchgeführt werden. Diese, jetzt vorliegende, erste Abhandlung liefert dazu die Grundlagen, indem sie zeigt, in welcher Weise die Lösung des allgemeinen Transformationsproblems sich auf die Lösung einer geringen Anzahl einfacher Transformationsprobleme reduciren lässt, und die vollständige Lösung dieser einfachen Transformationsprobleme durchführt.

Erster Abschnitt.

Einleitung in die Transformationstheorie.

§ 1.

Aufstellung des Transformationsproblems.

Gegeben sei eine Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$ definirt durch eine unendliche Reihe vermittelst der Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{a(m+g)^2+2(m+g)(u+h\pi i)};$$

der Parameter $a = a' + a''i$ soll dabei nur der für die absolute Convergenz der Reihe nothwendigen und hinreichenden Bedingung, dass sein reeller Theil a' negativ ist, unterworfen sein; es sollen ferner u eine complexe Veränderliche, g, h beliebige reelle Constanten sein. Die so definirte Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$ genügt dann den Gleichungen:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u+\pi i)_a = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a e^{2g\pi i},$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u+a)_a = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a e^{-2u-a-2h\pi i};$$

die in diesen Formeln auftretenden Aenderungen der Variable u:

$$\pi i, \quad a$$

sollen die *Perioden* der Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$ genannt werden. Aus denselben bilde man mit Hülfe von vier *rationalen* Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die zwei Grössen:

$$A = \mathfrak{a}\pi i + \mathfrak{b}a, \quad B = \mathfrak{c}\pi i + \mathfrak{d}a$$

und stelle sich die Frage, ob es immer oder nur unter gewissen Voraussetzungen über die rationalen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ möglich ist, die Variable u mit einer neuen Variable v durch eine Gleichung von der Form:

$$u = pv,$$

in der p eine Constante bezeichnet, derart zu verknüpfen, dass den zwei Aenderungen A, B der Variable u zwei Aenderungen der Variable v entsprechen, welche als die zwei Perioden einer Function $\vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(v)_b$ angesehen werden können. Diese letzteren Aenderungen müssen dann durch passende Wahl ihrer Reihenfolge in die Form:

$$\pi i, \quad b$$

gebracht werden können, und es muss zudem der reelle Theil der Grösse b negativ sein.

Da die für die Variable u aufgestellten zwei Aenderungen A, B gleichberechtigt sind, indem die darin vorkommenden Buchstaben $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ irgend welche, zunächst keinen Bedingungen unterworfene rationale Zahlen bezeichnen, so wird dem Probleme nichts von seiner Allgemeinheit genommen, wenn man den zwei auf die Variable u bezüglichen Aenderungen A, B die zwei auf die Variable v bezüglichen Aenderungen πi, b in der angeschriebenen Reihenfolge zuordnet. Die zwischen der ursprünglichen Variable u und der neu einzuführenden Variable v aufzustellende Gleichung ist aber schon vollständig bestimmt, sobald man nur der ersten Aenderung A der Variable u die erste Aenderung πi der Variable v zugeordnet hat, und zwar kann dieselbe nur die Form:

$$u = \frac{A}{\pi i} v$$

besitzen, da dann aber auch nur dann dem Uebergange von u in $u + A$ der Uebergang von v in $v + \pi i$ entspricht.

Mit Hülfe dieser Gleichung kann man aber jetzt sofort die der Aenderung B der Variable u entsprechende, im Früheren mit b bezeichnete Aenderung der Variable v bestimmen. Lässt man nämlich u in $u + B$ übergehen, so geht der obigen Gleichung zufolge v in $v + \frac{B}{A}\pi i$ über; es erscheint daher die Grösse b bestimmt durch die Gleichung:

$$b = \frac{B}{A}\pi i,$$

und es ist jetzt zu untersuchen, ob die so bestimmte Grösse b der vorher für sie aufgestellten Bedingung, dass ihr reeller Theil negativ sei, genügt.

Man bezeichne mit b^0 die zu b conjugirte complexe Grösse; ist dann b' der reelle Theil von b, so ist:

$$b' = \frac{1}{2}(b + b^0).$$

Bezeichnet man aber die zu A, B conjugirten complexen Grössen mit A^0, B^0, setzt also, indem man unter a^0 die zu a conjugirte complexe Grösse versteht:

$$A^0 = -\mathfrak{a}\pi i + \mathfrak{b}a^0, \qquad B^0 = -\mathfrak{c}\pi i + \mathfrak{d}a^0,$$

so ist:

$$b^0 = -\frac{B^0}{A^0}\pi i,$$

und folglich:

$$b' = \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A} - \frac{B^0}{A^0}\right)\pi i = \frac{1}{2}\frac{BA^0 - B^0A}{AA^0}\pi i.$$

Nun ist aber:

$$BA^0 - B^0A = -(\mathfrak{a}\mathfrak{b}-\mathfrak{b}\mathfrak{c})(a+a^0)\pi i = -2(\mathfrak{a}\mathfrak{b}-\mathfrak{b}\mathfrak{c})a'\pi i,$$

und folglich, wenn man:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} = t$$

setzt:

$$b' = \frac{ta'\pi^2}{AA^0}.$$

Da nun nach der über die Grösse a gemachten Voraussetzung a' negativ ist, auch AA^0 als Product zweier einander conjugirten complexen Zahlen positiv ist, so zeigt die letzte Gleichung, dass der reelle Theil b' der Grösse b stets dann aber auch nur dann einen negativen Werth besitzt, wenn, was von jetzt an vorausgesetzt werden soll, die Grösse t einen *positiven* Werth hat.

Unter Beachtung dieses Resultates sei als *Transformationsproblem* für die Function $\vartheta\left[\frac{g}{h}\right](u)_a$ die folgende Aufgabe bezeichnet:

Gegeben seien die Functionen $\vartheta\left[\frac{g}{h}\right](u)_a$ *mit der Variable* u *und dem Parameter* a *und vier rationale Zahlen* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, *welche die Gleichung*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} = t,$$

in der t *eine positive Zahl bezeichnet, erfüllen. Man setze:*

$$(1)\quad A = \mathfrak{a}\pi i + \mathfrak{b}a, \qquad (2)\quad B = \mathfrak{c}\pi i + \mathfrak{d}a$$

und definire eine neue Veränderliche v *und einen neuen Parameter* b *durch die Gleichungen:*

$$(3)\quad v = \frac{\pi i}{A}u, \qquad (4)\quad b = \frac{B}{A}\pi i;$$

es sollen dann die Functionen $\vartheta\left[\frac{g}{h}\right](u)_a$ *durch Functionen* $\vartheta\left[\frac{k}{l}\right](v)_b$ *ausgedrückt werden.*

Das so gestellte Problem ist vollständig bestimmt, sobald die vier rationalen Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ gegeben sind. Man denke sich dieselben in ein Schema von der Form:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \\ \hline \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \end{array}\right|$$

gebracht. Dieses System von vier Zahlen soll dann die *Charakteristik* der Transformation genannt werden; auch soll gestattet sein, die zu der Charakteristik T gehörige Transformation kurz als die Transformation T zu bezeichnen. Die Zahl $t = \mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ soll die *Ordnungszahl* der Transformation heissen.

§ 2.

Zusammensetzung der Transformationen.

Ist das im Vorigen gestellte Problem für irgend zwei specielle Charakteristiken:

$$T = \left|\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \end{matrix}\right|, \qquad T' = \left|\begin{matrix} \mathfrak{a}' & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{c}' & \mathfrak{d}' \end{matrix}\right|$$

gelöst, so kann man aus diesen Lösungen immer die Lösung desselben Problems für eine bestimmte dritte Charakteristik:

$$T'' = \left|\begin{matrix} \mathfrak{a}'' & \mathfrak{b}'' \\ \mathfrak{c}'' & \mathfrak{d}'' \end{matrix}\right|$$

ableiten, deren Elemente sich in bald anzugebender Weise aus den Elementen von T und T' zusammensetzen.

Unter den gemachten Voraussetzungen kann man nämlich einmal eine Function $\vartheta\left[\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right](u)_a$ durch Functionen $\vartheta\left[\begin{matrix} g' \\ h' \end{matrix}\right](v)_b$ ausdrücken, wenn man den Zusammenhang der Grössen v und b mit den Grössen u und a in der vorher angegebenen Weise durch die Gleichungen:

$$(1)\quad A = \mathfrak{a}\pi i + \mathfrak{b}a. \qquad (2)\quad B = \mathfrak{c}\pi i + \mathfrak{d}a,$$

$$(3)\quad v = \frac{\pi i}{A} u, \qquad (4)\quad b = \frac{B}{A}\pi i$$

bestimmt. Man kann weiter aber auch eine jede der bei der ersten Transformation aufgetretenen Functionen $\vartheta\left[\begin{matrix} g' \\ h' \end{matrix}\right](v)_b$ vermittelst der zweiten Transformation durch Functionen $\vartheta\left[\begin{matrix} g'' \\ h'' \end{matrix}\right](w)_c$ ausdrücken, wenn man den Zusammenhang der Grössen w und c mit den Grössen v und b durch die Gleichungen:

$$(1')\quad A' = \mathfrak{a}'\pi i + \mathfrak{b}'b, \qquad (2')\quad B' = \mathfrak{c}'\pi i + \mathfrak{d}'b,$$

$$(3')\quad w = \frac{\pi i}{A'} v, \qquad (4')\quad c = \frac{B'}{A'}\pi i$$

bestimmt. In Folge dessen lässt sich auch die ursprüngliche Function $\vartheta\left[\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right](u)_a$ durch Functionen $\vartheta\left[\begin{matrix} g'' \\ h'' \end{matrix}\right](w)_c$ ausdrücken, und es soll jetzt gezeigt werden, dass die auf diese Weise entstehende Gleichung einer bestimmten Transformation T'' entspricht.

Um dies einzusehen, drücke man die Grösse w durch die Grösse u

aus, indem man in die Gleichung (3') an Stelle von v den unter (3) stehenden Ausdruck einführt; man erhält dann:

$$w = \frac{\pi i}{A'} u,$$

wenn man mit A'' den Ausdruck:

$$A'' = \frac{1}{\pi i} A A'$$

bezeichnet, und es entspricht dann dem Uebergange von w in $w + \pi i$ der Uebergang von u in $u + A''$. Entsprechend soll die Aenderung, welche u erfährt, wenn man w in $w + c$ übergehen lässt, mit B'' bezeichnet werden; die Grösse B'' ist dann definirt durch die Gleichung:

$$B'' = \frac{1}{\pi i} A'' c,$$

und es kommt jetzt darauf an, die durch die letzten Gleichungen definirten Grössen A'', B'' durch πi und a auszudrücken.

Was zunächst die Grösse A'' betrifft, so ist den Gleichungen (1') und (4) zufolge:

$$A'' = \frac{1}{\pi i} A A' = \frac{1}{\pi i} A(\mathfrak{a}'\pi i + \mathfrak{b}' b) = A\mathfrak{a}' + B\mathfrak{b}',$$

und hieraus folgt mit Hülfe der Gleichungen (1), (2):

$$A'' = (\mathfrak{a}\pi i + \mathfrak{b} a)\mathfrak{a}' + (\mathfrak{c}\pi i + \mathfrak{b} a)\mathfrak{b}' = (\mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \mathfrak{c}\mathfrak{b}')\pi i + (\mathfrak{b}\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}')a.$$

Was ferner die Grösse B'' betrifft, so wird der Gleichung (4') zufolge:

$$B'' = \frac{1}{\pi i} A'' c = \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{1}{\pi i} A A' \cdot \frac{B'}{A'} \pi i = \frac{1}{\pi i} A B'.$$

Benutzt man hier zur Umformung zuerst die Gleichung (2') sodann die Gleichung (4), so erhält man:

$$B'' = \frac{1}{\pi i} A(\mathfrak{c}'\pi i + \mathfrak{b}' b) = A\mathfrak{c}' + B\mathfrak{b}',$$

und hieraus folgt mit Hülfe der Gleichungen (1), (2):

$$B'' = (\mathfrak{a}\pi i + \mathfrak{b} a)\mathfrak{c}' + (\mathfrak{c}\pi i + \mathfrak{b} a)\mathfrak{b}' = (\mathfrak{a}\mathfrak{c}' + \mathfrak{c}\mathfrak{b}')\pi i + (\mathfrak{b}\mathfrak{c}' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}')a.$$

Als Resultat der vorhergehenden Untersuchung ergiebt sich demnach, dass die Variable w mit der Variablen u und der Parameter c mit dem Parameter a, wenn man die Grössen A'', B'' durch die Gleichungen:

$$(1'') \qquad A'' = (\mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \mathfrak{c}\mathfrak{b}')\pi i + (\mathfrak{b}\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}')a,$$

$$(2'') \qquad B'' = (\mathfrak{a}\mathfrak{c}' + \mathfrak{c}\mathfrak{b}')\pi i + (\mathfrak{b}\mathfrak{c}' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}')a$$

definirt, verknüpft sind durch die Gleichungen:

$$(3'')\quad w = \frac{\pi i}{A''} u, \qquad (4'')\quad c = \frac{B''}{A''} \pi i,$$

und es ist damit der folgende Satz bewiesen:

Aus den Lösungen der den Charakteristiken:

$$T = \left|\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \end{matrix}\right|, \qquad T' = \left|\begin{matrix} \mathfrak{a}' & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{c}' & \mathfrak{d}' \end{matrix}\right|$$

entsprechenden Transformationsprobleme lässt sich immer die Lösung des der Charakteristik:

$$T'' = \left|\begin{matrix} \mathfrak{a}'' & \mathfrak{b}'' \\ \mathfrak{c}'' & \mathfrak{d}'' \end{matrix}\right|,$$

bei der:

$$\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \mathfrak{c}\mathfrak{b}', \qquad \mathfrak{b}'' = \mathfrak{b}\mathfrak{a}' + \mathfrak{d}\mathfrak{b}',$$
$$\mathfrak{c}'' = \mathfrak{a}\mathfrak{c}' + \mathfrak{c}\mathfrak{d}', \qquad \mathfrak{d}'' = \mathfrak{b}\mathfrak{c}' + \mathfrak{d}\mathfrak{d}'$$

ist, entsprechenden Transformationsproblems ableiten. Zwischen den Ordnungszahlen t, t', t'' besteht dabei, auf Grund der Gleichung:

$$\mathfrak{a}''\mathfrak{d}'' - \mathfrak{b}''\mathfrak{c}'' = (\mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{a}'\mathfrak{d}' - \mathfrak{b}'\mathfrak{c}'),$$

die Beziehung:

$$t'' = tt'.$$

Die Charakteristik T'', deren Elemente aus den Elementen der Charakteristiken T und T' nach derjenigen Multiplicationsregel der Determinanten gebildet werden, bei der die Verticalreihen der ersten Determinante mit den Horizontalreihen der zweiten componirt werden, soll die aus den Charakteristiken T und T' *zusammengesetzte* Charakteristik genannt werden, und es soll die Beziehung zwischen den drei Charakteristiken T, T', T'' symbolisch durch:

$$\left|\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} \mathfrak{a}' & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{c}' & \mathfrak{d}' \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \mathfrak{a}'' & \mathfrak{b}'' \\ \mathfrak{c}'' & \mathfrak{d}'' \end{matrix}\right|,$$

oder auch durch:

$$TT' = T''$$

fixirt werden. Dass man ebenso aus mehreren Charakteristiken $T_1, T_2, \ldots, T_n$, nachdem man dieselben in eine bestimmte Reihenfolge gebracht hat, durch Zusammensetzung eine neue Charakteristik $T_1 T_2 \ldots T_n$ erzeugen kann, leuchtet unmittelbar ein, und das vorher erhaltene Resultat lässt sich entsprechend dahin verallgemeinern, dass man aus den Lösungen der den Charakteristiken $T_1, T_2, \ldots, T_n$ entsprechenden Transformationsprobleme immer durch passende Combination die Lösung des der zusammengesetzten Charakteristik $T_1 T_2 \ldots T_n$

entsprechenden Transformationsproblems erhalten kann; es soll daher auch die auf diese Weise entstandene der zusammengesetzten Charakteristik $T_1\ T_2 \ldots T_n$ entsprechende Transformation aus den Transformationen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ zusammengesetzt genannt werden. Die Ordnungszahl der zusammengesetzten Transformation ist gleich dem Producte der Ordnungszahlen der einzelnen Transformationen. Bei dieser Zusammensetzung der Transformationen gilt, wie aus der Natur der Operationen klar ist, das Associationsgesetz.

§ 3.

Die einer gegebenen inverse Transformation.

Unter allen Transformationen giebt es eine, welche dadurch ausgezeichnet ist, dass bei ihrer Anwendung:

$$v = u, \qquad b = a$$

wird; dieselbe soll die *identische* Transformation genannt und mit J bezeichnet werden; sie entsteht, wenn man:

$$\mathfrak{a} = 1, \quad \mathfrak{b} = 0, \quad \mathfrak{c} = 0, \quad \mathfrak{d} = 1$$

setzt; es ist daher:

$$J = \left|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right|;$$

die zugehörige Ordnungszahl hat den Werth 1. Setzt man die Transformation J auf eine der beiden möglichen Weisen mit einer beliebigen Transformation T zusammen, so entsteht, wie unmittelbar klar, von der Bezeichnung der Variablen und Parameter abgesehen, stets die Transformation T wieder, d. h. es ist:

$$JT = T, \qquad TJ = T.$$

Zu einer gegebenen Transformation T kann man immer eine und nur eine Transformation T' finden, so dass

$$TT' = J$$

ist. Um dies zu beweisen, hat man unter Beibehaltung der im vorigen Artikel angewandten Bezeichnung zu gegebenen Grössen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ die Grössen $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ so zu bestimmen, dass die früher mit T'' bezeichnete Transformation die identische wird. Dies liefert zur Bestimmung von $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} (1)\ \ \mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \mathfrak{c}\mathfrak{b}' = 1, & (3)\ \ \mathfrak{a}\mathfrak{c}' + \mathfrak{c}\mathfrak{d}' = 0, \\ (2)\ \ \mathfrak{b}\mathfrak{a}' + \mathfrak{d}\mathfrak{b}' = 0, & (4)\ \ \mathfrak{b}\mathfrak{c}' + \mathfrak{d}\mathfrak{d}' = 1, \end{array}$$

aus denen durch Auflösung:

$$\mathfrak{a}' = \frac{\mathfrak{d}}{t}, \qquad \mathfrak{b}' = -\frac{\mathfrak{b}}{t}, \qquad \mathfrak{c}' = -\frac{\mathfrak{c}}{t}, \qquad \mathfrak{d}' = \frac{\mathfrak{a}}{t}$$

folgt. *Es giebt* also *zu jeder Transformation*

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \\ \hline \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \end{array}\right|$$

eine andere:

$$T^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} \frac{\mathfrak{d}}{t} & -\frac{\mathfrak{b}}{t} \\ \hline -\frac{\mathfrak{c}}{t} & \frac{\mathfrak{a}}{t} \end{array}\right|,$$

welche durch die Gleichung:

$$TT^{-1} = J$$

eindeutig bestimmt ist. Diese Transformation T^{-1} *soll die zur Transformation* T *inverse Transformation genannt werden; ihre Ordnungszahl ist* $\frac{1}{t}$. Dass auch umgekehrt $T^{-1}T = J$, also auch T die zu T^{-1} inverse Transformation ist, leuchtet ein. Führt die Transformation T auf eine Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](u)_a$ angewandt auf Functionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g' \\ h' \end{smallmatrix}\right](v)_b$, so führt die inverse Transformation T^{-1} auf eine Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} k \\ l \end{smallmatrix}\right](v)_b$ angewandt zu Functionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} k' \\ l' \end{smallmatrix}\right](u)_a$ zurück. Sobald also das Problem, die Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](u)_a$ explicite durch Functionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} k \\ l \end{smallmatrix}\right](v)_b$ auszudrücken, für jede Transformation gelöst ist, erscheint auch das umgekehrte Problem, die Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} k \\ l \end{smallmatrix}\right](v)_b$ durch Functionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](u)_a$ auszudrücken, da es nach dem soeben Gesagten nichts Anderes ist als wieder ein Transformationsproblem, von selbst gelöst.

Während nun der Transformation T, wenn man Variable und Parameter für die ursprüngliche Thetafunction mit u, a, für die transformirte mit v, b bezeichnet, die Gleichungen:

$$(1)\quad A = \mathfrak{a}\pi i + \mathfrak{b}a, \qquad (2)\quad B = \mathfrak{c}\pi i + \mathfrak{d}a,$$

$$(3)\quad v = \frac{\pi i}{A}u, \qquad (4)\quad b = \frac{B}{A}\pi i$$

entsprechen, gehören zu der inversen Transformation T^{-1}, wenn man hier die ursprünglichen Grössen mit v, b, die neuen mit u, a bezeichnet, die Gleichungen:

$$(\bar{1})\quad tA^{(-1)} = \mathfrak{b}\pi i - \mathfrak{b}b, \qquad (\bar{2})\quad tB^{(-1)} = -\mathfrak{c}\pi i + \mathfrak{a}b,$$

$$(\bar{3})\quad u = \frac{\pi i}{A^{(-1)}}v, \qquad (\bar{4})\quad a = \frac{B^{(-1)}}{A^{(-1)}}\pi i.$$

Mit Rücksicht auf das vorher Bemerkte ist der durch die Gleichung (3) ausgedrückte Zusammenhang zwischen den Variablen u, v genau derselbe, wie der durch die Gleichung (3) bestimmte, und ebenso der durch die Gleichung (4) vermittelte Zusammenhang zwischen den Parametern a, b genau der gleiche, wie der durch die Gleichung (4) definirte. Von der Richtigkeit dieser Behauptungen kann man sich auch ohne Mühe direct überzeugen. Bezieht man die Gleichung (4) auf die ursprüngliche Transformation T, so liefert sie den Ausdruck für den ursprünglichen Parameter a durch den transformirten b.

§ 4.

Zusammensetzung einer Transformation aus einfachen. Plan der weiteren Untersuchung.

Eine beliebige Transformation T kann man immer aus n Transformationen, von denen $n-1$, etwa $T_1, \ldots, T_{\nu-1}, T_{\nu+1}, \ldots, T_n$ willkürlich angenommen werden können, während die n^{te}, T_ν, durch diese und die Transformation T eindeutig bestimmt ist, zusammensetzen in der Form:

$$T = T_1 \ldots T_{\nu-1} T_\nu T_{\nu+1} \ldots T_n.$$

Setzt man nämlich, indem man die zu den gegebenen Transformationen $T_1, \ldots, T_{\nu-1}, T_{\nu+1}, \ldots, T_n$ inversen Transformationen mit $T_1^{-1}, \ldots, T_{\nu-1}^{-1}, T_{\nu+1}^{-1}, \ldots, T_n^{-1}$ bezeichnet:

$$T_\nu = T_{\nu-1}^{-1} \ldots T_1^{-1} T T_n^{-1} \ldots T_{\nu+1}^{-1}$$

und führt das so bestimmte T_ν in die obige Gleichung ein, so wird dieselbe richtig. Umgekehrt folgt aus der obigen Gleichung, sobald man sie als bestehend voraussetzt, für T_ν immer der aufgestellte Ausdruck.

Dieses Princip der Zusammensetzung einer Transformation T aus mehreren ist für die zu entwickelnde Transformationstheorie als ein fundamentales anzusehen. Durch passende Anwendung desselben kann man nämlich die Lösung des allgemeinen Transformationsproblems reduciren auf die Lösung einer geringen Anzahl einfacher Transformationsprobleme, welche vermittelst directer Methoden behandelt werden können.

Die Ordnungszahl t der Transformation T ist in Folge der über die rationalen Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ gemachten Voraussetzungen eine positive rationale Zahl und zwar für den allgemeinen Fall willkürlich wählbar. Hat diese Zahl den speciellen Werth 1, so soll die zugehörige Transformation eine *lineare* genannt werden; die dazu inverse Transformation ist dann, da aus $t = 1$ auch $\frac{1}{t} = 1$ folgt, stets auch eine

lineare. Ist dagegen die rationale Zahl t von 1 verschieden, so drücke man sie durch einen Bruch mit kleinstem Zähler und Nenner aus, setze also $t = \frac{n}{n'}$, wo n, n' positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind, und nenne die Transformation T *eine zur Zahl* $\frac{n}{n'}$ *gehörige*. Unter Anwendung des oben auseinandergesetzten Princips der Zusammensetzung einer Transformation aus mehreren erhält man dann sofort den Satz:

Jede zur Zahl $\frac{n}{n'}$ *gehörige Transformation:*

$$T = \begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \end{vmatrix}$$

kann man aus einer speciellen zur Zahl $\frac{1}{n'}$ *gehörigen, einer linearen und einer speciellen zur Zahl* n *gehörigen Transformation zusammensetzen in der Form:*

$$T = \begin{vmatrix} \frac{1}{n'} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{n'\mathfrak{a}}{n} & \frac{\mathfrak{b}}{n} \\ n'\mathfrak{c} & \mathfrak{d} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Daraus erhellt die grosse Bedeutung der linearen Transformation, und es erscheint gerechtfertigt, sie zuerst ausschliesslich zu betrachten. Dementsprechend sollen im nächsten Abschnitte drei einfache lineare Transformationen, die im Folgenden *elementare* heissen, behandelt werden. Dieselben ergeben sich durch directe Umformung der Thetareihen und werden ausschliesslich von diesem Gesichtspunkte aus eingeführt. Im dritten Abschnitte wird sodann gezeigt, in welcher Weise sich die allgemeine lineare Transformation aus solchen elementaren zusammensetzen lässt. Der vierte Abschnitt hat sich endlich mit den in der oben angeschriebenen Gleichung an erster und dritter Stelle auftretenden speciellen, zur Zahl $\frac{1}{n'}$, beziehlich n gehörigen Transformationen zu beschäftigen.

Zweiter Abschnitt.

Die drei elementaren linearen Transformationen.

§ 1.

Die erste elementare lineare Transformation.

Eine erste Umformung der gegebenen Function:

$$(F) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{a(m+g)^2+2(m+g)(v+h\pi i)}$$

wird dadurch erhalten, dass man in der die Function darstellenden Reihe an Stelle des Summationsbuchstabens m einen neuen Summationsbuchstaben n einführt mit Hülfe der Gleichung:

$$(S) \qquad pm = qn,$$

in der p, q zwei ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind, deren absolute Werthe im Folgenden mit $\bar{p}, \bar{q}$ bezeichnet werden sollen. Es entsteht auf diese Weise, wenn man noch zur Abkürzung:

$$\frac{q^2}{p^2} a = b, \qquad \frac{q}{p} u = v$$

setzt, aus der Gleichung (F) die neue:

$$(F_1) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sum_{n} e^{b\left(n+\frac{pg}{q}\right)^2+2\left(n+\frac{pg}{q}\right)\left(v+\frac{qh}{p}\,i\right)},$$

und es ist dabei die Summation nach n in der Weise auszuführen, dass an Stelle von n alle jene Werthe treten, welche sich dafür aus der Gleichung (S) ergeben, wenn man m die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt.

Um die Natur der auf diese Weise an Stelle von n tretenden Werthe zu erkennen, bringe man die Zahl m in die Form:

$$m = qm' + \varrho,$$

indem man unter ϱ den kleinsten positiven Rest der Zahl m nach dem Modul q versteht, und beachte, dass m dann alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ und zwar jeden nur einmal annimmt, wenn man für ϱ der Reihe nach die Zahlen $0, 1, \ldots, \bar{q}-1$ setzt und dabei jedesmal m' die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt. Führt man diesen Ausdruck an Stelle von m in die Gleichung (S) ein, so ergiebt sich für n:

$$n = pm' + \frac{p\varrho}{q},$$

und man erkennt daraus, dass man die auf der rechten Seite der

Gleichung (F_1) angedeutete Summation nach n in der Weise auszuführen hat, dass man im allgemeinen Gliede dieser Summe:

$$n = n' + \frac{p\varrho}{q}$$

setzt, hierauf ϱ der Reihe nach die Werthe $0, 1, \ldots, \bar{q}-1$ annehmen lässt und zu jedem solchen Werthe von ϱ an Stelle von n' alle ganzzahligen Vielfachen von p treten lässt. Auf diese Weise geht aus der Gleichung (F_1) die neue Gleichung:

$$(F_2) \quad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\bar{q}-1} \sum_{n'} e^{b\left(n'+\frac{p(g+\varrho)}{q}\right)^2 + 2\left(n'+\frac{p(g+\varrho)}{q}\right)\left(v+\frac{qh}{p}\pi i\right)}$$

hervor, und es ist dabei, wie soeben bemerkt, die durch $\sum_{n'}$ angedeutete Summation so auszuführen, dass an Stelle von n' der Reihe nach nur alle jene ganzen Zahlen treten, die Vielfache von p sind.

Die in Bezug auf die Grösse n' auszuführende Summation kann von dieser ihr anhaftenden Beschränkung dadurch befreit werden, dass man das in (F_2) hinter den Summenzeichen stehende allgemeine Glied mit dem Factor:

$$F = \frac{1}{\bar{p}} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\bar{p}-1} e^{\frac{2\pi i}{p} q\sigma n'}$$

multiplicirt, da dieser immer den Werth Null annimmt, wenn an Stelle von n' eine solche ganze Zahl gesetzt wird, welche nicht durch p ohne Rest theilbar ist, dagegen den Werth Eins, wenn an Stelle von n' ein ganzes Vielfaches von p tritt. Hat man nämlich diesen Factor hinter den Summenzeichen eingeschoben, so darf man, ohne dass der Werth der Summe eine Aenderung erleidet, die auf n' bezügliche Summation in der Weise ausführen, dass n' die Reihe aller ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, da bei der neuen Summe alle diejenigen Glieder, für welche n' nicht eine durch p theilbare ganze Zahl ist, und welchen daher auch keine Glieder der ursprünglichen Summe entsprechen, in Folge des bei ihnen stattfindenden Verschwindens des Factors F den Werth Null besitzen, während der Complex der übrig bleibenden Glieder, für welche n' eine durch p theilbare ganze Zahl ist, mit dem Complexe der die ursprüngliche Summe bildenden Glieder identisch ist, da bei jedem derselben der Factor F den Werth Eins hat. Bringt man aber den Factor F in die Form:

$$F = \frac{1}{\bar{p}} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\bar{p}-1} e^{\frac{2\pi i}{p} q\sigma\left(n'+\frac{p\varrho}{q}\right)},$$

schiebt ihn auf der rechten Seite der Formel (F_2) hinter den Summenzeichen ein und ersetzt zugleich mit Rücksicht auf das vorher Bemerkte das Zeichen $\sum_{n'}$ durch das Zeichen $\sum_{n'=-\infty}^{n'=+\infty}$, das angibt, dass n' die Reihe aller ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufe, so erhält man, wenn man noch linke und rechte Seite der so entstandenen Gleichung mit $\bar{p}$ multiplicirt, die Gleichung:

$$(F_3)\qquad \bar{p}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\bar{q}-1}\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\bar{p}-1} e^{-2g\sigma\pi i} \times \sum_{n'=-\infty}^{n'=+\infty} e^{b\left(n'+\frac{p(g+\varrho)}{q}\right)^2+2\left(n'+\frac{p(g+\varrho)}{q}\right)\left(v+\frac{q(h+\sigma)}{p}\pi i\right)};$$

damit ist die gewünschte Umformung der rechten Seite der Gleichung (F) vollbracht.

Beachtet man nun noch, dass die in der letzten Zeile der Formel (F_3) stehende unendliche Reihe mit der Function:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{p(g+\varrho)}{q} \\ \frac{q(h+\sigma)}{p} \end{bmatrix}(v)_b$$

identisch ist, und führt diese Function an Stelle der genannten unendlichen Reihe ein, so geht aus der Gleichung (F_3) die Thetaformel:

$$(I)\qquad \bar{p}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\bar{q}-1}\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\bar{p}-1} e^{-2g\sigma\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{p(g+\varrho)}{q} \\ \frac{q(h+\sigma)}{p} \end{bmatrix}(v)_b$$

hervor, in der also:

$$v = \frac{q}{p}u, \qquad b = \frac{q^2}{p^2}a$$

ist.

Es soll jetzt nachgewiesen werden, dass die durch die Formel (I) repräsentirte Umformung der Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$ eine Transformation im Sinne der im ersten Abschnitte entwickelten Transformationstheorie ist. Zu dem Ende definire man vier rationale Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{a} = \frac{p}{q}, \quad \mathfrak{b} = 0, \quad \mathfrak{c} = 0, \quad \mathfrak{d} = \frac{q}{p}$$

und beachte, dass diese Zahlen, da $\mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} = 1$ ist, nach Früherem eine durch die Gleichungen:

$$(1)\quad A = \frac{p}{q}\pi i, \qquad (2)\quad B = \frac{q}{p}a,$$

$$(3)\quad v = \frac{\pi i}{A}u, \qquad (4)\quad b = \frac{B}{A}\pi i$$

charakterisirte lineare Transformation bestimmen. Führt man aber die unter (1), (2) für A, B aufgestellten Werthe in die Gleichungen (3), (4) ein, so gehen dieselben unmittelbar in die hinter der Formel (I) stehenden, die Grössen v und b mit den Grössen u und a verknüpfenden Gleichungen über, und man erhält daher das Resultat:

Die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_I = \begin{vmatrix} \frac{p}{q} & 0 \\ 0 & \frac{q}{p} \end{vmatrix}$$

bestimmten Transformationsproblems wird durch die Gleichung:

$$(\mathrm{I})\quad \bar{p}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\bar{q}-1}\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\bar{p}-1} e^{-2g\sigma\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{p(g+\varrho)}{q} \\ \frac{q(h+\sigma)}{p} \end{bmatrix}\left(\frac{q}{p}u\right)_{\frac{q^2}{p^2}a}$$

geliefert.

§ 2.

Die zweite elementare lineare Transformation.

Eine zweite Umformung der gegebenen Function:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{a(m+g)^2+2(m+g)(u+h\pi i)}$$

wird dadurch erhalten, dass man im allgemeinen Gliede der die Function darstellenden Reihe an Stelle des Parameters a einen neuen Parameter b einführt, der sich von a nur um ganze Vielfache von πi unterscheidet.

Zu dem Ende setze man:

$$a = b - l\pi i,$$

indem man unter l eine ganze Zahl versteht, und führe die so definirte Grösse b an Stelle von a in die obige Reihe ein. Es wird dann zunächst:

$$a(m+g)^2 + 2(m+g)(u+h\pi i)$$
$$= b(m+g)^2 + 2(m+g)(u+h'\pi i) + lg^2\pi i - lg\pi i - lm(m+1)\pi i,$$

wobei zur Abkürzung:

$$h + \tfrac{1}{2}l - lg = h'$$

gesetzt ist. Beachtet man nun, dass

$$lm(m+1)\pi i,$$

da l eine ganze Zahl, $m(m+1)$ aber stets eine gerade Zahl ist, ein gerades Vielfaches von πi darstellt und folglich unterdrückt werden darf, wenn es als Exponent zur Basis e auftritt, so erhält man auf Grund der aufgestellten Relation für $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$ die neue Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{l(m+g)^2+2(m+g)(u+h)\pi i} \times e^{lg(g-1)\pi i},$$

aus der dann, indem man die auf ihrer rechten Seite stehende unendliche Reihe durch die ihr entsprechende Thetafunction ersetzt, sofort die Formel:

$$\text{(II)} \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h' \end{bmatrix}(v)_b \, e^{lg(g-1)\pi i},$$

wobei:

$$v = u, \quad b = a, \quad h' = h + \frac{1}{2}l - lg$$

ist, hervorgeht, welche die im Eingange verlangte Umformung der Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$ darstellt.

Es soll jetzt nachgewiesen werden, dass die durch die Formel (II) repräsentirte Umformung der Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$ eine Transformation im Sinne der im ersten Abschnitte entwickelten Transformationstheorie ist. Zu dem Ende definire man vier rationale Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{a} = 1, \quad \mathfrak{b} = 0, \quad \mathfrak{c} = l, \quad \mathfrak{d} = 1$$

und beachte, dass diese Zahlen, da $\mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} = 1$ ist, nach Früherem eine durch die Gleichungen:

$$\text{(1)} \quad A = \pi i, \qquad \text{(2)} \quad B = l\pi i + a,$$

$$\text{(3)} \quad v = \frac{\pi i}{A} u, \qquad \text{(4)} \quad b = \frac{B}{A}\pi i$$

charakterisirte lineare Transformation bestimmen. Führt man aber die unter (1), (2) für A, B aufgestellten Werthe in die Gleichungen (3), (4) ein, so gehen dieselben unmittelbar in die hinter der Formel (II) stehenden, die Grössen v und b mit den Grössen u und a verknüpfenden Gleichungen über, und man erhält daher das Resultat:

Die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_{II} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{vmatrix}$$

bestimmten Transformationsproblems wird durch die Formel:

$$\text{(II)} \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h' \end{bmatrix}(u)_{a+\iota\pi i}\, e^{lg(g-1)\pi i},$$

wobei:

$$h' = h + \tfrac{1}{2}l - lg$$

ist, geliefert.

§ 3.

Die dritte elementare lineare Transformation.

Aus den Perioden πi, a der Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$ bilde man, den Werthen:

$$\mathfrak{a} = 0, \quad \mathfrak{b} = 1, \quad \mathfrak{c} = -1, \quad \mathfrak{d} = 0$$

entsprechend, die Grössen:

$$A = a, \quad B = -\pi i,$$

wodurch, da $\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} = 1$ ist, eine lineare Transformation bestimmt wird; die im allgemeinen Falle durch die Gleichungen:

$$v = \frac{\pi i}{A}u, \quad b = \frac{B}{A}\pi i$$

fixirten Beziehungen, welche die Grössen v, b mit den Grössen u, a verknüpfen, gehen in diesem Falle in die Gleichungen:

$$v = \frac{\pi i}{a}u, \quad b = \frac{\pi^2}{a}$$

über.

Diese Transformation soll als dritte elementare Transformation eingeführt werden, und es handelt sich darum, die ihr entsprechende Thetaformel durch directe Umformung der ursprünglichen Thetafunction zu erhalten.

Um dazu zu gelangen, bedarf man einer Formel aus der Theorie der Fourier'schen Reihen, die zunächst aufgestellt werden soll. Es bezeichne $f(x)$ eine reelle oder complexe Function der reellen Veränderlichen x, die für alle der Bedingung $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq +\frac{1}{2}$ genügenden Werthe von x einwerthig und stetig sei; diese Function soll zudem eine Derivirte $f'(x)$ besitzen, und es soll die Function $f'(x)$ für dieses Intervall ebenfalls einwerthig und stetig sein; dann gilt auf Grund des von Lejeune-Dirichlet gegebenen Beweises der Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe die Gleichung:

$$f(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(\xi)\,d\xi + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(\xi)\cos 2n\pi(\xi - x)\,d\xi$$

für jeden Werth von x zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$. Macht man nun die weitere Voraussetzung, dass die Function $f'(x)$ gleichfalls eine Derivirte $f''(x)$ besitze, und dass diese Function $f''(x)$ ebenfalls für alle der Bedingung $-\frac{1}{2} \leqq x \lessgtr +\frac{1}{2}$ genügenden Werthe von x einwerthig und stetig sei, so gilt auch die Gleichung:

$$f'(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f'(\xi)\, d\xi + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f'(\xi) \cos 2n\pi(\xi - x)\, d\xi$$

für jeden Werth von x zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$.

Setzt man in den beiden aufgestellten Gleichungen $x = 0$ und ersetzt sodann den Buchstaben ξ in neuer Bezeichnung durch den Buchstaben x, so erhält man die speciellen Formeln:

$$(1) \qquad f(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\, dx + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x) \cos 2n\pi x\, dx,$$

$$(2) \qquad f'(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f'(x)\, dx + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f'(x) \cos 2n\pi x\, dx.$$

Auf das allgemeine Glied der in der Gleichung (2) vorkommenden Summe wende man jetzt das Verfahren der theilweisen Integration an; man erhält dann:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f'(x) \cos 2n\pi x\, dx$$

$$= (-1)^n \left[f\left(\tfrac{1}{2}\right) - f\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right] + 2n\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x) \sin 2n\pi x\, dx$$

und weiter, indem man den so gewonnenen Ausdruck in die rechte Seite der Gleichung (2) einführt und zugleich das an erster Stelle stehende Integral auswerthet, aus der Gleichung (2) die neue Gleichung:

$$(3)\quad f'(0) = \left[f\left(\tfrac{1}{2}\right) - f\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right] + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{(-1)^n\left[f\left(\tfrac{1}{2}\right) - f\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right] + 2n\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\sin 2n\pi x\,dx\right\}.$$

Beachtet man nun, dass die Convergenz der unendlichen Reihe:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

immer auch auf Grund der Gleichung:

$$\frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_n}{n} = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} + \frac{u_1}{1.2} + \frac{u_1 + u_2}{2.3} + \cdots + \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}}{(n-1)\,n}$$

und der absoluten Convergenz der Reihe:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\,n} + \cdots$$

die Convergenz der unendlichen Reihe:

$$\frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_n}{n} + \cdots$$

nach sich zieht, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Gleichung (3), dass die unendliche Reihe:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n}\left[f\left(\tfrac{1}{2}\right) - f\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right] + 2\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\sin 2n\pi x\,dx\right\}$$

convergirt, und weiter, da die Reihe:

$$-1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \cdots$$

convergent ist, dass auch die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\sin 2n\pi x\,dx$$

convergirt. Bezeichnet man den Werth dieser Reihe mit w, so hat man:

$$w = \sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\sin 2n\pi x\,dx, \qquad -w = \sum_{n=-1}^{n=-\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\sin 2n\pi x\,dx$$

und erhält daher, wenn man diese beiden Gleichungen, nachdem man jede derselben mit der lateralen Einheit i multiplicirt hat, zu einander addirt, die Gleichung:

$$(4)\quad 0 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\, i \sin 2n\pi x\, dx + \sum_{n=-1}^{n=-\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\, i \sin 2n\pi x\, dx.$$

Subtrahirt man jetzt von der Gleichung (1), nachdem man dieselbe zuvor in die Form:

$$f(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\, dx + \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x) \cos 2n\pi x\, dx + \sum_{n=-1}^{n=-\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x) \cos 2n\pi x\, dx$$

gebracht hat, die Gleichung (4), so erhält man die Gleichung:

$$(5)\quad f(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\, dx + \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\, e^{-2n\pi ix}\, dx + \sum_{n=-1}^{n=-\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\, e^{-2n\pi ix}\, dx$$

und schliesslich, indem man die drei auf ihrer rechten Seite stehenden Theile zu einer einzigen Reihe vereinigt, die Gleichung:

$$(H)\quad f(0) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\, e^{-2n\pi ix}\, dx.$$

In Bezug auf diese Gleichung ist für das Folgende im Auge zu behalten, dass dieselbe immer gilt, wenn die Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ für alle der Bedingung $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq +\frac{1}{2}$ genügenden Werthe

von x einwerthig und stetig sind, und weiter, dass die auf ihrer rechten Seite stehende Reihe aus zwei selbständigen Reihen:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

und:

$$u_{-1} + u_{-2} + \cdots + u_{-n} + \cdots$$

besteht, von denen jede für sich convergirt, sodass es nicht nöthig ist, die Reihe als eine einfache:

$$u_0 + (u_1 + u_{-1}) + (u_2 + u_{-2}) + \cdots + (u_n + u_{-n}) + \cdots$$

aufzufassen.

Mit Hülfe der soeben gewonnenen Formel (H) soll jetzt die in Aussicht gestellte Umformung der Function:

$$(F) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{a(m+g)^2+2(m+g)(u+h\pi i)}$$

durchgeführt werden. Zu dem Ende setze man:

$$f(x) = e^{ax^2+2x[u+(m+g)a+h\pi i]},$$

wobei die Grössen a, u, m, g, h die im allgemeinen Gliede der obigen Thetareihe vorkommenden Grössen sind, x aber eine reelle Veränderliche bedeutet, und führe die so definirte specielle Function, die alle im Vorigen für die allgemeine Function $f(x)$ aufgestellten Bedingungen erfüllt, an Stelle von $f(x)$ in die Formel (H) ein; man erhält dann die Gleichung:

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{ax^2+2x[u+(m+g)a+(h-n)\pi i]}\, dx$$

und weiter, indem man den auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Ausdruck als Factor zum allgemeinen Gliede der Thetareihe hinzunimmt und beachtet, dass dieses dadurch keine Werthänderung erleidet, weil der eingeschobene Factor stets den Werth Eins hat, für die Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$ nach Vereinigung zusammengehöriger Glieder den neuen Ausdruck:

$$(F_1) \quad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{a(m+g+x)^2+2(m+g+x)[u+(h-n)\pi i]+2gn\pi i}\, dx.$$

Die gewünschte Umformung der Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$ wird jetzt dadurch erhalten, dass man auf der rechten Seite der Gleichung (F_1)

die an zweiter Stelle stehende, auf n bezügliche Summation mit der an erster Stelle stehenden, auf m bezüglichen den Platz wechseln lässt und alsdann die auf m bezügliche Summation ausführt.

Was zunächst die verlangte Umstellung der Summationen betrifft, so darf dieselbe, da es sich um unendliche Reihen handelt, nicht ohne Weiteres vorgenommen werden; es muss vielmehr nachgewiesen werden, dass dieselbe erlaubt ist, oder, was dasselbe, dass die rechte Seite der Gleichung (F_1) durch die Ausführung dieser Operation keine Werthänderung erleidet. Dieser Nachweis soll zunächst erbracht werden. Zu dem Ende setze man, indem man unter x eine reelle Veränderliche versteht:

$$f(x) = \vartheta\left[\begin{matrix} g + x \\ h \end{matrix}\right](u)_a,$$

beachte, dass diese Function, ebenso wie jede ihrer Derivirten eine einwerthige und für endliche x auch stetige Function der Veränderlichen x ist, und führe diese specielle Function an Stelle von $f(x)$ in die Formel (H) ein. Man erhält dann zunächst die Gleichung:

$$\vartheta\left[\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right](u)_a = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \vartheta\left[\begin{matrix} g + x \\ h \end{matrix}\right](u)_a \, e^{-2n\pi i x} \, dx$$

und weiter, indem man die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Thetafunction durch die ihr entsprechende unendliche Reihe ersetzt und alsdann unter Beachtung, dass diese Reihe eine für alle Werthe von x absolut convergente ist, die auf x bezügliche Integration über die auf m bezügliche Summation hinüberschiebt, nach passender Vereinigung zusammengehöriger Glieder die Gleichung:

$$(F_2)\quad \vartheta\left[\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right](u)_a = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{a(m+g+x)^2 + 2(m+g+x)[w+(h-n)\pi i] + 2gn\pi i} dx,$$

die sich von der Gleichung (F_1) nur dadurch unterscheidet, dass die auf n bezügliche Summation an erster, die auf m bezügliche Summation an zweiter Stelle steht.

Nachdem so die verlangte Umstellung der Summationen als statthaft erwiesen und in der Gleichung (F_2) zum Ausdruck gebracht ist, kann jetzt auf der rechten Seite der Gleichung (F_2) die Summation nach m unter Benutzung der Formel:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(m+g+x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

bei der g eine beliebige reelle Constante bezeichnet, ausgeführt werden; man erhält dadurch die Gleichung:

$$(F_3) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2+2x[u+(h-n)\pi i]+2gn\pi i}\,dx,$$

bei der jetzt schliesslich noch die Integration nach x auszuführen ist.

Um dies Ziel zu erreichen, bringe man den Exponenten unter Benutzung der im Anfange dieses Artikels definirten Grössen:

$$v = \frac{\pi i}{a} u, \quad b = \frac{\pi^2}{a}$$

in die Form:

$$ax^2 + 2x[u + (h-n)\pi i] + 2gn\pi i$$
$$= a\left(x + \frac{u + (h-n)\pi i}{a}\right)^2 + b(n-h)^2 + 2(n-h)(v + g\pi i)$$
$$- \frac{u^2}{a} + 2gh\pi i;$$

die Ausführung der auf der rechten Seite der Formel (F_3) stehenden Integration reducirt sich dann auf die Auswerthung des Integrals:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a\left(x+\frac{u+(h-n)\pi i}{a}\right)^2} dx.$$

Beachtet man aber, dass die Formel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{p(x+l)^2}\,dx = \sqrt[+]{\frac{-\pi}{p}}$$

besteht, bei der p und l von der Integrationsvariable x unabhängige Grössen bezeichnen, deren erste der Bedingung zu genügen hat, dass ihr reeller Theil negativ ist, während der Werth der zweiten beliebig gewählt werden darf, und bei der die auf ihrer rechten Seite stehende Wurzel so auszuziehen ist, dass ihr reeller Theil positiv wird, was durch das unten an die Wurzel angesetzte + Zeichen angedeutet werden soll, so kann man auf Grund derselben das Integral J auswerthen und erhält:

$$J = \sqrt[+]{\frac{-\pi}{a}}.$$

Führt man diesen Werth in die Gleichung (F_3) ein, nachdem man in derselben den Exponenten durch den oben dafür aufgestellten zweiten Ausdruck ersetzt hat, so geht aus der Gleichung (F_3) die Gleichung:

$$(F_4)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{b(n-h)^2+2(n-h)(v+g\pi i)} \times e^{-\frac{u^2}{a}+2gh\pi i}$$

und weiter, indem man die auf der rechten Seite stehende unendliche Reihe durch die ihr entsprechende Thetafunction ersetzt, schliesslich die Gleichung:

$$(III)\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \vartheta\begin{bmatrix} -h \\ g \end{bmatrix}(v)_b\, e^{-\frac{u^2}{a}+2gh\pi i}$$

hervor, welche die gewünschte Umformung der ursprünglichen Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$ darstellt.

Das Resultat der vorhergehenden Untersuchung lässt sich wie folgt aussprechen.

Die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_{III} = \left|\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsproblems wird durch die Gleichung:

$$(III)\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \vartheta\begin{bmatrix} -h \\ g \end{bmatrix}\left(\frac{\pi i}{a}u\right)_{\frac{\pi^2}{a}} e^{-\frac{u^2}{a}+2gh\pi i},$$

bei der die auf der rechten Seite stehende Wurzel so auszuziehen ist, dass ihr reeller Theil positiv wird, geliefert.

Dritter Abschnitt.

Zusammensetzung der allgemeinen linearen Transformation aus elementaren.

§ 1.

Vorbemerkung.

Im vorhergehenden Abschnitte sind drei Arten elementarer linearen Transformationen T_I, T_{II}, T_{III} gewonnen worden; es soll jetzt nachgewiesen werden, dass jede lineare Transformation sich aus solchen elementaren zusammensetzen lässt.

Zu dem Ende bezeichne man mit:

$$T = \begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \end{vmatrix}$$

eine beliebige lineare Transformation; es besteht dann zwischen den vier rationalen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die Relation:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} = 1.$$

Stellt man jetzt sowohl die Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ für sich, als auch die Zahlen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ für sich als Brüche mit gemeinsamem Nenner dar, indem man:

$$\mathfrak{a} = \frac{\alpha}{r}, \quad \mathfrak{b} = \frac{\beta}{r}, \quad \mathfrak{c} = \frac{\gamma}{s}, \quad \mathfrak{d} = \frac{\delta}{s}$$

setzt, wobei α, β, γ, δ ganze, r, s positive ganze Zahlen bezeichnen, und der Fall nicht ausgeschlossen ist, dass ein Factor von r gleichzeitig Factor von α und β, und ein Factor von s gleichzeitig Factor von γ und δ ist, und ebensowenig der Fall, dass eine der Zahlen r, s oder beide den Werth 1 besitzen, so nimmt die aufgestellte lineare Transformation T die Gestalt:

$$T = \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{r} & \frac{\beta}{r} \\ \frac{\gamma}{s} & \frac{\delta}{s} \end{vmatrix}$$

an, und es besteht zwischen den ganzen Zahlen α, β, γ, δ, r, s die Relation:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = rs.$$

Handelt es sich nun um die Zusammensetzung der vorliegenden Transformation T aus elementaren, so hat man die beiden Fälle $\beta = 0$ und $\beta \gtrless 0$ von einander zu trennen.

§ 2.

Der Fall $\beta = 0$.

In dem ersten Falle, wo $\beta = 0$ ist, hat die vorgelegte lineare Transformation T die Gestalt:

$$T = \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{r} & 0 \\ \frac{\gamma}{s} & \frac{\delta}{s} \end{vmatrix},$$

und es besteht zwischen den ganzen Zahlen α, δ, r, s die Relation:

$$\alpha\delta = rs,$$

woraus $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\delta}$ folgt. Durch Einführung dieses Werthes an Stelle von $\frac{\alpha}{\gamma}$ nimmt die gegebene Charakteristik die Form:

$$T = \begin{vmatrix} \frac{\varepsilon}{\delta} & 0 \\ \frac{\gamma}{\varepsilon} & \frac{\delta}{\varepsilon} \end{vmatrix}$$

an, und es ergiebt sich unter Beachtung der in Art. 3 des ersten Abschnitts für die Zusammensetzung von Charakteristiken gegebenen Regel unmittelbar die Richtigkeit der folgenden Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\varepsilon}{\delta} & 0 \\ \frac{\gamma}{\varepsilon} & \frac{\delta}{\varepsilon} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma\delta & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{vmatrix}.$$

Damit ist aber, da von den drei auf der rechten Seite stehenden Charakteristiken die erste vom Typus T_I, die zweite vom Typus T_{II}, die dritte vom Typus T_I ist, bewiesen, dass jede lineare Transformation, bei der β den Werth Null besitzt, sich aus elementaren zusammensetzen lässt.

Eine lineare Transformation, bei der $\beta = 0$ ist, soll eine *singuläre* lineare Transformation genannt werden. Singuläre lineare Transformationen sollen in der Folge mit den Buchstaben S, S', S'', ... bezeichnet werden. Durch Zusammensetzung singulärer Transformationen entsteht immer wieder eine singuläre Transformation, und es ist daher auch, da alle Transformationen T_I, T_{II} singuläre sind, eine jede Transformation, welche sich aus Transformationen T_I, T_{II} in beliebiger Anzahl zusammensetzt, stets wieder eine singuläre Transformation. Das vorher gefundene Resultat lässt sich aber wie folgt aussprechen:

Jede singuläre lineare Transformation:

$$T = \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{\gamma} & 0 \\ \frac{\gamma}{\varepsilon} & \frac{\delta}{\varepsilon} \end{vmatrix}$$

lässt sich in der Form:

$$T = \begin{vmatrix} \frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma\delta & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{vmatrix}$$

aus drei, oder in speciellen Fällen aus weniger als drei, elementaren singulären Transformationen vom Typus T_I, T_{II} zusammensetzen.

§ 3.

Der Fall $\beta \gtrless 0$.

Ehe zur Behandlung des zweiten Falles geschritten wird, der dadurch charakterisirt ist, dass bei der Transformation:

$$T = \left| \begin{array}{c|c} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \\ \hline \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \end{array} \right|$$

$\mathfrak{b}$ von Null verschieden ist, sollen, um in dieser Richtung die nothwendige Orientirung zu erlangen, zwei beliebige singuläre Transformationen:

$$S' = \left| \begin{array}{c|c} \mathfrak{a}' & 0 \\ \hline \mathfrak{c}' & \mathfrak{d}' \end{array} \right|, \qquad S'' = \left| \begin{array}{c|c} \mathfrak{a}'' & 0 \\ \hline \mathfrak{c}'' & \mathfrak{d}'' \end{array} \right|$$

mit der Transformation:

$$T_{III} = \left| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array} \right|$$

in der Reihenfolge S', T_{III}, S'' zu einer Transformation:

$$T = S' T_{III} S'' = \left| \begin{array}{c|c} \mathfrak{a}' & 0 \\ \hline \mathfrak{c}' & \mathfrak{d}' \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} \mathfrak{a}'' & 0 \\ \hline \mathfrak{c}'' & \mathfrak{d}'' \end{array} \right|$$

zusammengesetzt werden.

Setzt man zunächst die an erster und zweiter Stelle stehenden Transformationen S', T_{III} zu einer einzigen zusammen, so erhält man die Gleichung:

$$T = \left| \begin{array}{c|c} \mathfrak{c}' & \mathfrak{d}' \\ \hline -\mathfrak{a}' & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} \mathfrak{a}'' & 0 \\ \hline \mathfrak{c}'' & \mathfrak{d}'' \end{array} \right|;$$

vereinigt man aber jetzt noch die beiden auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Transformationen zu einer einzigen, so ergiebt sich schliesslich für die Transformation T der Ausdruck:

$$T = \left| \begin{array}{c|c} \mathfrak{c}'\mathfrak{a}'' & \mathfrak{b}'\mathfrak{a}'' \\ \hline \mathfrak{c}'\mathfrak{c}'' - \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'' & \mathfrak{b}'\mathfrak{c}'' \end{array} \right|.$$

Beachtet man nun, dass sowohl $\mathfrak{b}'$ als auch $\mathfrak{a}''$ stets von Null verschieden sind, so erkennt man, dass bei der entstandenen Transformation T die Grösse $\mathfrak{b}$ stets einen von Null verschiedenen Werth besitzt.

Mit Rücksicht auf dieses Resultat soll jetzt untersucht werden, ob jede lineare Transformation:

$$T = \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{r} & \frac{\beta}{r} \\ \frac{\gamma}{s} & \frac{\delta}{s} \end{vmatrix},$$

bei der β von Null verschieden ist, sich aus zwei passend gewählten singulären Transformationen S', S'' und der Transformation T_{III} der Gleichung:

$$T = S' T_{III} S''$$

entsprechend zusammensetzen lässt. Führt man in diese Gleichung an Stelle der Symbole T, S', T_{III}, S'' die ihnen entsprechenden Charakteristiken ein und setzt die drei Charakteristiken S', T_{III}, S'' unter Benutzung des obigen Resultates zu einer einzigen Transformation zusammen, so erhält man zur Bestimmung der in den singulären Transformationen S', S'' beziehlich vorkommenden rationalen Zahlen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{b}''$, welche schon von vorneherein den Gleichungen:

$$(1)\quad \mathfrak{a}'\mathfrak{b}' = 1, \qquad (2)\quad \mathfrak{a}''\mathfrak{b}'' = 1$$

zu genügen haben, die weiteren vier Gleichungen:

$$(3)\quad \mathfrak{c}'\mathfrak{a}'' = \frac{\alpha}{r}, \qquad (4)\quad \mathfrak{b}'\mathfrak{a}'' = \frac{\beta}{r},$$

$$(5)\quad \mathfrak{c}'\mathfrak{c}'' - \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'' = \frac{\gamma}{s}, \qquad (6)\quad \mathfrak{b}'\mathfrak{c}'' = \frac{\delta}{s}.$$

Durch Auflösung der Gleichung (1) nach $\mathfrak{a}'$, der Gleichung (2) nach $\mathfrak{a}''$ als Unbekannten erhält man:

$$(1')\quad \mathfrak{a}' = \frac{1}{\mathfrak{b}'}, \qquad (2')\quad \mathfrak{a}'' = \frac{1}{\mathfrak{b}''};$$

multiplicirt man weiter die Gleichungen (3) und (4) links und rechts mit $\mathfrak{b}''$, so erhält man:

$$(3')\quad \mathfrak{c}' = \frac{\alpha}{r}\mathfrak{b}'', \qquad (4')\quad \mathfrak{b}' = \frac{\beta}{r}\mathfrak{b}'';$$

löst man endlich die Gleichung (6) nach $\mathfrak{c}''$ auf, so erhält man:

$$(6')\quad \mathfrak{c}'' = \frac{\delta}{s}\cdot\frac{1}{\mathfrak{b}'}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man nun ohne Mühe die Grössen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{c}''$ sämmtlich durch $\mathfrak{b}''$ allein ausdrücken in der Form:

$$(S)\quad \begin{gathered} \mathfrak{a}' = \frac{r}{\beta}\cdot\frac{1}{\mathfrak{b}''}, \qquad \mathfrak{c}' = \frac{\alpha}{r}\mathfrak{b}'', \qquad \mathfrak{b}' = \frac{\beta}{r}\mathfrak{b}'', \\ \mathfrak{a}'' = \frac{1}{\mathfrak{b}''}, \qquad \mathfrak{c}'' = \frac{\delta}{s}\frac{r}{\beta}\cdot\frac{1}{\mathfrak{b}''}, \end{gathered}$$

aus denen sich für $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{c}''$ unter allen Umständen rationale Zahlen ergeben, da der Voraussetzung gemäss α, β, γ, δ, r, s ganze Zahlen sind, $\mathfrak{b}''$ aber eine von Null verschiedene rationale Zahl ist. Führt man die so für die Grössen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{c}''$ gewonnenen Ausdrücke in die ursprünglichen Gleichungen (1), (2), . . ., (6) ein, so erfüllen sie natürlich die Gleichungen (1), (2), (3), (4), (6), aus denen sie ja abgeleitet wurden, sie erfüllen aber auch auf Grund der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = rs$ die noch übrige Gleichung (5), und es stellen daher die unter (S) aufgestellten Ausdrücke die allgemeinste Lösung der Gleichungen (1), (2), . . ., (6) dar, wenn man unter $\mathfrak{b}''$ eine willkürlich wählbare von Null verschiedene rationale Zahl versteht. Damit ist der Satz bewiesen:

Zu jeder linearen Transformation:

$$T = \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{r} & \frac{\beta}{r} \\ \frac{\gamma}{s} & \frac{\delta}{s} \end{vmatrix},$$

bei der β von Null verschieden ist, können auf unendlich viele Weisen zwei singuläre lineare Transformationen:

$$S' = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}' & 0 \\ \mathfrak{c}' & \mathfrak{b}' \end{vmatrix}, \qquad S'' = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}'' & 0 \\ \mathfrak{c}'' & \mathfrak{b}'' \end{vmatrix}$$

bestimmt werden, sodass die Gleichung:

$$T = S' T_{III} S''$$

erfüllt ist; man erhält alle der aufgestellten Gleichung genügenden Paare zusammengehöriger Transformationen S', S'', wenn man an Stelle von $\mathfrak{b}''$ alle möglichen von Null verschiedenen rationalen Zahlen einführt und dazu jedesmal die übrigen in S', S'' vorkommenden Grössen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{c}''$ aus den Gleichungen (S) bestimmt.

Durch Einführung passend gewählter specieller Zahlen an Stelle von $\mathfrak{b}''$ kann man den Transformationen S', S'' und damit auch jenen elementaren Transformationen, aus denen T der im Eingange dieses Abschnitts gestellten Aufgabe entsprechend zusammengesetzt werden soll, eine möglichst einfache Gestalt geben. Um eine solche Specialisirung vorzunehmen, setze man:

$$\mathfrak{b}'' = r$$

und führe diesen Werth in die Gleichungen (S) ein; es gehen dieselben dann in die Gleichungen:

$$\mathfrak{a}' = \frac{1}{\beta}, \qquad \mathfrak{c}' = \alpha, \qquad \mathfrak{b}' = \beta, \qquad \mathfrak{a}'' = \frac{1}{r}, \qquad \mathfrak{c}'' = \frac{\delta}{s\xi}$$

über. Bildet man nun die diesen Zahlen entsprechenden Transformationen S', S'' und führt dieselben zugleich mit den durch die Symbole T, T_{III} bezeichneten Transformationen in die Gleichung $T = S' T_{III} S''$ ein, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha}{r} & \frac{\beta}{r} \\ \frac{\gamma}{s} & \frac{\delta}{s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\delta}{s\beta} & r \end{vmatrix}$$

und weiter dann, indem man auf der rechten Seite dieser Gleichung sowohl die an erster, wie die an dritter Stelle stehende singuläre Transformation nach dem in Art. 2 Gezeigten aus elementaren Transformationen den Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha\beta & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\delta}{s\beta} & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{rs\beta} & 0 \\ 0 & rs\beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ rs\beta\delta & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s\beta & 0 \\ 0 & \frac{1}{s\beta} \end{vmatrix}$$

entsprechend zusammensetzt, schliesslich das Resultat:

Jede lineare Transformation:

$$T = \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{r} & \frac{\beta}{r} \\ \frac{\gamma}{s} & \frac{\delta}{s} \end{vmatrix},$$

bei der $\beta \gtrless 0$ *ist, lässt sich in der Form:*

$$T = \begin{vmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha\beta & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{rs\beta} & 0 \\ 0 & rs\beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ rs\beta\delta & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s\beta & 0 \\ 0 & \frac{1}{s\beta} \end{vmatrix}$$

aus sechs, oder in speciellen Fällen aus weniger als sechs, elementaren linearen Transformationen zusammensetzen.

Vierter Abschnitt.

Die beiden nicht linearen Haupttransformationen.

§ 1.

Aufgabe dieses Abschnitts.

Für diesen Abschnitt erübrigt es, jene beiden speciellen, zu den Zahlen $\frac{1}{n'}$ und n gehörigen Transformationen:

$$N_1' = \begin{vmatrix} \frac{1}{n'} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad N_2 = \begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

zu behandeln, welche bei der Zerlegung der allgemeinen, zur Zahl $\frac{n}{n'}$ gehörigen Transformation am Ende des ersten Abschnitts aufgetreten sind. Beachtet man aber, dass in denselben n, n' zwei beliebige positive ganze Zahlen bezeichnen, und dass N_2 die zur Transformation:

$$N_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

inverse Transformation, also:

$$N_2 = N_1^{-1}$$

ist, so kann man die Aufgabe dieses Abschnitts auch so angeben:

Es sollen die Lösungen der beiden zu einander inversen Transformationsprobleme:

$$N_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad N_2 = \begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ermittelt werden. Diese beiden Transformationen sollen die beiden *nicht linearen Haupttransformationen* genannt werden.

§ 2.

Umformung eines Productes von n Thetafunctionen mit demselben Parameter a.

Führt man auf der rechten Seite der Gleichung:

$$(F)\qquad \vartheta(u+c_1)_a\,\vartheta(u+c_2)_a\ldots\vartheta(u+c_n)_a = \sum_{m}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{a\left(m_1^2+\cdots+m_n^2\right)+2(m_1+\cdots+m_n)u+2(m_1c_1+\cdots+m_nc_n)},$$

bei welcher die Summation so auszuführen ist, dass jeder der n Summationsbuchstaben m unabhängig von den übrigen die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, an Stelle dieser Summationsbuchstaben m neue m' ein mit Hülfe der Gleichungen:

$$(S)\qquad \begin{aligned} m_1 &= m_1' + m_n',\\ m_2 &= m_2' + m_n',\\ &\cdots\cdots\cdots

der Weise auszuführen, dass man an Stelle des Systems der n Summationsbuchstaben $m_1', \ldots, m_n'$ ein jedes der Werthesysteme treten lässt, welche sich dafür aus den durch Auflösung der Gleichungen (S) nach den m' als Unbekannten entstehenden Gleichungen:

$$(S')\quad \begin{aligned}
n m_1' &= (n-1)m_1 - m_2 - \cdots - m_{n-1} - m_n,\\
n m_2' &= -m_1 + (n-1)m_2 - \cdots - m_{n-1} - m_n,\\
&\cdots\cdots\cdots

wobei die auf der rechten Seite angedeutete Summation so auszuführen ist, dass jeder der $n-1$ Summationsbuchstaben $\overset{\Delta}{m}_1, \ldots, \overset{\Delta}{m}_{n-1}$ unabhängig von den übrigen die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so erhält man aus der Gleichung (F_1) die neue:

$$(F_2) \qquad \vartheta(u+c_1)_a\,\vartheta(u+c_2)_a \cdots \vartheta(u+c_n)_a$$
$$= \sum_{x=0}^{x=n-1} B_x^{(a,n)} \sum_{\overset{\Delta}{m}_n=-\infty}^{\overset{\Delta}{m}_n=+\infty} e^{n\,a\left(\overset{\Delta}{m}_n+\frac{x}{n}\right)^2+2\left(\overset{\Delta}{m}_n+\frac{x}{n}\right)(n\,u+s)}$$

und aus dieser, indem man die auf ihrer rechten Seite vorkommende unendliche Reihe durch die damit identische Thetafunction ersetzt, die Formel:

$$(\Theta_0) \qquad \vartheta(u+c_1)_a \cdots \vartheta(u+c_n)_a = \sum_{x=0}^{x=n-1} B_x^{(a,n)}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{x}{n}\\ 0\end{bmatrix}(nu+s)_{na}.$$

Lässt man endlich in der Formel (Θ_0) die Variable u in:

$$u + ga + h\pi i$$

übergehen, so erhält man aus ihr unter Anwendung einer bekannten Hülfsformel die allgemeinere:

$$(\Theta_1) \qquad \vartheta\begin{bmatrix}g\\ h\end{bmatrix}(u+c_1)_a \ldots \vartheta\begin{bmatrix}g\\ h\end{bmatrix}(u+c_n)_a$$
$$= \sum_{x=0}^{x=n-1} B_x^{(a,n)}\,\vartheta\begin{bmatrix}g+\frac{x}{n}\\ nh\end{bmatrix}(nu+s)_{na};$$

dabei kann man den Constanten $B_x^{(a,n)}$ auch die für das Folgende bequemere Gestalt geben:

$$B_x^{(a,n)} = \sum_{m_1,\cdots,m_{n-1}}^{-\infty,\ldots,+\infty} \left\{ \begin{array}{l} e^{a\left[m_1^2+\cdots+m_{n-1}^2+(m_1+\cdots+m_{n-1}-x)^2-\frac{x^2}{n}\right]} \\ e^{2\left[m_1c_1+\cdots+m_{n-1}c_{n-1}-(m_1+\cdots+m_{n-1}-x)c_n-\frac{x}{n}s\right]} \end{array} \right\}.$$

§ 3.

Darstellung der Coefficienten B durch Thetafunctionen.

Die Constanten B können auf verschiedene Weisen durch Thetafunctionen dargestellt werden. Um zu einer solchen Darstellung zu gelangen, führe man an Stelle der Summationsbuchstaben m neue Summationsbuchstaben n ein, welche definirt sind durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
m_1 &= n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_{n-2} + n_{n-1},\\
m_2 &= -n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_{n-2} + n_{n-1},\\
m_3 &= -2n_2 + n_3 + \cdots + n_{n-2} + n_{n-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
m_{n-1} &= -(n-2)n_{n-2} + n_{n-1}.
\end{aligned}$$

Durch Anwendung dieser Substitution wird dann:

$$m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_{n-1}^2 + (m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1} - \varkappa)^2 - \frac{\varkappa^2}{n}$$
$$= 1\cdot 2\,n_1^2 + 2\cdot 3\,n_2^2 + \cdots + (n-2)(n-1)n_{n-2}^2 + (n-1)n\left(n_{n-1} - \frac{\varkappa}{n}\right)^2,$$

und ferner:

$$m_1 c_1 + m_2 c_2 + \cdots + m_{n-1} c_{n-1} - (m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1} - \varkappa) c_n - \frac{\varkappa}{n} s$$
$$= n_1(c_1 - c_2) + n_2(c_1 + c_2 - 2c_3) + \cdots + n_{n-2}(c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-2} - \overline{n-2}\, c_{n-1})$$
$$+ \left(n_{n-1} - \frac{\varkappa}{n}\right)(c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} - \overline{n-1}\, c_n).$$

Um dann noch die Frage zu entscheiden, in welcher Weise über die neuen Grössen n zu summiren ist, hat man das Gleichungssystem, durch welches die n eingeführt wurden, nach diesen Grössen als Unbekannten aufzulösen und die an entsprechenden Stellen gemachten Schlüsse zu wiederholen; es ergiebt sich dann, dass die Summation nach den n so ausgeführt werden kann, dass man:

$$\begin{aligned}
n_1 &= \hat{n}_1 + \frac{1}{1\cdot 2}\varepsilon_1,\\
n_2 &= \hat{n}_2 + \frac{1}{2\cdot 3}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
n_{n-2} &= \hat{n}_{n-2} + \frac{1}{(n-2)(n-1)}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \cdots + \overline{n-2}\,\varepsilon_{n-2}),\\
n_{n-1} &= \hat{n}_{n-1} + \frac{1}{n-1}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \cdots + \overline{n-2}\,\varepsilon_{n-2}),
\end{aligned}$$

setzt und nach allen Grössen $\hat{n}$ von $-\infty$ bis $+\infty$, nach ε_ν aber für $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$ von 0 bis ν summirt. Man erhält auf diese Weise für $B_\varkappa^{(a,\alpha)}$ den Ausdruck:

$$B_x^{(a,n)} = \sum_{\varepsilon} \left\{ \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{1\cdot 2} \\ 0 \end{bmatrix} (d_1 - c_2)_{1\cdot 2a} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2}{2\cdot 3} \\ 0 \end{bmatrix} (d_2 - 2c_3)_{2\cdot 3a} \cdots \right.$$

$$\cdots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{n-2}}{(n-2)(n-1)} \\ 0 \end{bmatrix} (d_{n-2} - \overline{n-2}\, c_{n-1})_{(n-2)(n-1)a}$$

$$\left. \cdot \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{n-2}}{n-1} - \frac{x}{n} \\ 0 \end{bmatrix} (d_{n-1} - \overline{n-1}\, c_n)_{(n-1)na} \right\},$$

bei dem zur Abkürzung für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_\nu = d_\nu,$$

ferner für $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$:

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \cdots + \nu\varepsilon_\nu = \sigma_\nu$$

gesetzt ist, und $\sum_{\varepsilon}$ andeutet, dass für $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$ nach ε_ν von 0 bis ν zu summiren ist.

§ 4.

Die Constanten $c_1, \ldots, c_n$ werden durch πi und a ausgedrückt.

Die bei der Formel (Θ_1) in den Thetafunctionen und den Grössen B vorkommenden willkürlichen Constanten c können mit Hülfe reeller Grössen g, h durch πi und den Parameter a ausgedrückt werden in der Form:

$$c_1 = g_1 a + h_1 \pi i, \quad \ldots, \quad c_n = g_n a + h_n \pi i.$$

Führt man diese Ausdrücke an Stelle der c in die Formel (Θ_1) ein, indem man sich darin gleichzeitig $B_x^{(a,n)}$ durch den letzten dafür angeschriebenen Ausdruck ersetzt denkt, so wird unter Anwendung der schon vorher erwähnten Hülfsformel zunächst auf der linken Seite der Formel für $\nu = 1, 2, \ldots, n$:

$$\vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (u + c_\nu)_a = \vartheta \begin{bmatrix} g + g_\nu \\ h + h_\nu \end{bmatrix} (u)_a e^{-ag_\nu - 2g_\nu(u + h\pi i + h_\nu \pi i)};$$

es wird weiter auf der rechten Seite, wenn man:

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_n = g', \qquad h_1 + h_2 + \cdots + h_n = h'$$

setzt:

$$\vartheta \begin{bmatrix} g + \frac{x}{n} \\ nh \end{bmatrix} (nu + s)_{na} = \vartheta \begin{bmatrix} g + \frac{g'}{n} + \frac{x}{n} \\ nh + h' \end{bmatrix} (nu)_{na} e^{-\frac{ag'^2}{n} - 2g'(u + h\pi i) - 2\frac{g'h'}{n}\pi i},$$

und ferner, wenn man für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_\nu - \nu g_{\nu+1} = g_\nu',$$
$$h_1 + h_2 + \cdots + h_\nu - \nu h_{\nu+1} = h_\nu'$$

setzt:

$$\vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_\nu}{\nu(\nu+1)} \\ 0 \end{bmatrix} (d_\nu - \nu c_{\nu+1})_{\nu(\nu+1)a}$$

$$= \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_\nu + g_\nu'}{\nu(\nu+1)} \\ h_\nu' \end{bmatrix} (0)_{\nu(\nu+1)a}\, e^{-\frac{a g_\nu'^2}{\nu(\nu+1)} - 2\frac{g_\nu' h_\nu'}{\nu(\nu+1)}\pi i}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$, und endlich:

$$\vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{n-2}}{n-1} - \frac{x}{n} \\ 0 \end{bmatrix} (d_{n-1} - \overline{n-1}\, c_n)_{(n-1)na}$$

$$= \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{n-2}}{n-1} + \frac{g_{n-1}'}{(n-1)n} - \frac{x}{n} \\ 0 \end{bmatrix} (0)_{(n-1)na}\, e^{-\frac{a g_{n-1}'^2}{(n-1)n} - 2\frac{g_{n-1}' h_{n-1}'}{(n-1)n}\pi i}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{1}{1.2} g_1'^2 + \frac{1}{2.3} g_2'^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} g_{n-1}'^2 + \frac{1}{n} g'^2$$
$$= g_1^2 + g_2^2 + \cdots + g_n^2,$$
$$\frac{1}{1.2} g_1' h_1' + \frac{1}{2.3} g_2' h_2' + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} g_{n-1}' h_{n-1}' + \frac{1}{n} g' h'$$
$$= g_1 h_1 + g_2 h_2 + \cdots + g_n h_n,$$

und es geht daher die Formel (Θ_1), wenn man die im Vorigen gefundenen Ausdrücke in sie einführt und die den beiden Seiten gemeinsamen Factoren durch Division entfernt, über in die Formel:

$$(\Theta) \quad \vartheta \begin{bmatrix} g+g_1 \\ h+h_1 \end{bmatrix} (u)_a \cdots \vartheta \begin{bmatrix} g+g_n \\ h+h_n \end{bmatrix} (u)_a = \sum_{x=0}^{x=n-1} C_x^{(a,n)} \vartheta \begin{bmatrix} g + \frac{g'}{n} + \frac{x}{n} \\ nh+h' \end{bmatrix} (nu)_{na}.$$

In dieser Formel ist:

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_n = g', \qquad h_1 + h_2 + \cdots + h_n = h'$$

gesetzt und mit $C_x^{(a,n)}$ der Ausdruck:

$$C_x^{(a,n)} = \sum_\varepsilon \left\{ \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1 + g_1'}{1.2} \\ h_1' \end{bmatrix} (0)_{1\cdot 2a} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2 + g_2'}{2.3} \\ h_2' \end{bmatrix} (0)_{2\cdot 3a} \cdots \right.$$
$$\left. \cdots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{n-2} + g_{n-2}'}{(n-2)(n-1)} \\ h_{n-2}' \end{bmatrix} (0)_{(n-2)(n-1)a} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{n-2}}{n-1} + \frac{g_{n-1}'}{(n-1)n} - \frac{x}{n} \\ h_{n-1}' \end{bmatrix} (0)_{(n-1)na} \right\}$$

bezeichnet, bei dem für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_\nu - \nu g_{\nu+1} = g_\nu',$$
$$h_1 + h_2 + \cdots + h_\nu - \nu h_{\nu+1} = h_\nu',$$

ferner für $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$:

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \cdots + \nu\varepsilon_\nu = \sigma_\nu$$

gesetzt und mit $\sum_{\varepsilon}$ angedeutet ist, dass für $n = 1, 2, \ldots, n-2$ nach ε_ν von 0 bis ν zu summiren ist.

§ 5.

Umkehrung der Formel (Θ).

Aus der Formel (Θ) kann man eine andere ableiten, welche eine Function $\vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(nu)_{na}$ linear durch Producte von je n Functionen $\vartheta\begin{bmatrix} k' \\ l' \end{bmatrix}(u)_a$ ausdrückt, und welche daher als die Umkehrung der Formel (Θ) anzusehen ist.

Um dieselbe zu erhalten, ersetze man in der Formel (Θ) die Grösse h durch $h + \frac{\lambda}{n}$, indem man unter λ eine ganze Zahl versteht, und beachte, dass:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g+\frac{g'}{n}+\frac{\varkappa}{n} \\ nh+h'+\lambda \end{bmatrix}(nu)_{na} = \vartheta\begin{bmatrix} g+\frac{g'}{n}+\frac{\varkappa}{n} \\ nh+h' \end{bmatrix}(nu)_{na}\, e^{2\left(g+\frac{g'}{n}+\frac{\varkappa}{n}\right)\lambda\pi i}$$

ist; man erhält dann aus der Formel (Θ), wenn man linke und rechte Seite mit

$$e^{-2\left(g+\frac{g'}{n}\right)\lambda\pi i}$$

multiplicirt und gleichzeitig auf der rechten Seite $\varkappa'$ statt $\varkappa$ schreibt, die neue:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g+g_1 \\ h+h_1+\frac{\lambda}{n} \end{bmatrix}(u)_a \cdots \vartheta\begin{bmatrix} g+g_n \\ h+h_n+\frac{\lambda}{n} \end{bmatrix}(u)_a e^{-2\left(g+\frac{g'}{n}\right)\lambda\pi i}$$
$$= \sum_{\varkappa'=0}^{\varkappa'=n-1} C_{\varkappa'}^{(a,n)}\, \vartheta\begin{bmatrix} g+\frac{g'}{n}+\frac{\varkappa'}{n} \\ nh+h' \end{bmatrix}(nu)_{na}\, e^{\frac{2\varkappa'\lambda\pi i}{n}}.$$

Versteht man jetzt unter $\varkappa$ irgend eine Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots, n-1$, multiplicirt linke und rechte Seite der letzten Formel mit

$$e^{-\frac{2\varkappa\lambda\pi i}{n}}$$

und summirt nach λ von 0 bis $n-1$, so erhält man zunächst:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \vartheta\begin{bmatrix} g+g_1 \\ h+h_1+\frac{\lambda}{n}\end{bmatrix}(u)_a \ldots \vartheta\begin{bmatrix} g+g_n \\ h+h_n+\frac{\lambda}{n}\end{bmatrix}(u)_a e^{-2\left(g+\frac{g'}{n}+\frac{x}{n}\right)\lambda\pi i}$$
$$= \sum_{x'=0}^{x'=n-1} C_{x'}^{(a,n)} \vartheta\begin{bmatrix} g+\frac{g'}{n}+\frac{x'}{n} \\ nh+h'\end{bmatrix}(nu)_{na}\left(\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} e^{\frac{2\pi i}{n}(x'-x)\lambda}\right)$$

und hieraus, indem man beachtet, dass die auf der rechten Seite stehende in besondere Klammern eingeschlossene Summe nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth n besitzt, wenn $x' = x$ ist, die Formel:

$$(\bar{\Theta}) \qquad nC_x^{(a,n)} \vartheta\begin{bmatrix} g+\frac{g'}{n}+\frac{x}{n} \\ nh+h'\end{bmatrix}(nu)_{na}$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \vartheta\begin{bmatrix} g+g_1 \\ h+h_1+\frac{\lambda}{n}\end{bmatrix}(u)_a \ldots \vartheta\begin{bmatrix} g+g_n \\ h+h_n+\frac{\lambda}{n}\end{bmatrix}(u)_a e^{-2\left(g+\frac{g'}{n}+\frac{x}{n}\right)\lambda\pi i}.$$

In den Formeln (Θ), $(\bar{\Theta})$ bezeichnen g_ν, h_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ $2n$ willkürliche Constanten; beachtet man aber, dass auch die weiter vorkommenden beiden Grössen g, h willkürlich wählbar sind, so erkennt man, dass man den vorher genannten $2n$ Constanten, ohne der Allgemeinheit der Formeln Abbruch zu thun, die beiden Bedingungen:

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_n = 0, \qquad h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 0$$

auferlegen kann, wodurch die Formeln (Θ), $(\bar{\Theta})$ in Folge des Verschwindens der beiden Grössen g', h' eine etwas einfachere Gestalt annehmen.

§ 6.

Allgemeine Formeln für die beiden nicht linearen Haupttransformationen.

Bei dem durch die Charakteristik:

$$N_1 = \left|\begin{array}{c|c} \frac{1}{n} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsprobleme sind die Variable u und der Parameter a der ursprünglichen Thetafunction mit der Variable v und dem Parameter b der transformirten durch die Gleichungen:

$$v = nu, \qquad b = na$$

verknüpft. Die im Vorigen abgeleitete Formel (Θ) erscheint daher als

Lösung dieses Transformationsproblems, und die Formel ($\bar{\Theta}$), weil sie die Umkehrung der Formel (Θ) ist, als Lösung des dazu inversen Transformationsproblems $N_1^{-1} = N_2$. Dieses Resultat kann man, wie folgt, aussprechen:

Den beiden nicht linearen Haupttransformationen:

$$N_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad N_2 = \begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

entsprechen die beiden Formeln:

$$(N_1)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g+g_1 \\ h+h_1 \end{bmatrix}(u)_a \dots \vartheta\begin{bmatrix} g+g_n \\ h+h_n \end{bmatrix}(u)_a = \sum_{x=0}^{x=n-1} C_x^{(a,n)}\, \vartheta\begin{bmatrix} g+\frac{g'}{n}+\frac{x}{n} \\ nh+h' \end{bmatrix}(nu)_{na},$$

$$(N_2)\quad nC_x^{(a,n)}\, \vartheta\begin{bmatrix} g+\frac{g'}{n}+\frac{x}{n} \\ nh+h' \end{bmatrix}(nu)_{na}$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \vartheta\begin{bmatrix} g+g_1 \\ h+h_1+\frac{\lambda}{n} \end{bmatrix}(u)_a \dots \vartheta\begin{bmatrix} g+g_n \\ h+h_n+\frac{\lambda}{n} \end{bmatrix}(u)_a e^{-2\left(g+\frac{g'}{n}+\frac{x}{n}\right)\lambda\pi i}.$$

In diesen Formeln ist:

$$g_1+g_2+\cdots+g_n = g', \qquad h_1+h_2+\cdots+h_n = h'$$

gesetzt und mit $C_x^{(a,n)}$ der Ausdruck:

$$C_x^{(a,n)} = \sum_{\sigma} \Bigg\{ \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\sigma_1+g_1'}{1\,.\,2} \\ h_1' \end{bmatrix}(0)_{1\cdot 2a}\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\sigma_2+g_2'}{2\,.\,3} \\ h_2' \end{bmatrix}(0)_{2\cdot 3a} \cdots$$
$$\cdots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\sigma_{n-2}+g_{n-2}'}{(n-2)(n-1)} \\ h_{n-2}' \end{bmatrix}(0)_{(n-2)(n-1)a}\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\sigma_{n-2}}{n-1}+\frac{g_{n-1}'}{(n-1)n}-\frac{x}{n} \\ h_{n-1}' \end{bmatrix}(0)_{(n-1)na} \Bigg\}$$

bezeichnet, bei dem für $\nu = 1, 2, \dots, n-1$:

$$g_1+g_2+\cdots+g_\nu-\nu g_{\nu+1} = g_\nu',$$
$$h_1+h_2+\cdots+h_\nu-\nu h_{\nu+1} = h_\nu',$$

ferner für $\nu = 1, 2, \dots, n-2$:

$$\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\cdots+\nu\varepsilon_\nu = \sigma_\nu$$

gesetzt ist, und $\sum_{\sigma}$ andeutet, dass für $\nu = 1, 2, \dots, n-2$ nach ε_ν von 0 bis ν zu summiren ist.

§ 7.

Specielle Formeln für die beiden nicht linearen Haupttransformationen.

Die Formeln (N_1), (N_2) nehmen einfachere Formen an, wenn man für die Constanten $g_1, \ldots, g_n$, $h_1, \ldots, h_n$ passend gewählte specielle Werthe einführt.

Setzt man zunächst:

$$g_1 = g_2 = \cdots = g_n = 0,$$
$$h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0,$$

so gehen die Formeln (N_1), (N_2) über in die Formeln:

$$(N_1') \qquad \vartheta^n \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (u)_a = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} C_\varkappa'^{(a,n)} \vartheta \begin{bmatrix} g + \frac{\varkappa}{n} \\ nh \end{bmatrix} (nu)_{na},$$

$$(N_2') \quad nC'^{(a,n)}_{\varkappa} \vartheta \begin{bmatrix} g + \frac{\varkappa}{n} \\ nh \end{bmatrix} (nu)_{na} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \vartheta^n \begin{bmatrix} g \\ h + \frac{\lambda}{n} \end{bmatrix} (u)_a e^{-2\left(\varrho + \frac{\varkappa}{n}\right)\lambda\pi i},$$

bei denen:

$$C_\varkappa'^{(a,n)} = \sum_{\sigma} \left\{ \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{1 \cdot 2} \\ 0 \end{bmatrix} (0)_{1 \cdot 2a} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2}{2 \cdot 3} \\ 0 \end{bmatrix} (0)_{2 \cdot 3a} \cdots \right.$$
$$\left. \cdots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{n-2}}{(n-2)(n-1)} \\ 0 \end{bmatrix} (0)_{(n-2)(n-1)a} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{n-2}}{n-1} - \frac{\varkappa}{n} \\ 0 \end{bmatrix} (0)_{(n-1)na} \right\}$$

ist, wenn man für $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$:

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \cdots + \nu\varepsilon_\nu = \sigma_\nu$$

setzt und mit $\sum_{\sigma}$ andeutet, dass für $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$ nach ε_ν von 0 bis ν zu summiren ist.

Setzt man ferner:

$$g_1 = g_2 = \cdots = g_n = 0, \qquad h_1 = 0,\ h_2 = \frac{1}{n},\ h_3 = \frac{2}{n}, \cdots, h_n = \frac{n-1}{n},$$

so wird:

$$g' = 0, \qquad h' = \frac{n-1}{2}$$

und für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$g_\nu' = 0, \qquad h_\nu' = \frac{\nu(\nu-1)}{2n} - \frac{\nu^2}{n} = -\frac{\nu(\nu+1)}{2n}.$$

Aus der Formel (N_2) geht daher zunächst die Formel:

$$n C_x^{''(a,n)} \vartheta \begin{bmatrix} g+\frac{x}{n} \\ nh+\frac{n-1}{2} \end{bmatrix} (nu)_{na}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+\frac{\lambda}{n} \end{bmatrix} (u)_a \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+\frac{\lambda+1}{n} \end{bmatrix} (u)_a \dots \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+\frac{\lambda+n-1}{n} \end{bmatrix} (u)_a$$

$$\times e^{-2\left(g+\frac{x}{n}\right)\lambda\pi i}$$

hervor, bei der:

$$C_x^{''(a,n)} = \sum_{\sigma} \left\{ \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{1\cdot 2} \\ -\frac{1\cdot 2}{2n} \end{bmatrix} (0)_{1\cdot 2\,a} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2}{2\cdot 3} \\ -\frac{2\cdot 3}{2n} \end{bmatrix} (0)_{2\cdot 3\,a} \dots \right.$$

$$\left. \dots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{n-2}}{(n-2)(n-1)} \\ -\frac{(n-2)(n-1)}{2n} \end{bmatrix} (0)_{(n-2)(n-1)\,a} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{n-2}}{n-1} - n \\ -\frac{(n-1)n}{2n} \end{bmatrix} (0)_{(n-1)\,na} \right\}$$

ist, wenn man für $\nu = 1, 2, \dots, n-2$:

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \dots + \nu\varepsilon_\nu = \sigma$$

setzt und mit $\sum_{\sigma}$ andeutet, dass für $\nu = 1, 2, \dots, n-2$ nach ε_ν von 0 bis ν zu summiren ist. Nun ist aber:

$$\vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+\frac{\lambda}{n} \end{bmatrix} (u)_a \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+\frac{\lambda+1}{n} \end{bmatrix} (u)_a \dots \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+\frac{\lambda+n-1}{n} \end{bmatrix} (u)_a$$

$$= \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+\frac{\lambda}{n} \end{bmatrix} (u)_a \dots \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+\frac{n-1}{n} \end{bmatrix} (u)_a \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+1 \end{bmatrix} (u)_a \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+1+\frac{1}{n} \end{bmatrix} (u)_a \dots$$

$$\dots \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+1+\frac{\lambda-1}{n} \end{bmatrix} (u)_a$$

$$= \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (u)_a \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+\frac{1}{n} \end{bmatrix} (u)_a \dots \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+\frac{n-1}{n} \end{bmatrix} (u)_a e^{2g\lambda\pi i},$$

und es geht demnach die obige Formel über in:

$$n C_x^{''(a,n)}\, \vartheta \begin{bmatrix} g+\frac{x}{n} \\ nh+\frac{n-1}{2} \end{bmatrix} (nu)_{na}$$

$$= \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (u)_a \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+\frac{1}{n} \end{bmatrix} (u)_a \ldots \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+\frac{n-1}{n} \end{bmatrix} (u)_a \left(\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} e^{-\frac{2x\lambda\pi i}{n}} \right).$$

Nun besitzt aber die auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehende, in besondere Klammern eingeschlossene Summe nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth n, wenn $x = 0$ ist; die letzte Formel geht daher für $x = 0$, wenn man linke und rechte Seite, nachdem man sie durch n dividirt hat, mit einander vertauscht, über in:

$$(N'') \qquad \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (u)_a \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+\frac{1}{n} \end{bmatrix} (u)_a \ldots \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h+\frac{n-1}{n} \end{bmatrix} (u)_a$$

$$= C_0^{''(a,n)}\, \vartheta \begin{bmatrix} g \\ nh+\frac{n-1}{2} \end{bmatrix} (nu)_{na},$$

während für jedes $x > 0$ aus ihr:

$$C_x^{''(a,n)} = 0 \qquad (x = 1, 2, \ldots, n-1)$$

folgt.

Strassburg, im December 1892.

Inhalt.

Erster Abschnitt: Einleitung in die Transformationstheorie. Seite

§ 1. Aufstellung des Transformationsproblems 414
§ 2. Zusammensetzung der Transformationen 417
§ 3. Die einer gegebenen inverse Transformation 420
§ 4. Zusammensetzung einer Transformation aus einfachen. Plan der weiteren Untersuchung 422

Zweiter Abschnitt: Die drei elementaren linearen Transformationen.

§ 1. Die erste elementare lineare Transformation 424
§ 2. Die zweite elementare lineare Transformation 427
§ 3. Die dritte elementare lineare Transformation 429

Dritter Abschnitt: Zusammensetzung der allgemeinen linearen Transformationen aus elementaren.

§ 1. Vorbemerkung 436
§ 2. Der Fall $\beta = 0$ 437
§ 3. Der Fall $\beta \gtrless 0$ 439

Vierter Abschnitt: Die beiden nicht linearen Haupttransformationen.

§ 1. Aufgabe dieses Abschnitts 443
§ 2. Umformung eines Productes von n Thetafunctionen mit demselben Parameter a 444
§ 3. Darstellung der Coefficienten B durch Thetafunctionen 446
§ 4. Die Constanten $c_1, \ldots, c_n$ werden durch πi und a ausgedrückt 448
§ 5. Umkehrung der Formel (Θ) 450
§ 6. Allgemeine Formeln für die beiden nicht linearen Haupttransformationen 451
§ 7. Specielle Formeln für die beiden nicht linearen Haupttransformationen. 453

Die Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen.

Zweite Abhandlung.

Von

A. Krazer in Strassburg i. E.

In einer ersten, im vorausgehenden Hefte dieses Annalenbandes erschienenen Abhandlung habe ich die Grundlagen für die Behandlung des allgemeinen Transformationsproblems der Thetafunctionen einer Veränderlichen gegeben, indem ich zeigte, auf welche Weise die allgemeine Transformation sich aus einer geringen Anzahl einfacher Transformationen zusammensetzen lässt, und für diese einfachen Transformationsprobleme die vollständige Lösung angab. In der gegenwärtigen zweiten Abhandlung soll mit diesen Hülfsmitteln die ganzzahlige zur Zahl n gehörige Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen vollständig ausgeführt werden.

Einleitung.

Die ganzzahlige zur Zahl n gehörige Transformation:

$$T = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix},$$

bei der:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = n$$

ist, lässt sich aus einer linearen Transformation und einer speciellen zur Zahl n gehörigen Transformation in der Form:

$$T = \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{n} & \frac{\beta}{n} \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

zusammensetzen, und man erhält daher die der Transformation T entsprechende Thetaformel durch Zusammensetzung jener zwei Theta-

formeln, welche den beiden auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehenden Transformationen entsprechen. Um die zu der ersten, linearen Transformation:

$$L = \left| \begin{array}{c|c} \frac{\alpha}{n} & \frac{\beta}{n} \\ \hline \gamma & \delta \end{array} \right|$$

gehörige Thetaformel zu erhalten, hat man diese Transformation in der im dritten Abschnitte der ersten Abhandlung angegebenen Weise aus elementaren linearen Transformationen zusammenzusetzen, die diesen Transformationen entsprechenden Thetaformeln dem zweiten Abschnitte zu entnehmen und zu einer einzigen Formel zu vereinigen. Dabei muss der Fall, wo $\beta \gtrless 0$ ist, von dem Falle, wo $\beta = 0$ ist, getrennt werden. Im ersten Falle soll die Transformation L von nun an mit L_1, im zweiten Falle mit L_2 bezeichnet werden. Die zweite Transformation:

$$\left| \begin{array}{c|c} n & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right|$$

ist die im vierten Abschnitte der ersten Abhandlung eingeführte zweite nichtlineare Haupttransformation N_2; die ihr entsprechende Thetaformel ist dort in der allgemeinsten Gestalt aufgestellt worden.

Erster Abschnitt.

Aufstellung der zur linearen Transformation L_1 gehörigen Thetaformel.

1.

Zusammensetzung der Transformation L_1 aus elementaren.

Da bei der Transformation:

$$L_1 = \left| \begin{array}{c|c} \frac{\alpha}{n} & \frac{\beta}{n} \\ \hline \gamma & \delta \end{array} \right|$$

die Zahl β der Voraussetzung nach von Null verschieden ist, so lässt sich diese Transformation entsprechend dem im dritten Abschnitte der *ersten* Abhandlung gewonnenen Resultate in der Form:

$$L_1 = \left|\begin{matrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & \beta \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ \alpha\beta & 1 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix} \frac{1}{n\beta} & 0 \\ 0 & n\beta \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ n\beta\delta & 1 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} \beta & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{matrix}\right|$$

aus sechs elementaren linearen Transformationen zusammensetzen.

Die nächste Aufgabe ist, die diesen sechs elementaren linearen Transformationen entsprechenden Thetaformeln aufzustellen.

2.

Die den sechs in Art. 1 erhaltenen elementaren linearen Transformationen entsprechenden Thetaformeln.

Es entspricht zunächst der elementaren Transformation:

$$\left|\begin{matrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & \beta \end{matrix}\right|$$

die aus der Formel (I)*) für $p = 1$, $q = \beta$ unmittelbar hervorgehende Thetaformel:

$$(1) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\beta-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{g+\varrho}{\beta} \\ \beta h \end{bmatrix}(v_1)_{b_1},$$

bei der:

$$v_1 = \beta u, \quad b_1 = \beta^2 a.$$

Der elementaren Transformation:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ \alpha\beta & 1 \end{matrix}\right|$$

entspricht ferner die aus der Formel (II)**) für $l = \alpha\beta$ bei passender Wahl der Bezeichnung hervorgehende Thetaformel:

$$(2) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \\ h_1 \end{bmatrix}(v_1)_{b_1} = e^{\alpha\beta g_1(g_1-1)\pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix} g_2 \\ h_2 \end{bmatrix}(v_2)_{b_2},$$

bei der:

$$g_2 = g_1, \quad h_2 = h_1 + \frac{1}{2}\alpha\beta - \alpha\beta g_1, \quad v_2 = v_1, \quad b_2 = b_1 + \alpha\beta\pi i.$$

*) Bd. 43, pag. 427.

**) Bd. 43, pag. 429.

Der elementaren Transformation:

$$\left|\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right|$$

entspricht die aus der Formel (III)*) bei passender Wahl der Bezeichnung hervorgehende Thetaformel:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_2 \\ h_2 \end{bmatrix}(v_2)_{b_2} = \sqrt{\frac{-\pi}{b_2}}\, e^{-\frac{v_3^2}{b_2}+2g_2h_2\pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix} g_3 \\ h_3 \end{bmatrix}(v_3)_{b_3}, \tag{3}$$

bei der:

$$g_3 = -h_2, \quad h_3 = g_2, \quad v_3 = \frac{\pi i}{b_2}v_2, \quad b_3 = \frac{\pi^2}{b_2}$$

und die auf der rechten Seite stehende Wurzel so auszuziehen ist, dass ihr reeller Theil positiv wird.

Der elementaren Transformation:

$$\left|\begin{array}{c|c} \frac{1}{n\beta} & 0 \\ \hline 0 & n\beta \end{array}\right|$$

entspricht weiter die aus der Formel (I) für $p = 1$, $q = n\beta$ bei passender Wahl der Bezeichnung hervorgehende Thetaformel:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_3 \\ h_3 \end{bmatrix}(v_3)_{b_3} = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=n\beta-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{g_3+\sigma}{n\beta} \\ n\beta h_3 \end{bmatrix}(v_4)_{b_4}, \tag{4}$$

bei der:

$$v_4 = n\beta v_3, \quad b_4 = n^2\beta^2 b_3.$$

Der elementaren Transformation:

$$\left|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline n\beta\delta & 1 \end{array}\right|$$

entspricht weiter die aus der Formel (II) für $l = n\beta\delta$ bei passender Wahl der Bezeichnung hervorgehende Thetaformel:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_4 \\ h_4 \end{bmatrix}(v_4)_{b_4} = e^{n\beta\delta g_4(g_4-1)\pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix} g_5 \\ h_5 \end{bmatrix}(v_5)_{b_5}, \tag{5}$$

bei der:

$$g_5 = g_4, \quad h_5 = h_4 + \frac{1}{2}n\beta\delta - n\beta\delta g_4, \quad v_5 = v_4, \quad b_5 = b_4 + n\beta\delta\pi i.$$

*) Bd. 43, pag. 436.

Endlich entspricht der elementaren Transformation:

$$\left|\begin{array}{c|c} \beta & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\beta} \end{array}\right|$$

die aus der Formel (I) für $p = \beta$, $q = 1$ bei passender Wahl der Bezeichnung hervorgehende Thetaformel:

$$\bar{\beta}\,\vartheta\begin{bmatrix} g_5 \\ h_5 \end{bmatrix}(v_5)_{b_5} = \sum_{\tau=0}^{\tau=\bar{\beta}-1} e^{-2g_5\tau\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} \beta g_5 \\ \frac{h_5+\tau}{\beta} \end{bmatrix}(\mathfrak{v})_{\mathfrak{b}}, \tag{6}$$

bei der:

$$\mathfrak{v} = \frac{v_5}{\beta}, \quad \mathfrak{b} = \frac{b_5}{\beta^2}.$$

Bei jeder der aufgestellten sechs Formeln ist die auf der linken Seite stehende Thetafunction zunächst eine beliebige; für die beabsichtigte Zusammensetzung aber hat man allgemein, d. h. für $\varkappa = 2, 3, \ldots, 6$ die auf der linken Seite der $\varkappa^{\text{ten}}$ Gleichung vorkommenden Grössen $v_{\varkappa-1}$, $b_{\varkappa-1}$ als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der $\varkappa - 1^{\text{ten}}$ Gleichung stehenden Grössen $v_{\varkappa-1}$, $b_{\varkappa-1}$ anzusehen und zugleich in der Gleichung (2) $g_1 = \frac{1}{\beta}(g + \varrho)$, $h_1 = \beta h$ zu setzen, die auf der linken Seite der Gleichung (3) vorkommenden Grössen g_2, h_2 als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Gleichung (2) vorkommenden Grössen g_2, h_2, ebenso die auf der linken Seite der Gleichung (4) vorkommenden Grössen g_3, h_3 als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Gleichung (3) vorkommenden Grössen g_3, h_3 zu betrachten, weiter in der Gleichung (5) $g_4 = \frac{1}{n\beta}(g_3 + \sigma)$, $h_4 = n\beta h_3$ zu setzen und endlich die auf der linken Seite der Gleichung (6) vorkommenden Grössen g_5, h_5 als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Gleichung (5) vorkommenden Grössen g_5, h_5 anzusehen, sodass alsdann allgemein die auf der linken Seite der $\varkappa^{\text{ten}}$ Gleichung stehende Thetafunction mit der auf der rechten Seite der $\varkappa - 1^{\text{ten}}$ Gleichung entweder allein, wie bei den Gleichungen (2), (3), (5), oder als allgemeines Glied einer Summe, wie bei den Gleichungen (1), (4), vorkommenden Thetafunction identisch ist. Nachdem dies geschehen, könnte man diese sechs Formeln zu einer einzigen zusammensetzen; man würde auf diese Weise die zu der vorgelegten Transformation T gehörige Thetaformel erhalten und hätte dann nur noch der so entstandenen Formel eine möglichst einfache Gestalt zu geben. Dasselbe Ziel erreicht man aber auf einfacherem Wege, wenn man zunächst nur die Formeln (1), (2), (3), (4) zusammensetzt, der auf diese Weise entstehenden Thetaformel, welche zu der Transformation

$$L' = \left|\begin{matrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & \beta \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ \alpha\beta & 1 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} \frac{1}{n\beta} & 0 \\ 0 & n\beta \end{matrix}\right|$$

$$= \left|\begin{matrix} \frac{\alpha}{n\beta} & \frac{1}{n} \\ -n & 0 \end{matrix}\right|$$

gehört, eine möglichst einfache Gestalt giebt und alsdann aus ihr und den Formeln (5) und (6) nach passender neuer Verfügung über die Grössen g_4, h_4, g_5, h_5 die zu der vorgelegten Transformation T gehörige Thetaformel bildet. Dieser Weg soll im Folgenden beschritten werden.

3.

Die zur Transformation L' gehörige Thetaformel in einer vorläufigen Gestalt $(\bar{L}')$.

Man setze also zunächst die Formeln (1), (2), (3), (4) unter Beachtung der vorher über die Grössen v_ν, b_ν, g_ν, h_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ gemachten Festsetzungen zusammen, indem man in der Gleichung (1) die auf der rechten Seite hinter dem Summenzeichen stehende Thetafunction durch den aus der Gleichung (2) dafür sich ergebenden Ausdruck ersetzt, nachdem man zuvor in dieser letzten Gleichung die auf der rechten Seite vorkommende Function $\vartheta\begin{bmatrix} g_2 \\ h_2 \end{bmatrix}(v_2)_{b_2}$ mit Hülfe der Gleichung (3) durch die Function $\vartheta\begin{bmatrix} g_3 \\ h_3 \end{bmatrix}(v_3)_{b_3}$ und diese letztere mit Hülfe der Gleichung (4) durch Thetafunctionen mit dem Argumente v_4 und dem Parameter b_4 ausgedrückt hat. Man erhält auf diese Weise die zu der Transformation:

$$L' = \left|\begin{matrix} \frac{\alpha}{n\beta} & \frac{1}{n} \\ -n & 0 \end{matrix}\right|$$

gehörige Thetaformel zunächst in der Gestalt:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sqrt{\frac{-\pi}{b_2}}\, e^{-\frac{v_2^2}{b_2}} \cdot \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\bar{\beta}-1} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=n\bar{\beta}-1} e^{\frac{\alpha}{\beta}(g+\varrho)(g+\varrho-\beta)\pi i + \frac{2}{\beta}(g+\varrho)h_2\pi i} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{-h_2+\sigma}{n\beta} \\ n(g+\varrho) \end{bmatrix}(v_4)_{b_4},$$

wobei:

$$h_2 = \beta h + \tfrac{1}{2}\alpha\beta - \alpha(g+\varrho), \quad v_2 = \beta u, \quad b_2 = \beta^2 a + \alpha\beta\pi i,$$

$$v_4 = n\beta\frac{\pi i}{b_2} v_2, \quad b_4 = n^2\beta^2\frac{\pi^2}{b_2}$$

ist. Der gewonnenen Formel soll jetzt eine einfachere Gestalt gegeben werden.

Zu dem Ende führe man auf der rechten Seite der Formel an Stelle des Summationsbuchstabens σ einen neuen Summationsbuchstaben $\dot{\sigma}$ ein, indem man:

$$\sigma = \dot{\sigma} + \tau$$

setzt, wobei τ eine ganze Zahl bezeichnet, über die sogleich verfügt werden soll. Bei der Ausführung der Summation nach σ wird dann $\dot{\sigma}$ ein und nur einmal einer jeden der Zahlen $0, 1, \ldots, n\overline{\beta} - 1$ congruent nach dem Modul $n\beta$, und da sich das allgemeine Glied der Summe nicht ändert, wenn man die Zahl $\dot{\sigma}$ durch irgend eine ihr nach dem Modul $n\beta$ congruente, speciell also durch ihren kleinsten positiven Rest nach dem Modul $n\beta$ ersetzt, so kann die Summation nach $\dot{\sigma}$ auch in der Weise ausgeführt werden, dass $\dot{\sigma}$ die Reihe der ganzen Zahlen $0, 1, \ldots, n\overline{\beta} - 1$ durchläuft. Setzt man jetzt:

$$\tau = \alpha\beta - \alpha\varrho,$$

so wird:

$$-h_2 + \sigma = \hat{g} + \dot{\sigma},$$

wenn man mit $\hat{g}$ den Ausdruck:

$$\hat{g} = \tfrac{1}{2}\alpha\beta + \alpha g - \beta h$$

bezeichnet. Schafft man sodann, nachdem man den neuen Summationsbuchstaben $\dot{\sigma}$ eingeführt hat, die in der Charakteristik der Thetafunction vorkommende ganze Zahl ϱ mit Hülfe der Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{\hat{g}+\dot{\sigma}}{n\beta} \\ n(g+\varrho) \end{bmatrix}(v_4)_{b_4} = e^{\frac{2}{\beta}(\hat{g}+\dot{\sigma})\varrho\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{\hat{g}+\dot{\sigma}}{n\beta} \\ ng \end{bmatrix}(v_4)_{b_4}$$

aus der Charakteristik heraus und beachtet, dass:

$$\tfrac{2}{\beta}(\hat{g}+\dot{\sigma})\varrho = \tfrac{2}{\beta}\alpha g\varrho - 2h\varrho + \tfrac{2}{\beta}\left(\dot{\sigma} + \tfrac{1}{2}\alpha\beta\right)\varrho$$

und weiter:

$$\tfrac{\alpha}{\beta}(g+\varrho)(g+\varrho-\beta) + \tfrac{2}{\beta}(g+\varrho)h_2 = -\tfrac{\alpha}{\beta}(g+\varrho)^2 + 2(g+\varrho)h$$

ist, so nimmt die obige Thetaformel, wenn man schliesslich noch die Grössen v_2, v_4, b_2, b_4 durch das Argument u und den Parameter a

der ursprünglichen Thetafunction ausdrückt, ferner bei dem Summationsbuchstaben σ den Punkt weglässt, weiter die von den Summationsbuchstaben ϱ, σ freien Theile der Exponentialgrösse vor die Summenzeichen setzt, endlich das an erster Stelle stehende, auf ϱ bezügliche Summenzeichen über das an zweiter Stelle stehende, auf σ bezügliche Summenzeichen hinüberschiebt und die dadurch vor der Thetafunction auftretende Summe, insofern als deren allgemeines Glied ausser dem Summationsbuchstaben ϱ und den Zahlen α, β als variables Element nur die Grösse σ enthält, zur Abkürzung mit $G[\sigma]$ bezeichnet, die einfachere Gestalt:

$$(\bar{L}') \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sqrt[+]{\frac{-\pi}{n\beta\mathfrak{A}}}\, e^{-\frac{\beta u^2}{n\mathfrak{A}}}\, e^{-\frac{\alpha}{\beta}\varrho^2\pi i + 2gh\pi i}$$

$$\times \sum_{\sigma=0}^{\sigma=n\bar{\beta}-1} G[\sigma]\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\hat{g}+\sigma}{n\beta} \\ ng \end{bmatrix}(v_4)_{b_4}$$

an, wobei:

$$\hat{g} = \tfrac{1}{2}\alpha\beta + \alpha g - \beta h, \quad v_4 = \frac{\beta\pi i}{\mathfrak{A}}u, \quad b_4 = \frac{n\beta\pi^2}{\mathfrak{A}}$$

ist, wenn man:

$$\frac{\alpha}{n}\pi i + \frac{\beta}{n}a = \mathfrak{A}$$

setzt, und wobei $G[\sigma]$ die Gauss'sche Summe:

$$G[\sigma] = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\bar{\beta}-1} e^{-\frac{\alpha}{\beta}\varrho^2\pi i + \frac{2}{\beta}\left(\sigma+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\varrho\pi i}$$

bezeichnet.

4.

Untersuchung der Gauss'schen Summe $G[\sigma]$.

Die soeben eingeführte, von der ganzen Zahl σ abhängige Summe:

$$G[\sigma] = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\bar{\beta}-1} e^{-\frac{\alpha}{\beta}\varrho^2\pi i + \frac{2}{\beta}\left(\sigma+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\varrho\pi i}$$

soll jetzt näher untersucht werden.

Da das allgemeine Glied dieser Summe seinen Werth nicht ändert, wenn man die Grösse ϱ um ein ganzes Vielfaches von β ändert, so erleidet die Summe selbst nur eine Umstellung ihrer Glieder und folglich keine Aenderung ihres Werthes, wenn man im allgemeinen Gliede derselben die Grösse ϱ um irgend eine ganze Zahl ändert. Es besteht daher für jede ganze Zahl ϱ' die Gleichung:

$$G[\sigma] = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\bar{\beta}-1} e^{-\frac{\alpha}{\beta}(\varrho+\varrho')^2\pi i+\frac{2}{\beta}\left(\sigma+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)(\varrho+\varrho')\pi i}$$

$$= e^{-\frac{\alpha}{\beta}\varrho'^2\pi i+\frac{2}{\beta}\left(\sigma+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\varrho'\pi i}$$

$$\times \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\bar{\beta}-1} e^{-\frac{\alpha}{\beta}\varrho^2\pi i+\frac{2}{\beta}\left(\sigma+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\varrho\pi i-2\frac{\alpha\varrho'}{\beta}\varrho\pi i}.$$

Unterwirft man aber die ganze Zahl ϱ' der Bedingung:

(C′) $$\alpha\varrho' \equiv 0 \pmod{\beta},$$

so reducirt sich die auf der rechten Seite dieser Gleichung an letzter Stelle stehende Summe auf die ursprüngliche Summe $G[\sigma]$, und man hat daher für jede ganze Zahl ϱ', welche der Congruenz (C′) genügt, die Gleichung:

$$G[\sigma] = e^{-\frac{\alpha}{\beta}\varrho'^2\pi i+\frac{2}{\beta}\left(\sigma+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\varrho'\pi i} G[\sigma].$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass $G[\sigma]$ immer verschwindet, wenn die auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehende Exponentialgrösse auch nur für *eine* Lösung ϱ' der Congruenz (C′) einen von Eins verschiedenen Werth hat. Bezeichnet man nun den grössten gemeinsamen Theiler von α und β mit $t_{\alpha\beta}$ und setzt:

$$\alpha = t_{\alpha\beta}\alpha', \quad \beta = t_{\alpha\beta}\beta',$$

so ist:

$$\varrho' = \beta'$$

eine Lösung der Congruenz (C′), und es muss daher, wenn $G[\sigma]$ von Null verschieden ist, die Zahl σ nothwendig der Bedingung:

$$e^{-\frac{\alpha}{\beta}\beta'^2\pi i+\frac{2}{\beta}\left(\sigma+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\beta'\pi i} = 1$$

genügen, also:

$$(t_{\alpha\beta}-1)\,\alpha'\beta' + \frac{2\sigma}{t_{\alpha\beta}}$$

eine gerade Zahl sein; nennt man diese $2n$, so folgt:

$$\sigma = nt_{\alpha\beta} - \frac{t_{\alpha\beta}(t_{\alpha\beta}-1)}{2}\alpha'\beta'.$$

Diejenigen Werthe von σ, für welche $G[\sigma]$ von Null verschieden ist, sind also jedenfalls alle in der Form:

$$\sigma = nt_{\alpha\beta} - \frac{t_{\alpha\beta}(t_{\alpha\beta}-1)}{2}\alpha'\beta'$$

enthalten, wo n eine ganze Zahl bezeichnet. Berücksichtigt man noch, dass die Zahlen $\alpha'\beta'$ zu einander relativ prim sind, und dass in Folge

dessen zu jeder ganzen Zahl n zwei ganze Zahlen $\varkappa$, λ so bestimmt werden können, dass:

$$n = \alpha'\varkappa - \beta'\lambda.$$

ist, so kann man das gefundene Resultat auch so aussprechen, dass jede Zahl σ, für welche $G[\sigma]$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, sich mit Hülfe ganzer Zahlen $\varkappa$, λ durch die Zahl:

$$\overset{0}{\sigma} = -\frac{t_{\alpha\beta}(t_{\alpha\beta}-1)}{2}\alpha'\beta'$$

in der Form:

$$\sigma = \overset{0}{\sigma} + \alpha\varkappa - \beta\lambda$$

ausdrücken lässt, und es soll jetzt bewiesen werden, dass auch umgekehrt die Summe $G[\sigma]$ für jede Zahl σ, welche in der Form:

$$\sigma = \overset{0}{\sigma} + \alpha\varkappa - \beta\lambda,$$

bei der $\varkappa$, λ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen, darstellbar ist, einen von Null verschiedenen Werth hat.

Zu dem Ende soll zunächst gezeigt werden, dass jedenfalls *eine* Zahl σ existirt, für welche $G[\sigma]$ nicht verschwindet. Lässt man nämlich in der die Grösse $G[\sigma]$ definirenden Gleichung an Stelle von σ der Reihe nach die Zahlen $0, 1, \ldots, \bar{\beta}-1$ treten und addirt die $\bar{\beta}$ so entstandenen Gleichungen, so erhält man zunächst die Gleichung:

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\bar{\beta}-1} G[\sigma] = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\bar{\beta}-1} e^{-\frac{\alpha}{\bar{\beta}}\varrho^2\pi i + \alpha\varrho\pi i}\left(\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\bar{\beta}-1} e^{\frac{2}{\bar{\beta}}\varrho\sigma\pi i}\right)$$

und hieraus, da auf der rechten Seite dieser Gleichung die in besondere Klammern eingeschlossene Summe nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth $\bar{\beta}$ hat, wenn $\varrho \equiv 0 \pmod{\beta}$, die Summe nach ϱ sich also auf das erste, dem Werthe $\varrho = 0$ entsprechende Glied reducirt, die Gleichung:

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\bar{\beta}-1} G[\sigma] = \bar{\beta}.$$

Diese letzte Gleichung könnte aber nicht bestehen, wenn alle Grössen $G[\sigma]$ den Werth Null besässen, und es existirt daher wenigstens *eine* Zahl σ, für welche $G[\sigma]$ nicht verschwindet.

Man gehe jetzt auf die die Grösse $G[\sigma]$ definirende Gleichung zurück und setze darin:

$$\sigma = \overset{0}{\sigma} + \alpha\varkappa - \beta\lambda;$$

man erhält dann zunächst:

$$G[\overset{0}{\sigma} + \alpha\varkappa - \beta\lambda] = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\bar{\beta}-1} e^{-\frac{\alpha}{\beta}\varrho^2\pi i + \frac{2}{\beta}\left(\overset{0}{\sigma} + \alpha\varkappa - \beta\lambda + \frac{1}{2}\alpha\beta\right)\varrho\pi i}$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\bar{\beta}-1} e^{-\frac{\alpha}{\beta}\varrho^2\pi i + \frac{2}{\beta}\left(\overset{0}{\sigma} + \frac{1}{2}\alpha\beta\right)\varrho\pi i + 2\frac{\alpha}{\beta}\varkappa\varrho\pi i}$$

$$= e^{\frac{\alpha}{\beta}\varkappa^2\pi i + \frac{2}{\beta}\left(\overset{0}{\sigma} + \frac{1}{2}\alpha\beta\right)\varkappa\pi i}$$

$$\times \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\bar{\beta}-1} e^{-\frac{\alpha}{\beta}(\varrho-\varkappa)^2\pi i + \frac{2}{\beta}\left(\overset{0}{\sigma} + \frac{1}{2}\alpha\beta\right)(\varrho-\varkappa)\pi i}.$$

Nun ändert aber nach früher Bemerktem die Summe $G[\sigma]$ ihren Werth nicht, wenn man im allgemeinen Gliede derselben die Grösse ϱ um irgend eine ganze Zahl ändert; in Folge dessen hat die in der letzten Zeile stehende Summe den Werth $G[\overset{0}{\sigma}]$, und man gelangt so zu der Gleichung:

$$G[\overset{0}{\sigma} + \alpha\varkappa - \beta\lambda] = e^{\frac{\alpha}{\beta}\varkappa^2\pi i + \frac{2}{\beta}\left(\overset{0}{\sigma} + \frac{1}{2}\alpha\beta\right)\varkappa\pi i} G[\overset{0}{\sigma}].$$

Diese Gleichung zeigt, dass mit der Summe $G[\overset{0}{\sigma}]$ gleichzeitig auch alle Summen $G[\overset{0}{\sigma} + \alpha\varkappa - \beta\lambda]$, welche ganzen Zahlen auch mit $\varkappa$, λ bezeichnet sein mögen, gleich Null oder von Null verschieden sind. Da nun aber, wie soeben gezeigt wurde, nicht alle Summen $G[\sigma]$ gleich Null sind, die von Null verschiedenen Summen $G[\sigma]$ aber nach Früherem jedenfalls unter den Summen $G[\overset{0}{\sigma} + \alpha\varkappa - \beta\lambda]$ vorkommen, so können nicht alle Summen $G[\overset{0}{\sigma} + \alpha\varkappa - \beta\lambda]$ gleich Null sein, und es ist damit die aufgestellte Behauptung bewiesen, dass $G[\overset{0}{\sigma}]$ und damit gleichzeitig auch alle Summen $G[\overset{0}{\sigma} + \alpha\varkappa - \beta\lambda]$ einen von Null verschiedenen Werth besitzen.

Das Resultat, der bisherigen Untersuchung lässt sich so aussprechen, dass *diejenigen ganzen Zahlen σ, für welche $G[\sigma]$ von Null verschieden ist, identisch sind mit denjenigen ganzen Zahlen σ, welche durch die Gleichung:*

$$\sigma = \overset{0}{\sigma} + \alpha\varkappa - \beta\lambda$$

geliefert werden, wenn man darin unter $\overset{0}{\sigma}$ die Zahl:

$$\overset{0}{\sigma} = -\frac{t_{\alpha\beta}(t_{\alpha\beta}-1)}{2}\alpha'\beta'$$

versteht, für $\varkappa$, λ aber alle möglichen Zahlenpaare setzt.

5.

Die zur Transformation L' gehörige Thetaformel in der endgültigen Gestalt $(\overline{L'})$.

Man gehe jetzt auf die am Schlusse des Art. 3 aufgestellte, der Transformation L' entsprechende Thetaformel $(\overline{L'})$ zurück. Von den $n\bar{\beta}$ Coefficienten $G[\sigma]$, welche auf der rechten Seite dieser Formel bei Ausführung der Summation nach σ auftreten, sind, wie im vorigen Artikel bewiesen wurde, nur diejenigen von Null verschieden, bei denen die zugehörigen ganzen Zahlen σ sich in die Form:

$$\sigma = \overset{0}{\sigma} + \alpha\varkappa - \beta\lambda$$

bringen lassen, wo $\overset{0}{\sigma}$ den am Schlusse des vorigen Artikels angegebenen Werth hat, $\varkappa$, λ aber ganze Zahlen bedeuten. Man kann daher im allgemeinen Gliede der auf der rechten Seite der Formel $(\overline{L'})$ stehenden Summe die Grösse σ durch den soeben dafür aufgestellten Ausdruck ersetzen, da alle Glieder, bei denen die zugehörigen Zahlen σ nicht in diese Form gebracht werden können, in Folge des Verschwindens der zugehörigen Coefficienten $G[\sigma]$ wegfallen, und hat dann in der entstehenden Summe:

$$S = \sum_{\varkappa,\lambda}' G[\overset{0}{\sigma} + \eta]\, \vartheta \begin{bmatrix} \hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta \\ n\beta \\ ng \end{bmatrix} (v_4)_{b_4},$$

in der zur Abkürzung:

$$\alpha\varkappa - \beta\lambda = \eta$$

gesetzt ist, die Summation nach $\varkappa$, λ in der Weise auszuführen, dass an Stelle des Zahlenpaares $\varkappa$, λ nur solche Paare ganzer Zahlen treten, für welche die Grösse $\overset{0}{\sigma} + \eta$ in eine Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots, n\bar{\beta} - 1$ übergeht, und zwar von diesen Zahlenpaaren so viele, als erforderlich sind, damit jede im Rahmen der angegebenen Bedingung mögliche Zahl $\overset{0}{\sigma} + \eta$ einmal aber auch nur einmal auftritt.

Diese Summe S soll jetzt mit der Summe:

$$S' = \sum_{\varkappa,\lambda}^{0,1,\ldots,n\bar{\beta}-1}{}' G[\overset{0}{\sigma} + \eta]\, \vartheta \begin{bmatrix} \hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta \\ n\beta \\ ng \end{bmatrix} (v_4)_{b_4}$$

verglichen werden, zu deren Bildung die rechts angedeutete Summation so auszuführen ist, dass an Stelle des Zahlenpaares $\varkappa$, λ der Reihe nach die sämmtlichen $(n\beta)^2$ Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, n\bar{\beta} - 1$ zur

zweiten Classe mit Wiederholung treten. Zu dem Ende bezeichne man mit s' die Anzahl der Normallösungen der Congruenz:

$$\alpha\varkappa - \beta\lambda \equiv 0 \pmod{n\beta}$$

und ordne die auf der rechten Seite der letzten Gleichung bei Ausführung der Summation auftretenden $(n\beta)^2$ Summanden in $\frac{(n\beta)^2}{s'}$ Gruppen, indem man zu einer Gruppe jedesmal diejenigen Summanden, immer s' an der Zahl, zusammenfasst, für welche sich der Werth der Grösse η nur um ein ganzes Vielfaches von $n\beta$ ändert, wenn man von einem dieser s' Summanden zu einem anderen übergeht. Die s' in einer Gruppe vorkommenden Summanden besitzen dann, wie man unmittelbar sieht, denselben Werth, und man kann daher jede solche Gruppe von Summanden durch das s'-fache eines beliebigen unter ihnen ersetzen. Führt man diese Vereinigung für jede der $\frac{(n\beta)^2}{s'}$ Gruppen aus, so geht die Summe S' in das s'-fache einer neuen Summe S'' von nur $\frac{(n\beta)^2}{s'}$ Summanden über, die wie die Summe S die Eigenschaft hat, dass die in irgend zwei Summanden auftretenden Thetafunctionen incongruente Charakteristiken besitzen, und die daher, da jedem Gliede von S'' ein ihm gleiches von S wie auch umgekehrt entspricht, denselben Werth wie die Summe S besitzt. Daraus folgt sofort weiter, dass der Werth der Summe S' das s'-fache des Werthes der Summe S und daher auch das s'-fache des Werthes der auf der rechten Seite der Formel $(\overline{L'})$ vorkommenden Summe ist.

Multiplicirt man nun in der Formel $(\overline{L'})$ linke und rechte Seite mit s', ersetzt das s'-fache der auf der rechten Seite stehenden Summe durch die Summe S' und drückt gleichzeitig die in S' vorkommende Grösse $G[\overset{0}{\sigma} + \eta]$ mit Hülfe der im vorigen Artikel abgeleiteten Gleichung durch die Grösse $G[\overset{0}{\sigma}]$ aus, so erhält man die der Transformation L' entsprechende Thetaformel in der endgültigen Gestalt:

$$(L') \quad s'\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sqrt[+]{\frac{-\pi}{n\beta\mathfrak{A}}}\, e^{-\frac{\beta u^2}{n\mathfrak{A}}} e^{-\frac{\alpha}{\beta}g^2\pi i + 2gh\pi i}\, G[\overset{0}{\sigma}]$$
$$\times \sum_{\varkappa,\lambda}^{0,1,\cdots,n\beta-1} e^{\frac{\alpha}{\beta}\varkappa^2\pi i + \frac{2}{\beta}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\varkappa\pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta}{n\beta} \\ ng \end{bmatrix}(v_4)_{b_4},$$

wobei zur Abkürzung:

$$\eta = \alpha\varkappa - \beta\lambda$$

gesetzt ist, wobei ferner:

$$\overset{0}{\sigma} = -\frac{t_{\alpha\beta}(t_{\alpha\beta}-1)}{2}\alpha'\beta'$$

ist, wenn mit $t_{\alpha\beta}$ der grösste gemeinsame Theiler der beiden Zahlen α und β bezeichnet und $\alpha = t_{\alpha\beta}\alpha'$, $\beta = t_{\alpha\beta}\beta'$ gesetzt wird, und wobei endlich s' die Anzahl der Normallösungen der Congruenz:

$$\alpha\varkappa - \beta\lambda \equiv 0 \pmod{n\beta}$$

bezeichnet. Beachtet man noch, dass der Ausdruck:

$$\frac{1}{n\bar{\beta}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n\bar{\beta}-1} e^{\frac{2}{n\bar{\beta}}(\alpha\varkappa-\beta\lambda)\nu\pi i}$$

den Werth Eins besitzt, wenn:

$$\alpha\varkappa - \beta\lambda \equiv 0 \pmod{n\beta}$$

ist, dagegen den Werth Null, wenn $\varkappa$, λ dieser Congruenz nicht genügen, so erkennt man, dass die Anzahl s' durch die Gleichung:

$$s' = \sum_{\varkappa,\lambda}^{0,1,\cdots,n\bar{\beta}-1} \left(\frac{1}{n\bar{\beta}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n\bar{\beta}-1} e^{\frac{2}{n\bar{\beta}}(\alpha\varkappa-\beta\lambda)\nu\pi i} \right).$$

bestimmt wird. Aus dieser Gleichung folgt durch Aenderung der Summationsordnung die neue:

$$s' = \frac{1}{n\bar{\beta}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n\bar{\beta}-1} \left\{ \left(\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n\bar{\beta}-1} e^{\frac{2}{n\bar{\beta}}\alpha\nu\varkappa\pi i} \right) \left(\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n\bar{\beta}-1} e^{-\frac{2}{n\bar{\beta}}\beta\nu\lambda\pi i} \right) \right\}.$$

Nun hat aber das allgemeine Glied der auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehenden Summe nach ν nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth $(n\bar{\beta})^2$, wenn ν gleichzeitig den beiden Congruenzen:

$$\alpha\nu \equiv 0 \pmod{n\beta}, \quad \beta\nu \equiv 0 \pmod{n\beta}$$

genügt, und man erhält daher, da diese beiden Congruenzen nur für die $t_{\alpha\beta}$ an Stelle von ν tretenden Werthe:

$$\nu = 0,\ n\beta',\ 2n\beta',\ \ldots,\ (t_{\alpha\beta}-1)n\beta'$$

erfüllt sind, für die Anzahl s' die Bestimmung:

$$s' = \frac{1}{n\bar{\beta}} \cdot t_{\alpha\beta} \cdot (n\bar{\beta})^2 = n\bar{\beta}\, t_{\alpha\beta}.$$

Hinsichtlich der Bedeutung der übrigen in der Formel (L') vorkommenden Abkürzungen ist das Erforderliche am Schlusse des Art. 3 zusammengestellt.

6.

Die zur Transformation L_1 gehörige Thetaformel in einer vorläufigen Gestalt $(\bar{L}_1)$.

Aus der soeben gewonnenen, der Transformation L' entsprechenden Formel (L') und den beiden noch übrigen, im Art. 2 aufgestellten Formeln (5), (6) soll jetzt durch passende Verbindung die der vorgelegten linearen Transformation L_1 entsprechende Thetaformel hergestellt werden. Zu dem Ende betrachte man in der Formel (5) die auf der linken Seite vorkommenden Grössen v_4, b_4 als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Formel (L') stehenden Grössen v_4, b_4 und setze gleichzeitig $g_4 = \frac{1}{n\beta}(\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta)$, $h_4 = ng$; betrachte sodann weiter die auf der linken Seite der Formel (6) vorkommenden Grössen g_5, h_5, v_5, b_5 als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Formel (5) stehenden, durch die soeben gemachten Festsetzungen mitbestimmten Grössen g_5, h_5, v_5, b_5 und ersetze hierauf in der Formel (L'), nach vorhergegangener Multiplication ihrer linken und rechten Seite mit $\bar{\beta}$, die auf der rechten Seite hinter dem Summenzeichen stehende Thetafunction durch den aus der Gleichung (5) dafür sich ergebenden Ausdruck, nachdem man zuvor in dieser letzten Gleichung an Stelle der auf ihrer rechten Seite stehenden Thetafunction den aus der Gleichung (6) dafür sich ergebenden Ausdruck eingeführt hat. Man erhält so die zu der vorgelegten linearen Transformation L_1 gehörige Thetaformel zunächst in der Gestalt:

$$s'\bar{\beta}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sqrt{\frac{-\pi}{n\beta\mathfrak{A}}}\, e^{-\frac{\beta u^2}{n\mathfrak{A}}} e^{-\frac{\alpha}{\beta}\rho^2\pi i + 2\rho h\pi i}\, G[\overset{0}{\sigma}]$$

$$\times \sum_{x,\lambda}^{0,1,\cdots,n\bar{\beta}-1} \sum_{\tau=0}^{\tau=\bar{\beta}-1} e^{\frac{\alpha}{\beta}x^2\pi i + \frac{2}{\beta}\left(\overset{0}{\sigma} + \frac{1}{2}\alpha\beta\right)x\pi i}$$

$$\times e^{\frac{\delta}{n\beta}(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta-n\beta)\pi i - \frac{2}{n\beta}(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)\tau\pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta}{n} \\ \frac{h_5+\tau}{\beta} \end{bmatrix}(\mathfrak{v})_{\mathfrak{b}},$$

wobei:

$$h_5 = ng + \tfrac{1}{2}n\beta\delta - \delta(\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta),$$

$$\mathfrak{v} = \frac{\pi i}{\mathfrak{A}}u, \quad \mathfrak{b} = \frac{n\pi^2}{\beta\mathfrak{A}} + \frac{n\delta}{\beta}\pi i = \frac{\pi i}{\mathfrak{A}}(\gamma\pi i + \delta a)$$

ist, während die übrigen Abkürzungen die früher angegebene Bedeutung haben. Der gewonnenen Thetaformel soll jetzt eine einfachere Gestalt gegeben werden.

Zu dem Ende ersetze man zunächst in dem Ausdrucke:

$$\varphi = \delta(\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta),$$

welcher in der die Grösse h_5 definirenden Gleichung vorkommt, die Grössen $\hat{g}$ und η durch die ihnen entsprechenden Ausdrücke; es wird dann:

$$\begin{aligned}\varphi &= \delta\alpha(g+\varkappa) - \delta\beta(h+\lambda) + \delta\left(\overset{0}{\sigma} + \tfrac{1}{2}\alpha\beta\right)\\ &= n(g+\varkappa) + \beta[\gamma(g+\varkappa) - \delta(h+\lambda)] + \delta\left(\overset{0}{\sigma} + \tfrac{1}{2}\alpha\beta\right)\\ &= ng - \beta(\hat{h} + \eta') + \varrho + \tfrac{1}{2}n\beta\delta,\end{aligned}$$

wenn man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}\hat{h} &= \tfrac{1}{2}\gamma\delta - \gamma g + \delta h, \quad \eta' = -\gamma\varkappa + \delta\lambda,\\ \varrho &= n\varkappa + \tfrac{1}{2}\beta\gamma\delta + \delta\left(\overset{0}{\sigma} + \tfrac{1}{2}\alpha\beta\right) - \tfrac{1}{2}n\beta\delta\end{aligned}$$

setzt. Beachtet man dabei, dass nach dem Modul 2 die Congruenzen:

$$\beta\gamma\delta + \delta\alpha\beta \equiv \beta^2\gamma\delta + \delta^2\alpha\beta \equiv \beta\delta(\alpha\delta + \beta\gamma) \equiv n\beta\delta$$

bestehen, und dass in Folge dieser Congruenzen die Grösse:

$$\beta\gamma\delta + \delta\alpha\beta - n\beta\delta$$

eine gerade Zahl ist, so erkennt man, dass die Grösse ϱ, da die bei ihr auftretenden Grössen $\overset{0}{\sigma}$, $\varkappa$ ganzzahlige Werthe besitzen, stets eine ganze Zahl ist. Führt man den soeben für φ erhaltenen Ausdruck in die Gleichung, welche h_5 definirt, ein, so wird:

$$(h_5) \qquad h_5 = \beta(\hat{h} + \eta') - \varrho.$$

Es ist jetzt weiter der Exponent:

$$\begin{aligned}\psi = {} & \frac{\alpha}{\beta}\varkappa^2\pi i + \frac{2}{\beta}\left(\overset{0}{\sigma} + \tfrac{1}{2}\alpha\beta\right)\varkappa\pi i\\ & + \frac{\delta}{n\beta}(\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta)(\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta - n\beta)\pi i - \frac{2}{n\beta}(\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta)\tau\pi i,\end{aligned}$$

welcher beim allgemeinen Gliede der auf der rechten Seite der gewonnenen Thetaformel stehenden Summe vorkommt, umzuformen. In Folge der die Grösse φ definirenden Gleichung ist:

$$\frac{\delta}{n\beta}(\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta)^2 = \frac{1}{n\beta}\varphi(\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta),$$

und hieraus erhält man, indem man φ durch den oben dafür gewonnenen Ausdruck ersetzt:

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{n\beta}(\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta)^2 = {} & \frac{1}{\beta}g(\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta) - \frac{1}{n}(\hat{h} + \eta')(\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta)\\ & + \frac{1}{n\beta}\varrho(\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta) + \frac{1}{2}\delta(\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta),\end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann man den in Rede stehenden Exponenten ψ zunächst in die Form:

$$\begin{aligned}\psi = &\frac{\alpha}{\beta}\varkappa^2\pi i + \frac{2}{\beta}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\varkappa\pi i + \frac{1}{\beta}g(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)\pi i\\ &-\frac{1}{n}(\hat{h}+\eta')(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)\pi i - \frac{1}{n\beta}\varrho(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)\pi i\\ &-\frac{1}{2}\delta(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)\pi i - \frac{2}{n\beta}(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)(\tau-\varrho)\pi i\end{aligned}$$

bringen, und es soll ihm auf Grund dieser Gleichung die endgültige Gestalt gegeben werden. Zu dem Ende beachte man, dass die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta}g(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta) = &\ \frac{\alpha}{\beta}g(g+\varkappa) - g(h+\lambda) + \frac{1}{\beta}g\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right),\\ -\frac{1}{n}(\hat{h}+\eta')(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta) = &-\frac{1}{n}(\hat{g}\hat{h}+\eta\eta'+\overset{0}{\sigma}\hat{h}+\overset{0}{\sigma}\eta'+2\hat{g}\eta')\\ &+\frac{1}{n}(\hat{g}\eta'-\hat{h}\eta),\\ \frac{1}{n}(\hat{g}\eta'-\hat{h}\eta) = &\ g\lambda - h\varkappa + \frac{1}{2n}(\alpha\beta\eta'-\gamma\delta\eta),\\ -\frac{1}{n\beta}\varrho(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta) = &-\frac{1}{\beta}\varkappa(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta) - \frac{1}{2n}\gamma\delta(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)\\ &-\frac{\delta}{n\beta}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)\\ &+\frac{1}{2}\delta(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta),\\ -\frac{1}{\beta}\varkappa(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta) = &-\frac{\alpha}{\beta}\varkappa(g+\varkappa) + \varkappa(h+\lambda)\\ &-\frac{1}{\beta}\varkappa\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right),\\ -\frac{\delta}{n\beta}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta) = &-\frac{1}{\beta}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)(g+\varkappa)\\ &+\frac{1}{n}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)(\hat{h}+\eta')\\ &-\frac{1}{2n}\gamma\delta\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right) - \frac{\delta}{n\beta}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)^2\end{aligned}$$

bestehen, deren Richtigkeit unmittelbar ersichtlich ist. Addirt man nun diese sechs Gleichungen, nachdem man jede derselben links und rechts mit πi multiplicirt hat, zu der letzten für ψ gewonnenen Gleichung und zerstört in der so entstandenen Gleichung die der linken und rechten Seite gemeinsamen Glieder, so bleibt auf der linken Seite nur die Grösse ψ übrig, und man erhält, wenn man die auf der rechten Seite übrig bleibenden Glieder in passender Weise vereinigt, für die Grösse ψ schliesslich den Ausdruck:

$$(\psi)\quad \psi = -\frac{\delta}{n\beta}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)^2\pi i - \frac{1}{n}\gamma\delta\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\pi i$$
$$+\frac{\alpha}{\beta}g^2\pi i - gh\pi i - \frac{1}{n}\left(\hat{g}-\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\left(\hat{h}+\frac{1}{2}\gamma\delta\right)\pi i$$
$$-\frac{1}{n}\eta\eta'\pi i + \varkappa\lambda\pi i + \frac{1}{n}(\alpha\beta\eta' - \gamma\delta\eta)\pi i - \frac{2}{n}\hat{g}\eta'\pi i$$
$$-\frac{2}{n\beta}(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)(\tau-\varrho)\pi i.$$

Man gehe jetzt auf die letzte Thetaformel zurück, führe darin an Stelle der in der Charakteristik vorkommenden Grösse h_5 den oben unter (h_5) und an Stelle des mit ψ bezeichneten Exponenten den soeben unter (ψ) aufgestellten Ausdruck ein, indem man zugleich den von den Summationsbuchstaben $\varkappa$, λ, τ unabhängigen Theil der Exponentialgrösse e^{ψ} vor die Summenzeichen schiebt, und ersetze weiter, indem man beachtet, dass die auf der rechten Seite dieser Formel stehende Summe nur eine Umstellung ihrer Glieder und folglich keine Aenderung ihres Werthes erfährt, wenn man die Grösse τ um irgend eine ganze Zahl ändert, τ durch $\tau+\varrho$. Die letzte Thetaformel nimmt dann, wenn man schliesslich noch die Grösse η' mittelst der Formel:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta}{n}\\ \hat{h}+\eta'+\dfrac{\tau}{\beta}\end{bmatrix}(v)_b = e^{\frac{2}{n}(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)\eta'\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta}{n}\\ \hat{h}+\dfrac{\tau}{\beta}\end{bmatrix}(v)_b$$

aus der Charakteristik der Thetafunction herausschafft, die Gestalt:

$$(\bar{L}_1)\quad s'\bar{\beta}\,\vartheta\begin{bmatrix}g\\ h\end{bmatrix}(u)_a = \sqrt{\frac{-\pi}{n\beta\mathfrak{A}}}\,e^{-\frac{\beta u^2}{n\mathfrak{A}}}e^{\psi(g,h)}e^{\varphi(\overset{0}{\sigma})}G[\overset{0}{\sigma}]$$
$$+\sum_{\varkappa,\lambda=0,1,\cdots,n\bar{\beta}-1}\ \sum_{\tau=0}^{\bar{\beta}-1} e^{\frac{1}{n}\eta\eta'\pi i+\varkappa\lambda\pi i-\frac{1}{n}\gamma\delta\,\eta\pi i+\frac{2}{n}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\eta'\pi i}$$
$$\times e^{-\frac{2}{n\beta}(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)\tau\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta}{n}\\ \hat{h}+\dfrac{\tau}{\beta}\end{bmatrix}(v)_b$$

an, wobei:

$$\eta = \alpha\varkappa - \beta\lambda, \qquad \eta' = -\gamma\varkappa + \delta\lambda,$$
$$\hat{g} = \tfrac{1}{2}\alpha\beta + \alpha g - \beta h, \qquad \hat{h} = \tfrac{1}{2}\gamma\delta - \gamma g + \delta h,$$
$$\psi(g,h) = gh\pi i - \frac{1}{n}\left(\hat{g}-\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\left(\hat{h}+\frac{1}{2}\gamma\delta\right)\pi i$$
$$= \frac{1}{n}(\alpha\gamma g^2 - 2\beta\gamma gh + \beta\delta h^2 - \alpha\gamma\delta g + \beta\gamma\delta h)\pi i,$$

$$\varphi(\overset{0}{\sigma}) = -\frac{\delta}{n\beta}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)^2\pi i - \frac{1}{n}\gamma\delta\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\pi i$$

ist, während bezüglich der übrigen Abkürzungen auf das am Ende der Art. 3 und 5 Bemerkte verwiesen werden mag.

7.

Die zur Transformation L_1 gehörige Thetaformel in der endgültigen Gestalt (L_1).

Die auf der rechten Seite der Formel $(\overline{L}_1)$ stehende Summe:

$$\mathfrak{S} = \sum_{\varkappa,\lambda}^{0,1,\ldots,n\overline{\beta}-1} \sum_{\tau=0}^{\tau=\overline{\gamma}-1} e^{\frac{1}{n}\eta\eta'\pi i + \varkappa\lambda\pi i - \frac{1}{n}\gamma\delta\eta\pi i + \frac{2}{n}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\eta'\pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{n\beta}(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)\tau\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta}{n}\\ \hat{h}+\dfrac{\tau}{\beta}\end{bmatrix}(v)_b$$

enthält Gruppen von Summanden, die zusammengenommen die Summe Null besitzen, und kann daher durch Ausscheidung dieser Summanden in eine einfachere Form gebracht werden. Die jetzt folgende Untersuchung hat den Zweck diese Ausscheidung durchzuführen.

Man ersetze im allgemeinen Gliede der Summe $\mathfrak{S}$ $\varkappa$ durch $\varkappa + \delta\nu$, λ durch $\lambda + \gamma\nu$, indem man unter ν eine ganze Zahl versteht. Dadurch erleidet einerseits die Summe $\mathfrak{S}$ keine Werthänderung, da dieselbe nur eine Umstellung ihrer Glieder erfährt, wenn man in ihrem allgemeinen Gliede die Grössen $\varkappa$, λ um irgend welche ganze Zahlen ändert; andererseits erlangt aber das allgemeine Glied der Summe $\mathfrak{S}$, da die Charakteristik der in demselben vorkommenden Thetafunction in:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta}{n}+\nu\\ \hat{h}+\dfrac{\tau}{\beta}\end{bmatrix}$$

übergeht, diese Thetafunction selbst also ungeändert bleibt, einen Factor, der mit dem Factor:

$$e^{-\frac{2}{\beta}\nu\tau\pi i},$$

welchen die vor der Thetafunction stehende Exponentialgrösse bei der genannten Aenderung der Grössen $\varkappa$, λ ausscheidet, identisch ist. Man hat daher für $\mathfrak{S}$ den neuen Ausdruck:

$$\mathfrak{S} = \sum_{\varkappa,\lambda}^{0,1,\cdots n\bar{\beta}-1} \sum_{\tau=0}^{\tau=\bar{\beta}-1} e^{\frac{1}{n}\eta\eta'\pi i + \varkappa\lambda\pi i - \frac{1}{n}\gamma\delta\eta\pi i + \frac{2}{n}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\eta'\pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{n\beta}\left(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta\right)\tau\pi i - \frac{2}{\beta}\nu\tau\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta}{n}\\ \hat{h}+\dfrac{\tau}{\beta}\end{bmatrix}(v)_b,$$

der für jeden Werth der ganzen Zahl ν gültig ist. Lässt man in dieser Gleichung an Stelle von ν der Reihe nach die Zahlen $0, 1, \ldots, \bar{\beta}-1$ treten und addirt die $\bar{\beta}$ so entstehenden Gleichungen zu einander, so erhält man auf der linken Seite $\bar{\beta}\mathfrak{S}$, auf der rechten Seite dagegen fallen, da:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\bar{\beta}-1} e^{-\frac{2}{\beta}\nu\tau\pi i}$$

nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth $\bar{\beta}$ besitzt, wenn τ durch β ohne Rest theilbar ist, bei der Summe nach τ alle Summanden heraus mit Ausnahme des ersten, dem Werthe $\tau = 0$ entsprechenden, und man erhält so, wenn man schliesslich noch links und rechts durch $\bar{\beta}$ theilt, die Gleichung:

$$\mathfrak{S} = \sum_{\varkappa,\lambda}^{0,1,\cdots,n\bar{\beta}-1} e^{\frac{1}{n}\eta\eta'\pi i + \varkappa\lambda\pi i - \frac{1}{n}\gamma\delta\eta\pi i}$$

$$\times e^{\frac{2}{n}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\eta'\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta}{n}\\ \hat{h}\end{bmatrix}(v)_b.$$

In dieser Gleichung ist die verlangte Ausscheidung der in der ursprünglichen Summe $\mathfrak{S}$ sich gegenseitig aufhebenden Summanden vollzogen; man wird aber noch bemerken, dass nunmehr das allgemeine Glied der Summe $\mathfrak{S}$ seinen Werth nicht ändert, wenn man die Grössen $\varkappa$, λ um ganze Vielfache von n ändert, und dass in Folge dessen die Summe $\mathfrak{S}$ das β^2-fache jener Summe ist, die aus der zuletzt angeschriebenen dadurch hervorgeht, dass man $\varkappa$ und λ nur die Reihe der Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ durchlaufen lässt. Führt man aber diese zuletzt genannte Summe in die am Ende des vorhergehenden Artikels stehende Formel $(\overline{L}_1)$ ein, nachdem man deren linke und rechte Seite durch β^2 getheilt hat, und setzt zur Abkürzung:

$$\frac{s'}{\bar{\beta}} = nt_\beta = s,$$

so erhält man endlich die der linearen Transformation:

$$L_1 = \left| \begin{array}{c|c} \frac{\alpha}{n} & \frac{\beta}{n} \\ \hline \gamma & \delta \end{array} \right|,$$

bei der:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = n$$

und:

$$\beta \gtrless 0$$

ist, entsprechende Thetaformel in der endgültigen Gestalt:

$$(L_1) \qquad \begin{aligned} s\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = {} & \sqrt{\frac{-\pi}{n\beta\mathfrak{A}}}\, e^{-\frac{\beta u^2}{n\mathfrak{A}}} e^{\psi(g,h)} e^{\varphi\left(\overset{0}{\sigma}\right)} G\left[\overset{0}{\sigma}\right] \\ & \times \sum_{\varkappa,\lambda}^{0,1,\cdots,n-1} e^{\frac{1}{n}\eta\eta'\pi i + \varkappa\lambda\pi i - \frac{1}{n}\gamma\delta\eta\pi i} \\ & \times e^{\frac{2}{n}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\eta'\pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta}{n} \\ \hat{h} \end{bmatrix}(\mathfrak{v})_{\mathfrak{b}}. \end{aligned}$$

In dieser Formel ist zunächst:

$$\mathfrak{A} = \frac{\alpha}{n}\pi i + \frac{\beta}{n}a, \qquad \mathfrak{B} = \gamma\pi i + \delta a,$$
$$\mathfrak{v} = \frac{\pi i}{\mathfrak{A}}u, \qquad \mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\pi i;$$

es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\eta = \alpha\varkappa - \beta\lambda, \qquad \eta' = -\gamma\varkappa + \delta\lambda,$$
$$\hat{g} = \tfrac{1}{2}\alpha\beta + \alpha g - \beta h, \qquad \hat{h} = \tfrac{1}{2}\gamma\delta - \gamma g + \delta h,$$

$$\psi(g,h) = \frac{1}{n}(\alpha\gamma g^2 - 2\beta\gamma gh + \beta\delta h^2 - \alpha\gamma\delta g + \beta\gamma\delta h)\pi i,$$

$$\varphi\left(\overset{0}{\sigma}\right) = -\frac{\delta}{n\beta}\left(\overset{0}{\sigma}+\tfrac{1}{2}\alpha\beta\right)^2\pi i - \frac{1}{n}\gamma\delta\left(\overset{0}{\sigma}+\tfrac{1}{2}\alpha\beta\right)\pi i,$$

$$G\left[\overset{0}{\sigma}\right] = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\beta-1} e^{-\frac{\alpha}{\beta}\varrho^2\pi i + \frac{2}{\beta}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\varrho\pi i},$$

wobei:

$$\overset{0}{\sigma} = -\frac{t_{\alpha\beta}(t_{\alpha\beta}-1)}{2}\alpha'\beta'$$

ist, wenn man mit $t_{\alpha\beta}$ den grössten gemeinsamen Theiler der Zahlen α und β bezeichnet und $\alpha = t_{\alpha\beta}\alpha'$, $\beta = t_{\alpha\beta}\beta'$ setzt; es ist endlich:

$$s = n t_{\alpha\beta};$$

bedient man sich der am Ende des Art. 5 angewandten Schlussweise,

so findet man sofort, dass diese Zahl s mit der Anzahl der Normallösungen der Congruenz:

$$\alpha\varkappa - \beta\lambda \equiv 0 \pmod{n}$$

übereinstimmt.

8.

Die der ganzzahligen linearen Transformation entsprechende Thetaformel.

Setzt man in der Formel (L_1) $n = 1$, so erhält man aus ihr die bekannte, der ganzzahligen linearen Transformation:

$$L_1^{(1)} = \left| \begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \delta \end{array} \right|,$$

bei der:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

und:

$$\beta \gtrless 0$$

ist, entsprechende Thetaformel in der Gestalt;

$$(L_1^{(1)}) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sqrt{\frac{-\pi}{\beta \mathsf{A}}}\, e^{-\frac{\beta u^2}{\mathsf{A}}} e^{\psi(g,h)} e^{\varphi}\, G\, \vartheta\begin{bmatrix} \mathring{g} \\ \mathring{h} \end{bmatrix}(v)_b.$$

In dieser Formel ist zunächst:

$$\mathsf{A} = \alpha\pi i + \beta a, \qquad \mathsf{B} = \gamma\pi i + \delta a,$$
$$v = \frac{\pi i}{\mathsf{A}} u, \qquad b = \frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}} \pi i;$$

es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\mathring{g} = \tfrac{1}{2}\alpha\beta + \alpha g - \beta h,$$

$$\mathring{h} = \tfrac{1}{2}\gamma\delta - \gamma g + \delta h,$$

$$\psi(g,h) = (\alpha\gamma g^2 - 2\beta\gamma gh + \beta\delta h^2 - \alpha\gamma\delta g + \beta\gamma\delta h)\pi i,$$

$$\varphi = -\tfrac{1}{4}\alpha^2\beta\delta\pi i - \tfrac{1}{2}\alpha\beta\gamma\delta\pi i,$$

$$G = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\beta-1} e^{-\frac{\alpha}{\beta}\varrho^2\pi i + \alpha\varrho\pi i}.$$

Zweiter Abschnitt.

Aufstellung der zur linearen Transformation L_2 gehörigen Thetaformel.

1.

Zusammensetzung der Transformation L_2 aus elementaren.

Da bei der Transformation:

$$L_2 = \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{n} & 0 \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

die Zahlen α, δ und n der früheren Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = n$ entsprechend durch die Gleichung:

$$\alpha\delta = n$$

mit einander verknüpft sind, und in Folge dessen auch α und δ stets von Null verschiedene Werthe haben, so lässt sich diese Transformation entsprechend dem im dritten Abschnitte der ersten Abhandlung gewonnenen Resultate in der Form:

$$L_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma\delta & 1 \end{vmatrix}$$

aus zwei elementaren linearen Transformationen zusammensetzen.

Die nächste Aufgabe ist, die diesen beiden elementaren linearen Transformationen entsprechenden Thetaformeln aufzustellen.

2.

Die den beiden in Art. 1 erhaltenen elementaren linearen Transformationen entsprechenden Thetaformeln.

Es entspricht zunächst der elementaren Transformation:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & \delta \end{vmatrix},$$

die aus der Formel (I)*) für $p = 1$, $q = \delta$ unmittelbar hervorgehende Thetaformel:

*) Bd. 43, pag. 427.

$$(1) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\delta-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{g+\varkappa}{\delta} \\ \delta h \end{bmatrix}(v')_{b'},$$

bei der:

$$v' = \delta u, \qquad b' = \delta^2 a.$$

Der elementaren Transformation:

$$\left|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \gamma\delta & 1 \end{array}\right|$$

entspricht dagegen die aus der Formel (II)*) für $l = \gamma\delta$ bei passender Wahl der Bezeichnung hervorgehende Thetaformel:

$$(2) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(v')_{b'} = e^{\gamma\delta g'(g'-1)\pi i}\vartheta\begin{bmatrix} g'' \\ h'' \end{bmatrix}(\mathfrak{v})_{\mathfrak{b}},$$

bei der:

$$g'' = g', \quad h'' = h' + \tfrac{1}{2}\gamma\delta - \gamma\delta g', \quad \mathfrak{v} = v', \quad \mathfrak{b} = b' + \gamma\delta\pi i.$$

3.

Die zur Transformation L_2 gehörige Thetaformel (L_2).

Bei jeder der beiden Formeln (1), (2) ist die auf der linken Seite stehende Thetafunction zunächst eine beliebige; für die beabsichtigte Zusammensetzung aber hat man in der Gleichung (2) die auf der linken Seite vorkommenden Grössen v', b' als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Formel (1) stehenden Grössen v', b' anzusehen und zugleich $g' = \frac{1}{\delta}(g+\varkappa)$, $h' = \delta h$ zu setzen. Es wird dann die auf der linken Seite der Gleichung (2) stehende Thetafunction mit der auf der rechten Seite der Gleichung (1) als allgemeines Glied der Summe vorkommenden identisch, und man erhält, indem man diese letztere durch den aus der Gleichung (2) dafür sich ergebenden Ausdruck ersetzt, die zu der Transformation L_2 gehörige Thetaformel zunächst in der Gestalt:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\delta-1} e^{\frac{\gamma}{\delta}(g+\varkappa)^2\pi i - \gamma(g+\varkappa)\pi i}\vartheta\begin{bmatrix} \frac{g+\varkappa}{\delta} \\ h'' \end{bmatrix}(\mathfrak{v})_{\mathfrak{b}}$$

wobei:

$$h'' = \delta h + \tfrac{1}{2}\gamma\delta - \gamma(g+\varkappa), \quad \mathfrak{v} = \delta u, \quad \mathfrak{b} = \delta^2 a + \gamma\delta\pi i$$

ist, und weiter, indem man:

$$\tfrac{1}{2}\gamma\delta - \gamma g + \delta h = \mathfrak{h}$$

*) Bd. 43, pag. 429.

setzt, beachtet, dass:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{g+\varkappa}{\delta} \\ \hat{h}-\gamma\varkappa \end{bmatrix}(v)_b = e^{-\frac{2}{\delta}(g+\varkappa)\gamma\varkappa\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{g+\varkappa}{\delta} \\ \hat{h} \end{bmatrix}(v)_b$$

ist, und die von dem Summationsbuchstaben $\varkappa$ freien Theile der auf der rechten Seite stehenden Exponentialgrösse vor das Summenzeichen schiebt, in der einfacheren Form:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ \hat{h} \end{bmatrix}(u)_a = e^{\frac{\gamma}{\delta}g^2\pi i-\gamma g\pi i} \times\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\bar{\delta}-1} e^{-\frac{\gamma}{\delta}\varkappa^2\pi i-\gamma\varkappa\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{g+\varkappa}{\delta} \\ \hat{h} \end{bmatrix}(v)_b.$$

Der gewonnenen Formel soll eine etwas andere Gestalt gegeben werden.

Zu dem Ende beachte man, dass das allgemeine Glied der auf der rechten Seite der letzten Formel stehenden Summe seinen Werth nicht ändert, wenn man darin die Grösse $\varkappa$ um ganze Vielfache von δ ändert. Die genannte Formel bleibt daher, da $n = \alpha\delta = \bar{\alpha}\bar{\delta}$ ist, richtig, wenn man auf ihrer rechten Seite nach $\varkappa$ von 0 bis $n-1$ summirt und die linke Seite gleichzeitig mit $\bar{\alpha}$ multiplicirt. Setzt man dann weiter auf Grund der Gleichung $\alpha\delta = n$ in der Charakteristik der Thetafunction:

$$\frac{g+\varkappa}{\delta} = \frac{\alpha(g+\varkappa)}{n}$$

und in den Exponenten der Exponentialgrössen:

$$\frac{\gamma}{\delta}g^2 = \frac{1}{n}\alpha\gamma g^2, \qquad \frac{\gamma}{\delta}\varkappa^2 = \frac{1}{n}\alpha\gamma\varkappa^2,$$

so erhält man die der Transformation:

$$L_2 = \left|\begin{array}{c|c} \frac{\alpha}{n} & 0 \\ \hline \gamma & \delta \end{array}\right|,$$

bei der:

$$\alpha\delta = n$$

ist, entsprechende Thetaformel in der endgültigen Gestalt:

$$(L_2)\qquad \bar{\alpha}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ \hat{h} \end{bmatrix}(u)_a = e^{\frac{1}{n}\alpha\gamma g^2\pi i-\gamma g\pi i} \times\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} e^{-\frac{1}{n}\alpha\gamma\varkappa^2\pi i-\gamma\varkappa\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{\alpha(g+\varkappa)}{n} \\ \hat{h} \end{bmatrix}(v)_b,$$

bei der:

$$\hat{h} = \tfrac{1}{2}\gamma\delta - \gamma g + \delta h, \quad \mathfrak{v} = \delta u, \quad \mathfrak{b} = \delta(\gamma\pi i + \delta a)$$

ist.

Setzt man in der Formel (L_2) $n = \alpha = \delta = 1$, so geht dieselbe in die der elementaren linearen Transformation:

$$L_2^{(1)} = \left|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \gamma & 1 \end{array}\right|$$

entsprechende Thetaformel:

$$(L_2^{(1)}) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = e^{\gamma g(g-1)\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h' \end{bmatrix}(u)_b$$

über, bei der:

$$h' = h + \tfrac{1}{2}\gamma - \gamma g, \qquad b = a + \gamma\pi i.$$

4.

Allgemeine der linearen Transformation L entsprechende Thetaformel (L).

Die beiden Formeln (L_1), (L_2) kann man zu folgendem Endresultate zusammenfassen.

Der linearen Transformation:

$$L = \left|\begin{array}{c|c} \frac{\alpha}{n} & \frac{\beta}{n} \\ \hline \gamma & \delta \end{array}\right|,$$

bei der:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = n$$

ist, entspricht die Thetaformel:

$$(L) \qquad s\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sqrt{\frac{-\pi i^{\varrho}}{n\beta\mathfrak{A}}}\; e^{-\frac{\beta u^2}{n\mathfrak{A}}}\, e^{\psi(g,h)}\, e^{\widetilde{\varphi}\binom{0}{\sigma}}\, \widetilde{G}\begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \end{bmatrix}$$

$$\times \sum_{\varkappa,\lambda}^{0,1,\cdots,n-1} e^{\frac{1}{n}\eta\eta'\pi i + \varkappa\lambda\pi i - \frac{1}{n}\gamma\delta\eta\,\pi i + \frac{2}{n}\left(\sigma + \frac{1}{2}\alpha\beta\right)\eta'\pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta}{n} \\ \hat{h} \end{bmatrix}(\mathfrak{v})_{\mathfrak{b}}.$$

In dieser Formel ist zunächst:

$$\mathfrak{A} = \frac{\alpha}{n}\pi i + \frac{\beta}{n}a, \qquad \mathfrak{B} = \gamma\pi i + \delta a,$$

$$\mathfrak{v} = \frac{\pi i}{\mathfrak{A}}u, \qquad \mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\pi i;$$

es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\eta = \alpha\varkappa - \beta\lambda, \qquad \eta' = -\gamma\varkappa + \delta\lambda,$$
$$\mathring{g} = \tfrac{1}{2}\alpha\beta + \alpha g - \beta h, \qquad \mathring{h} = \tfrac{1}{2}\gamma\delta - \gamma g + \delta h,$$

$$\psi(g, h) = \frac{1}{n}(\alpha\gamma g^2 - 2\beta\gamma gh + \beta\delta h^2 - \alpha\gamma\delta g + \beta\gamma\delta h)\pi i;$$

es besitzt weiter die Zahl s den Werth:

$$s = nt_{\alpha\beta},$$

wenn $t_{\alpha\beta}$ den grössten gemeinsamen Theiler der Zahlen $\alpha = t_{\alpha\beta}\alpha'$ und $\beta = t_{\alpha\beta}\beta'$ bezeichnet, und stimmt mit der Anzahl der Normallösungen der Congruenz;

$$(C) \qquad \alpha\varkappa - \beta\lambda \equiv 0 \pmod{n}$$

überein; es ist weiter:

$$\widetilde{\varphi}(\overset{0}{\sigma}) = -\frac{\delta}{n\widetilde{\beta}}\left(\overset{0}{\sigma} + \tfrac{1}{2}\alpha\beta\right)^2\pi i - \frac{1}{n}\gamma\delta\left(\overset{0}{\sigma} + \tfrac{1}{2}\alpha\beta\right)\pi i,$$

$$\widetilde{G}[\overset{0}{\sigma}] = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\widetilde{\beta}-1} e^{-\frac{\widetilde{\alpha}}{\widetilde{\beta}}\varrho^2\pi i + \frac{2}{\widetilde{\beta}}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\varrho\pi i},$$

wobei:

$$\overset{0}{\sigma} = \frac{t_{\alpha\beta}(t_{\alpha\beta}-1)}{2}\alpha'\beta'$$

ist; es ist endlich bezüglich der Bedeutung des unter dem Wurzelzeichen vorkommenden Buchstabens ϱ und der Buchstaben $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ das Folgende zu bemerken:

1) *Ist $\beta \gtrless 0$, so ist $\varrho = 0$ und $\widetilde{\alpha} = \alpha$, $\widetilde{\beta} = \beta$ zu setzen;* es geht dann die Formel (L) unmittelbar in die Formel (L_1) über.

2) *Ist $\beta = 0$, so ist $\varrho = 1$ und $\widetilde{\alpha} = 0$, $\widetilde{\beta} = -\alpha$ zu setzen;* es geht dann, da wegen $\beta = \beta' = 0$ auch $\overset{0}{\sigma} = 0$ und folglich:

$$\widetilde{\varphi}(\overset{0}{\sigma}) = 0, \quad \widetilde{G}[\overset{0}{\sigma}] = \bar{\alpha}$$

ist, die Formel (L) in die Formel (L_2) über.

Die auf der rechten Seite der Formel (L) bei Ausführung der Summation auftretenden n^2 Summanden können in $\frac{n^2}{s} = \frac{n}{t_{\alpha\beta}}$ Gruppen geordnet werden, indem man zu einer Gruppe jedesmal diejenigen Summanden, immer s an der Zahl, zusammenfasst, für welche sich der Werth der Grösse η nur um ein ganzes Vielfaches von n ändert, wenn man von einem dieser s Summanden zu einem anderen übergeht. Man sieht dann leicht, dass die s in einer Gruppe vorkommenden Summanden denselben Werth besitzen, und kann daher in obiger Summe jede solche Gruppe von Summanden durch das s-fache eines beliebigen

unter ihnen ersetzen. Führt man diese Vereinigung für jede der $\frac{n}{t_{\alpha\beta}}$ Gruppen aus, so geht die rechte Seite der Formel (L) in das s-fache einer Summe von $\frac{n}{t_{\alpha\beta}}$ Summanden über, die alle von einander wesentlich verschieden sind, insofern als bei keinen zwei unter ihnen die Thetafunctionen congruente Charakteristiken besitzen. Man erkennt ferner ohne Mühe, dass man solche $\frac{n}{t_{\alpha\beta}}$ wesentlich verschiedene Summanden und jeden von ihnen nur einmal aus dem allgemeinen Gliede der auf der rechten Seite der Formel (L) stehenden Summe erhält, wenn man darin $\varkappa$ die Reihe der Zahlen $0, 1, \ldots, \mathfrak{n}_1 - 1$ und jedesmal dazu λ die Reihe der Zahlen $0, 1, \ldots, \mathfrak{n}_2 - 1$ durchlaufen lässt, wo $\mathfrak{n}_1 = \frac{n}{t_{\alpha n}}$, $\mathfrak{n}_2 = \frac{t_{\alpha n}}{t_{\alpha\beta}}$ ist, wenn mit $t_{\alpha\beta}$, wie früher, der grösste gemeinsame Theiler von α und β und entsprechend mit $t_{\alpha n}$ der grösste gemeinsame Theiler von α und n bezeichnet wird. Die Formel (L) bleibt daher richtig, wenn man bei ihr auf der rechten Seite nach $\varkappa$ von 0 bis $\mathfrak{n}_1 - 1$, nach λ von 0 bis $\mathfrak{n}_2 - 1$ summirt, auf der linken Seite aber gleichzeitig den Factor s unterdrückt.

Dritter Abschnitt.

Aufstellung der der ganzzahligen zur Zahl n gehörigen Transformation T entsprechenden Thetaformel.

1.

Die der ganzzahligen zur Zahl n gehörigen Transformation T entsprechende Thetaformel in einer vorläufigen Gestalt $(\overline{T})$.

Um die der ganzzahligen zur Zahl n gehörigen Transformation:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \delta \end{array}\right|,$$

bei der:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = n$$

ist, entsprechende Thetaformel zu erhalten, hat man, da:

$$\left|\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \delta \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \frac{\alpha}{n} & \frac{\beta}{n} \\ \hline \gamma & \delta \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} n & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right|$$

ist, die der linearen Transformation:

$$L = \left| \begin{array}{c|c} \frac{\alpha}{n} & \frac{\beta}{n} \\ \hline \gamma & \delta \end{array} \right|$$

entsprechende, im vorhergehenden Artikel aufgestellte Formel (L) mit der im vierten Abschnitte der ersten Abhandlung gewonnenen, zur zweiten nicht linearen Haupttransformation:

$$N_2 = \left| \begin{array}{c|c} n & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right|$$

gehörigen Formel (N_2) zusammenzusetzen. Dieser letzteren Formel kann man aber bei passender Wahl der Bezeichnung die Gestalt:

$$(N_2) \qquad n C_\mu \vartheta \begin{bmatrix} \mathfrak{g} \\ \mathfrak{h} \end{bmatrix} (\mathfrak{v})_{\mathfrak{b}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} e^{-2\mathfrak{g}\nu\pi i} \Theta \begin{bmatrix} \mathfrak{g} + \frac{\mu}{n} \\ \frac{\mathfrak{h}+\nu}{n} \end{bmatrix} (v)_b$$

geben, wenn man zur Abkürzung:

$$\Theta \begin{bmatrix} \mathfrak{g} + \frac{\mu}{n} \\ \frac{\mathfrak{h}+\nu}{n} \end{bmatrix} (v)_b = \vartheta \begin{bmatrix} \mathfrak{g} + \frac{\mu}{n} + g_1 \\ \frac{\mathfrak{h}+\nu}{n} + h_1 \end{bmatrix} (v)_b \cdots \vartheta \begin{bmatrix} \mathfrak{g} + \frac{\mu}{n} + g_n \\ \frac{\mathfrak{h}+\nu}{n} + h_n \end{bmatrix} (v)_b$$

setzt; und es ist dabei:

$$v = \frac{\mathfrak{v}}{n}, \qquad b = \frac{\mathfrak{b}}{n};$$

es bezeichnen ferner μ eine willkürlich wählbare ganze Zahl, $g_1, \ldots, g_n$, $h_1, \ldots, h_n$ $2n$ Constanten, welche den Bedingungen:

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_n = 0, \qquad h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 0$$

genügen; es ist weiter:

$$C_\mu = \sum \Big\{ \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1 + g_1'}{1 \cdot 2} \\ h_1' \end{bmatrix} (0)_{1.2b} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2 + g_2'}{2 \cdot 3} \\ h_2' \end{bmatrix} (0)_{2.3b} \cdots$$

$$\cdots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{n-2} + g_{n-2}'}{(n-2)(n-1)} \\ h_{n-2}' \end{bmatrix} (0)_{(n-2)(n-1)b} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{n-2}}{n-1} + \frac{g_{n-1}'}{(n-1)n} + \frac{\mu}{n} \\ h_{n-1}' \end{bmatrix} (0)_{(n-1)nb} \Big\},$$

wenn für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_\nu - \nu g_{\nu+1} = g_\nu',$$
$$h_1 + h_2 + \cdots + h_\nu - \nu h_{\nu+1} = h_\nu',$$

ferner für $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$:

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \cdots + \nu\varepsilon_\nu = \sigma_\nu$$

gesetzt und mit $\sum_{\cdot}$ angedeutet wird, dass für $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$ nach ε_ν von 0 bis ν zu summiren ist.

In der Formel (N_2) ist die auf der linken Seite stehende Thetafunction zunächst eine beliebige; für die beabsichtigte Zusammensetzung der Formeln (L) und (N_2) aber hat man die auf der linken Seite der Formel (N_2) vorkommenden Grössen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{b}$ als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Formel (L) vorkommenden Grössen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{b}$ anzusehen und gleichzeitig $\mathfrak{g} = \frac{1}{n}(\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta)$, $\mathfrak{h} = \hat{h}$ zu setzen; es wird dann die auf der linken Seite der Formel (N_2) stehende Thetafunction mit der auf der rechten Seite der Formel (L) im allgemeinen Gliede der Summe vorkommenden identisch, und man erhält, wenn man diese letztere, nachdem man linke und rechte Seite der Formel (L) mit nC_μ multiplicirt hat, durch den aus der Formel (N_2) dafür sich ergebenden Ausdruck ersetzt, die zur Transformation T gehörige Thetaformel in der vorläufigen Gestalt:

$$(\overline{T}) \qquad sn\, C_\mu \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (u)_a = \sqrt{\frac{-\pi i^\varrho}{n\sqrt{\mathfrak{B}}}} e^{-\frac{\beta u^2}{n\mathfrak{A}}} e^{\Psi(g,h)} e^{\widetilde{\varphi}\,\overset{0}{(\sigma)}} \widetilde{G}\begin{bmatrix} \overset{0}{\sigma} \end{bmatrix}$$
$$\times \sum_{\varkappa,\lambda}^{0,1,\ldots,n-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} e^{\frac{1}{n}\eta\eta'\pi i + \varkappa\lambda\pi i - \frac{1}{n}\gamma\delta\eta\pi i + \frac{2}{n}\left(\overset{0}{\sigma} + \frac{1}{2}\alpha\beta\right)\eta'\pi i}$$
$$\times e^{-\frac{2}{n}(\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \eta)\nu\pi i} \Theta \begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g} + \overset{0}{\sigma} + \mu + \eta}{n} \\ \dfrac{\hat{h} + \nu}{n} \end{bmatrix} (v)_b,$$

wobei bezüglich der vorkommenden Abkürzungen und Symbole auf das in diesem und dem vorhergehenden Artikel ausführlich Angeschriebene verwiesen werden mag.

2.

Die der ganzzahligen zur Zahl n gehörigen Transformation T entsprechende Thetaformel in der endgültigen allgemeinsten Gestalt (T).

In der Formel $(\overline{T})$ bezeichnet μ eine willkürlich wählbare ganze Zahl, und es gehen aus $(\overline{T})$ n verschiedene Formeln hervor, wenn man für μ der Reihe nach die Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ setzt. Jede dieser Formeln enthält auf ihrer rechten Seite bei Ausführung der Summation nach $\varkappa$, λ, ν n^3 Summanden, die aber nach dem am Ende des vorigen Abschnitts Bemerkten in $\frac{n^3}{s}$ Gruppen von je s unter einander gleichen Summanden angeordnet werden können, sodass die

in Rede stehende Summe selbst das s-fache einer Summe von $\frac{n^2}{s}$ Summanden ist, die dann, so lange die Constanten $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_n$ im Rahmen der oben für sie angegebenen Bedingungen willkürlich wählbare Werthe behalten, von einander wesentlich verschieden sind. Man kann aber aus der Formel $(\overline{T})$ Formeln ableiten, bei denen auf den rechten Seiten weniger als $\frac{n^3}{s}$ verschiedene Thetaproducte auftreten, und zwar einmal dadurch, dass man an Stelle der $2n$ Constanten $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_n$ passend gewählte specielle Werthe einführt, dann aber auch dadurch, dass man von den n Formeln, welche aus der Formel $(\overline{T})$ für $\mu = 0, 1, \ldots, n-1$ hervorgehen, gewisse auswählt und, nachdem man ihre linken und rechten Seiten mit passenden Factoren multiplicirt hat, zu einander addirt. Dieser letztere Weg, der wieder zu Formeln von der gleichen Allgemeinheit führt, von denen man ohne Mühe zu der Formel $(\overline{T})$ zurückkehren kann, soll jetzt beschritten werden, während der zuerst ausgesprochene Gedanke später wieder aufgenommen werden wird.

Man verstehe zu dem Ende unter σ, τ, $\overset{\wedge}{\varkappa}$, $\overset{\wedge}{\lambda}$ irgend welche ganze Zahlen und unter $\overset{\wedge}{\eta}$, $\overset{\wedge}{\eta'}$ die Ausdrücke:

$$\overset{\wedge}{\eta} = \alpha\overset{\wedge}{\varkappa} - \beta\overset{\wedge}{\lambda}, \qquad \overset{\wedge}{\eta'} = -\gamma\overset{\wedge}{\varkappa} + \delta\overset{\wedge}{\lambda},$$

setze in der Formel $(\overline{T})$:

$$\mu = \sigma - \overset{0}{\sigma} - \overset{\wedge}{\eta}$$

und summire, nachdem man linke und rechte Seite mit:

$$e^{-\frac{1}{n}\overset{\wedge}{\eta}\overset{\wedge}{\eta'}\pi i + \overset{\wedge}{\varkappa}\overset{\wedge}{\lambda}\pi i + \frac{2}{n}\left[\left(\tau+\frac{1}{2}\gamma\delta\right)\overset{\wedge}{\eta} - \left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\overset{\wedge}{\eta'}\right]\pi i}$$

multiplicirt hat, nach $\overset{\wedge}{\varkappa}$, $\overset{\wedge}{\lambda}$ von 0 bis $n-1$. Aus der Formel $(\overline{T})$ geht dann, wenn man zugleich auf der linken Seite zur Abkürzung:

$$\sum_{\overset{\wedge}{\varkappa},\,\overset{\wedge}{\lambda}}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\overset{\wedge}{\eta}\overset{\wedge}{\eta'}\pi i + \overset{\wedge}{\varkappa}\overset{\wedge}{\lambda}\pi i + \frac{2}{n}\left[\left(\tau+\frac{1}{2}\gamma\delta\right)\overset{\wedge}{\eta} - \left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\overset{\wedge}{\eta'}\right]\pi i} C_{\sigma-\overset{0}{\sigma}-\overset{\wedge}{\eta}} = D_{\sigma,\tau}$$

setzt, auf der rechten Seite aber, indem man berücksichtigt, dass dadurch nur eine Umstellung der Glieder der dort stehenden Summe, also keine Aenderung des Werthes dieser Summe eintritt, $\varkappa$ durch $\varkappa + \overset{\wedge}{\varkappa}$, λ durch $\lambda + \overset{\wedge}{\lambda}$ und hierauf ν durch $\nu + \tau + \eta'$ ersetzt und sodann endlich das auf $\overset{\wedge}{\varkappa}$, $\overset{\wedge}{\lambda}$ bezügliche Summenzeichen über die von $\overset{\wedge}{\varkappa}$, $\overset{\wedge}{\lambda}$ freien Theile hinüberschiebt, die Formel:

$$sn D_{\sigma,\tau}\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sqrt{\frac{-\pi i^{\varrho}}{n\widetilde{\beta}\mathfrak{A}}}\, e^{-\frac{\beta u^2}{n\mathfrak{A}}}\, e^{\psi(g,h)}\, e^{\widetilde{\varphi}\overset{0}{(\sigma)}}\, \widetilde{G}\overset{0}{[\sigma]}$$

$$\times \sum_{\varkappa,\lambda}^{0,1,\cdots,n-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} e^{-\frac{1}{n}\eta\eta'\pi i + \varkappa\lambda\pi i + \frac{1}{n}(\alpha\beta\eta' - \gamma\delta\eta)\pi i - \frac{2}{n}\hat{g}\eta'\pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{n}(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)(\tau+\nu)\pi i}\, \Theta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g}+\sigma+\eta}{n} \\ \dfrac{\hat{h}+\tau+\eta'+\nu}{n} \end{bmatrix}(v)_b \left(\sum_{\overset{\wedge}{\varkappa},\overset{\wedge}{\lambda}}^{0,1,\cdots,n-1} e^{-\frac{2}{n}\overset{\wedge}{\eta}\nu\pi i} \right)$$

hervor.

Die in der letzten Zeile stehende in besondere Klammern eingeschlossene Summe:

$$\sum_{\overset{\wedge}{\varkappa},\overset{\wedge}{\lambda}}^{0,1,\cdots,n-1} e^{-\frac{2}{n}\overset{\wedge}{\eta}\nu\pi i} = \left(\sum_{\overset{\wedge}{\varkappa}=0}^{\overset{\wedge}{\varkappa}=n-1} e^{-\frac{2}{n}\alpha\nu\overset{\wedge}{\varkappa}\pi i} \right) \left(\sum_{\overset{\wedge}{\lambda}=0}^{\overset{\wedge}{\lambda}=n-1} e^{\frac{2}{n}\beta\nu\overset{\wedge}{\lambda}\pi i} \right)$$

besitzt nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth n^2, wenn die Zahl ν gleichzeitig den beiden Congruenzen:

$$\alpha\nu \equiv 0 \pmod{n}, \qquad \beta\nu \equiv 0 \pmod{n}$$

genügt. Bezeichnet man aber wie früher den grössten gemeinsamen Theiler von α und β mit $t_{\alpha\beta}$ und setzt:

$$\alpha = t_{\alpha\beta}\alpha', \quad \beta = t_{\alpha\beta}\beta', \quad n = t_{\alpha\beta}n',$$

wobei dann:

$$n' = \alpha'\delta - \beta'\gamma$$

ist, so folgt unmittelbar, dass die beiden obigen Congruenzen dann und nur dann erfüllt sind, wenn ν ein ganzes Vielfaches von n' ist. Bei der auf der rechten Seite der letzten Thetaformel vorkommenden Summe nach ν besitzen daher nur die den Werthen:

$$\nu = 0,\ n',\ 2n',\ \ldots,\ (t_{\alpha\beta} - 1)n'$$

entsprechenden Glieder einen von Null verschiedenen Werth, und es bleibt daher diese Formel richtig, wenn man auf ihrer rechten Seite allenthalben ν durch $n'\varrho$ ersetzt und an Stelle der auf ν bezüglichen, über die Werthe $0, 1, \ldots, n-1$ erstreckten Summation eine auf ϱ bezügliche, über die Werthe $0, 1, \ldots, t_{\alpha\beta} - 1$ erstreckte treten lässt. Nachdem dies geschehen, setze man für die am Ende der Formel stehende, in besondere Klammern eingeschlossene Summe ihren Werth n^2, ersetze ferner, indem man beachtet, dass dadurch die auf der rechten Seite stehende Summe nur eine Umstellung ihrer Glieder und folglich keine Aenderung ihres Werthes erleidet, $\varkappa$ durch $\varkappa - \beta'\varrho$, λ durch $\lambda - \alpha'\varrho$, schiebe sodann das auf ϱ bezügliche Summenzeichen

sammt dem von ϱ abhängigen Theil der Exponentialgrösse über alle von dem Summationsbuchstaben ϱ freien Theile nach rechts hinüber, berücksichtige, dass die dadurch hinter der Θ-Function auftretende Summe:

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=t_{\alpha\beta}-1} e^{\alpha'\beta'\varrho^2\pi i - \frac{2}{t_{\alpha\beta}}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\varrho\pi i},$$

weil:

$$\overset{0}{\sigma} + \tfrac{1}{2}\alpha\beta = \tfrac{1}{2}t_{\alpha\beta}\alpha'\beta'$$

ist, den Werth $t_{\alpha\beta}$ besitzt, und dividire endlich, nachdem man diesen Werth an Stelle der genannten Summe gesetzt hat, linke und rechte Seite der entstandenen Formel durch $n^2 t_{\alpha\beta}$; man erhält dann, wenn man gleichzeitig noch s durch seinen Werth $s = nt_{\alpha\beta}$ ersetzt, ferner an Stelle der Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Grössen A, B vermittelst der Gleichungen:

$$A = n\mathfrak{A}, \quad B = \mathfrak{B}$$

einführt und endlich die Θ-Function durch das zur Abkürzung damit bezeichnete Thetaproduct ersetzt, *die der ganzzahligen zur Zahl n gehörigen Transformation:*

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \delta \end{array}\right|$$

bei der:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = n$$

ist, entsprechende Thetaformel in der folgenden endgültigen allgemeinsten Gestalt:

$$(T) \qquad D_{v,\tau}\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sqrt{\frac{-\pi i^{\varrho}}{\widetilde{\beta}A}}\, e^{-\frac{\beta u^2}{A}} e^{\psi(g,h)} e^{\widetilde{\varphi}\overset{0}{(\sigma)}} \widetilde{G}[\overset{0}{\sigma}]$$

$$\times \sum_{\varkappa,\lambda}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\eta\eta'\pi i + \varkappa\lambda\pi i + \frac{1}{n}(\alpha\beta\eta' - \gamma\delta\eta)\varkappa i - \frac{2}{n}\hat{g}\eta'\pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{n}(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)\varepsilon\pi i}\vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g}+\sigma+\eta}{n} + g_1 \\ \dfrac{\hat{h}+\tau+\eta'}{n} + h_1 \end{bmatrix}(v)_b \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g}+\sigma+\eta}{n} + g_n \\ \dfrac{\hat{h}+\tau+\eta'}{n} + h_n \end{bmatrix}(v)_b.$$

In dieser Formel ist zunächst:

$$A = \alpha\pi i + \beta a, \qquad B = \gamma\pi i + \delta a,$$

$$v = \frac{\pi i}{A}u, \qquad b = \frac{B}{A}\pi i;$$

es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\eta = \alpha x - \beta\lambda, \qquad \eta' = -\gamma x + \delta\lambda,$$

$$\hat{g} = \frac{1}{2}\alpha\beta + \alpha g - \beta h, \qquad \hat{h} = \frac{1}{2}\gamma\delta - \gamma g + \delta h,$$

$$\psi(g, h) = \frac{1}{n}(\alpha\gamma g^2 - 2\beta\gamma g h + \beta\delta h^2 - \alpha\gamma\delta g + \beta\gamma\delta h)\,\pi i;$$

es ist weiter:

$$\widetilde{\varphi}\left(\overset{0}{\sigma}\right) = -\frac{\delta}{n\widetilde{\beta}}\left(\overset{0}{\sigma} + \frac{1}{2}\alpha\beta\right)^2 \pi i - \frac{1}{n}\gamma\delta\left(\overset{0}{\sigma} + \frac{1}{2}\alpha\beta\right)\pi i,$$

$$\widetilde{G}\left[\overset{0}{\sigma}\right] = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\widetilde{\beta}-1} e^{-\frac{\widetilde{\alpha}}{\widetilde{\beta}}\varrho^2\pi i + \frac{2}{\widetilde{\beta}}\left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\varrho\pi i},$$

wobei:

$$\overset{0}{\sigma} = -\frac{t_{\alpha\beta}(t_{\alpha\beta}-1)}{2}\alpha'\beta'$$

ist, wenn man mit $t_{\alpha\beta}$ den grössten gemeinsamen Theiler der beiden Zahlen α, β bezeichnet und $\alpha = t_{\alpha\beta}\alpha'$, $\beta = t_{\alpha\beta}\beta'$ setzt; es ist ferner bezüglich der Bedeutung des unter dem Wurzelzeichen vorkommenden Buchstabens ϱ und der Buchstaben $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ zu bemerken:

1) *Ist* $\beta \gtrless 0$, *so ist* $\varrho = 0$, $\widetilde{\alpha} = \alpha$, $\widetilde{\beta} = \beta$ *zu setzen,*

2) *Ist* $\beta = 0$, *so ist* $\varrho = 1$, $\widetilde{\alpha} = 0$, $\widetilde{\beta} = -\alpha$ *zu setzen;*

es bezeichnen weiter σ, τ zwei beliebige ganze Zahlen, $g_1, \ldots, g_n$, $h_1, \ldots, h_n$ $2n$ Constanten, welche den Bedingungen:

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_n = 0, \quad h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 0$$

genügen, und es ist endlich zur Abkürzung gesetzt:

$$D_{\sigma,\tau} = \sum_{x,\lambda}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\eta\eta'\pi i + x\lambda\pi i + \frac{2}{n}\left[\left(\tau+\frac{1}{2}\gamma\delta\right)\eta - \left(\overset{0}{\sigma}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\eta'\right]\pi i} C_{\sigma-\overset{0}{\sigma}-\eta},$$

wobei allgemein:

$$C_\mu = \sum_{\nu}\left\{\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\sigma_1+g_1'}{1\,.\,2}\\ h_1'\end{bmatrix}(0)_{1.2\,b}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\sigma_2+g_2'}{2\,.\,3}\\ h_2'\end{bmatrix}(0)_{2.3\,b}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\sigma_{n-2}+g_{n-2}'}{(n-2)(n-1)}\\ h_{n-2}'\end{bmatrix}(0)_{(n-2)(n-1)\,b}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\sigma_{n-2}'}{n-1}+\frac{g_{n-1}'}{(n-1)n}+\frac{\mu}{n}\\ h_{n-1}'\end{bmatrix}(0)_{(n-1)n\,b}\right\},$$

wenn für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_\nu - \nu g_{\nu+1} = g_\nu',$$
$$h_1 + h_2 + \cdots + h_\nu - \nu h_{\nu+1} = h_\nu',$$

ferner für $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$:

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \cdots + \nu\varepsilon_\nu = \sigma_\nu$$

gesetzt und mit $\sum_{\varepsilon}$ *angedeutet wird, dass für* $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$ *nach* ε_ν *von* 0 *bis* ν *zu summiren ist.*

Die Formel (T) enthält auf ihrer rechten Seite bei Ausführung der Summation nach $\varkappa, \lambda$ n^2 Summanden. Beachtet man aber, dass das Congruenzenpaar:

$$\alpha\varkappa - \beta\lambda \equiv 0 \pmod{n}, \qquad -\gamma\varkappa + \delta\lambda \equiv 0 \pmod{n}$$

n Normallösungen besitzt*), so erkennt man, dass diese n^2 Summanden in n Gruppen von je n Summanden geordnet werden können, indem man zu einer Gruppe jedesmal diejenigen Summanden, immer n an der Zahl, zusammenfasst, für welche sich die Werthe der Grössen η, η' nur um ganze Vielfache von n ändern, wenn man von einem dieser n Summanden zu einem anderen übergeht. Man zeigt dann leicht, dass die n in einer Gruppe vorkommenden Summanden denselben Werth besitzen, und kann daher in obiger Summe jede solche Gruppe von Summanden durch das n-fache eines beliebigen unter ihnen ersetzen. Führt man diese Vereinigung für jede der n Gruppen aus, so geht die in Rede stehende Summe über in das n-fache einer Summe von n Summanden, die dann, solange die Constanten $g_1, \ldots, g_n$, $h_1, \ldots, h_n$ im Rahmen der oben für sie angegebenen Bedingungen willkürlich wählbare Werthe behalten, von einander wesentlich verschieden sind. Bezeichnet man weiter mit $t_{\alpha\gamma}$ den grössten gemeinsamen Theiler der beiden Zahlen α und γ und setzt:

$$n_1 = \frac{n}{t_{\alpha\gamma}}, \qquad n_2 = t_{\alpha\gamma},$$

so ist:

$$x = n_1$$

*) Dieser Satz ist der specielle Fall des allgemeinen, für beliebiges p geltenden, dass bei jeder ganzzahligen zur Zahl n gehörigen Transformation:

$$T = \left| \begin{array}{c|c} \alpha_{\mu\nu} & \beta_{\mu\nu} \\ \hline \gamma_{\mu\nu} & \delta_{\mu\nu} \end{array} \right|$$

das System der $2p$ Congruenzen:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu}\lambda_\mu) \equiv 0 \pmod{n}, \qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu + \delta_{\nu\mu}\lambda_\mu) \equiv 0 \pmod{n}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

n^p Normallösungen besitzt. Einen Beweis dieses allgemeinen Satzes, sowie einiger anderer Sätze über die Anzahl der Normallösungen eines Systems linearer Congruenzen gedenke ich nächstens mitzutheilen.

die kleinste positive ganze Zahl, welche den Congruenzen:

$$\alpha x \equiv 0 \pmod{n}, \quad -\gamma x \equiv 0 \pmod{n}$$

genügt, und es giebt weiter eine Zahl x' aus der Reihe der Zahlen $0, 1, \ldots, n_1 - 1$, für welche die beiden Congruenzen:

$$-\beta y \equiv \alpha x' \pmod{n}, \quad \delta y \equiv -\gamma x' \pmod{n}$$

durch:

$$y = n_2$$

befriedigt werden, während sie für keinen Werth von x' durch einen kleineren positiven ganzzahligen Werth von y erfüllt sind. Unter Berücksichtigung dieser beiden Punkte erkennt man unmittelbar, dass man aus dem allgemeinen Gliede der auf der rechten Seite der Formel (T) stehenden Summe n wesentlich verschiedene Summanden und jeden von ihnen nur einmal erhält, wenn man darin $\varkappa$ die Reihe der Zahlen $0, 1, \ldots, n_1 - 1$ und jedesmal dazu λ die Reihe der Zahlen $0, 1, \ldots, n_2 - 1$ durchlaufen lässt. Die Formel (T) bleibt daher richtig, wenn man auf der rechten Seite nach $\varkappa$ von 0 bis $n_1 - 1$, nach λ von 0 bis $n_2 - 1$ summirt, die linke Seite aber gleichzeitig durch n dividirt.

3.

Erste specielle Formel für die ganzzahlige zur Zahl n gehörige Transformation.

Die gewonnene Formel (T) nimmt einfachere Formen an, wenn man für die darin vorkommenden, den Bedingungen:

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_n = 0, \quad h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 0$$

unterworfenen Constanten $g_1, \ldots, g_n$, $h_1, \ldots, h_n$ passend gewählte specielle Werthe einführt.

Setzt man zunächst:

$$g_1 = g_2 = \cdots = g_n = 0, \quad h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0,$$

so geht aus der Formel (T) *die erste specielle der ganzzahligen zur Zahl n gehörigen Transformation entsprechende Thetaformel* in der Gestalt*):

$$(T_1) \qquad D'_{\sigma,\tau}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sqrt{\frac{-\pi i^{\varrho}}{\beta A}}\, e^{-\frac{\beta u^2}{A}}\, e^{\psi(g,h)}\, e^{\widetilde{\varphi}\,\overset{0}{(\sigma)}}\, \widetilde{G}\left[\overset{0}{\sigma}\right]$$
$$\times \sum_{\varkappa,\lambda}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\eta\eta'\pi i + \varkappa\lambda\pi i + \frac{1}{n}(\alpha\beta\eta' - \gamma\delta\eta)\pi i - \frac{2}{n}\hat{g}\eta'\pi i}$$
$$\times e^{-\frac{2}{n}(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)\tau\pi i}\, \vartheta^n \begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g}+\sigma+\eta}{n} \\ \dfrac{\hat{h}+\tau+\eta'}{n} \end{bmatrix}(v)_b$$

*) Vergl. Krazer und Prym, a. a. O. pag. 131, Formel (A_1).

hervor. In dieser Formel haben die vorkommenden Abkürzungen und Symbole A, B, v, b, η, η', $\hat{g}$, $\hat{h}$, $\psi(g,h)$, $\overset{0}{\widetilde{\varphi}}(\sigma)$, $\overset{0}{\widetilde{G}}[\sigma]$, $\overset{0}{\sigma}$, ϱ, $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ die nämliche Bedeutung wie bei der Formel (T), während $D'_{\sigma,\tau}$ jenen speciellen Werth bezeichnet, der aus $D_{\sigma,\tau}$ hervorgeht, wenn man darin den für die Constanten $g_1, \ldots, g_n$, $h_1, \ldots, h_n$ eingeführten speciellen Werthen entsprechend alle Grössen g_ν', h_ν' $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ der Null gleich setzt.

4.

Zweite specielle Formel für die ganzzahlige zur Zahl n gehörige Transformation.

Eine zweite specielle Formel für die ganzzahlige zur Zahl n gehörige Transformation erhält man aus der Formel (T), wenn man über die darin vorkommenden Constanten $g_1, \ldots, g_n$, $h_1, \ldots, h_n$ in folgender Weise verfügt.

Man bezeichne, wie schon früher, den grössten gemeinsamen Theiler der beiden Zahlen α und γ mit $t_{\alpha\gamma}$ und setze:

$$n_1 = \frac{n}{t_{\alpha\gamma}}, \quad n_2 = t_{\alpha\gamma}.$$

Lässt man dann in den beiden Ausdrücken:

$$\frac{\bar{\eta} - \bar{s}}{n}, \quad \frac{\bar{\eta}' - \bar{s}'}{n},$$

bei denen zur Abkürzung:

$$\bar{\eta} = \alpha\bar{\varkappa} - \beta\bar{\lambda}, \qquad \bar{\eta}' = -\gamma\bar{\varkappa} + \delta\bar{\lambda},$$

$$\bar{s} = \frac{n_1 - 1}{2}\alpha - \frac{n_2 - 1}{2}\beta, \quad \bar{s}' = -\frac{n_1 - 1}{2}\gamma + \frac{n_2 - 1}{2}\delta$$

gesetzt ist, an Stelle von $\bar{\varkappa}$ der Reihe nach die Zahlen $0, 1, \ldots, n_1 - 1$ und jedesmal dazu an Stelle von $\bar{\lambda}$ der Reihe nach die Zahlen $0, 1, \ldots, n_2 - 1$ treten, so gehen aus denselben n Paare von Grössen hervor, die der Bedingung genügen, dass sowohl die Summe der n ersten Grössen als auch die Summe der n zweiten Grössen den Werth Null besitzt. Diese n Grössenpaare führe man an Stelle der n Constantenpaare g_ν, h_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ in die Formel (T) ein, setze also:

$$g_{\bar{\varkappa}n_2+\bar{\lambda}+1} = \frac{\bar{\eta} - \bar{s}}{n}, \quad h_{\bar{\varkappa}n_2+\bar{\lambda}+1} = \frac{\bar{\eta}' - \bar{s}'}{n}. \qquad \left(\begin{matrix}\bar{\varkappa} = 0, 1, \cdots, n_1 - 1 \\ \bar{\lambda} = 0, 1, \cdots, n_2 - 1\end{matrix}\right)$$

Aus der Formel (T) geht dann, wenn man auch entsprechend der am Ende des Art. 2 dieses Abschnitts gemachten Bemerkung, unter gleichzeitiger Division der linken Seite durch n, auf der rechten Seite

die Summation nach $\varkappa$, λ derart abändert, dass nach $\varkappa$ von 0 bis $n_1 - 1$, nach λ von 0 bis $n_2 - 1$ summirt wird, und ferner den aus $D_{\sigma,\tau}$ durch Einführung der soeben für die Constanten $g_1, \ldots, g_n$, $h_1, \ldots, h_n$ angegebenen speciellen Werthe hervorgehenden Ausdruck mit $D''_{\sigma,\tau}$ bezeichnet, zunächst die Formel:

$$(\overline{T}) \qquad \frac{1}{n} D''_{\sigma,\tau}\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sqrt{\frac{-\pi i^{\varrho}}{\widetilde{\beta}\, A}}\; e^{-\frac{\beta u^2}{A}}\; e^{\psi(g,h)}\; e^{\widetilde{\varphi}\overset{0}{(\sigma)}}\; \widetilde{G}\overset{0}{[\sigma]}$$

$$\times \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n_1-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n_2-1} e^{-\frac{1}{n}\eta\eta'\pi i + \varkappa\lambda\pi i + \frac{1}{n}(\alpha\beta\eta' - \gamma\delta\eta)\pi i - \frac{2}{n}\hat{g}\eta'\pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{n}(\hat{g}+\overset{0}{\sigma}+\eta)\tau\pi i} \prod_{\bar{\varkappa}=0}^{\bar{\varkappa}=n_1-1} \prod_{\bar{\lambda}=0}^{\bar{\lambda}=n_2-1} \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g}+\sigma+\eta+\bar{\eta}-\delta}{n} \\ \dfrac{\hat{h}+\tau+\eta'+\bar{\eta}'-\delta'}{n} \end{bmatrix}(v)_b$$

hervor.

Die auf der rechten Seite dieser Formel bei Ausführung der Summation auftretenden n Thetaproducte:

$$P_{\varkappa,\lambda} = \prod_{\bar{\varkappa}=0}^{\bar{\varkappa}=n_1-1} \prod_{\bar{\lambda}=0}^{\bar{\lambda}=n_2-1} \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g}+\sigma+\eta+\bar{\eta}-\delta}{n} \\ \dfrac{\hat{h}+\tau+\eta'+\bar{\eta}'-\delta'}{n} \end{bmatrix}(v)_b \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 0, 1, \cdots, n_1-1 \\ \lambda = 0, 1, \cdots, n_2-1 \end{pmatrix}$$

können durch ein beliebiges unter ihnen z. B. das den Werthen $\varkappa = 0$, $\lambda = 0$ entsprechende Product $P_{0,0}$ ausgedrückt werden. Diese Ausdrücke sollen im Folgenden hergeleitet werden.

Zu dem Ende setze man vorübergehend zur Abkürzung:

$$\hat{g} + \sigma - \delta = k, \qquad \hat{h} + \tau - \delta' = l;$$

es wird dann:

$$P_{\varkappa,\lambda} = P'_{\varkappa,\lambda} \,.\, P''_{\varkappa,\lambda},$$

wenn man unter $P'_{\varkappa,\lambda}$, $P''_{\varkappa,\lambda}$ die Producte:

$$P'_{\varkappa,\lambda} = \prod_{\bar{\varkappa}=0}^{n_1-\varkappa-1} \prod_{\bar{\lambda}=0}^{n_2-1} \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{k+\alpha(\varkappa+\bar{\varkappa})-\beta(\lambda+\bar{\lambda})}{n} \\ \dfrac{l-\gamma(\varkappa+\bar{\varkappa})+\delta(\lambda+\bar{\lambda})}{n} \end{bmatrix}(v)^b$$

$$= \prod_{\bar{\varkappa}=\varkappa}^{n_1-1} \prod_{\bar{\lambda}=0}^{n_2-1} \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{k+\alpha\overset{=}{\varkappa}-\beta(\lambda+\bar{\lambda})}{n} \\ \dfrac{l-\gamma\overset{=}{\varkappa}+\delta(\lambda+\bar{\lambda})}{n} \end{bmatrix}(v)_b,$$

$$P''_{\varkappa,\lambda} = \prod_{\bar{\varkappa}=n_1 \cdot \varkappa}^{n_1-1} \prod_{\bar{\lambda}=0}^{n_2-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha(\varkappa+\bar{\varkappa})-\beta(\lambda+\bar{\lambda})}{n} \\ \frac{l-\gamma(\varkappa+\bar{\varkappa})+\delta(\lambda+\bar{\lambda})}{n} \end{bmatrix} (v)_b$$

$$= \prod_{\bar{\varkappa}=0}^{\varkappa-1} \prod_{\bar{\lambda}=0}^{n_2-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha\bar{\bar{\varkappa}}-\beta(\lambda+\bar{\lambda})+\alpha n_1}{n} \\ \frac{l-\gamma\bar{\bar{\varkappa}}+\delta(\lambda+\bar{\lambda})-\gamma n_1}{n} \end{bmatrix} (v)_b$$

versteht*). Nun ist aber:

$$\alpha n_1 \equiv 0 \pmod{n}, \qquad \gamma n_1 \equiv 0 \pmod{n},$$

und es ist daher weiter:

$$P''_{\varkappa,\lambda} = \prod_{\bar{\varkappa}=0}^{\varkappa-1} \prod_{\bar{\lambda}=0}^{n_2-1} \left(e^{-\frac{2}{n}\left[k+\alpha\bar{\bar{\varkappa}}-\beta(\lambda+\bar{\lambda})\right]\frac{\gamma n_1}{n}\pi i} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha\bar{\bar{\varkappa}}-\beta(\lambda+\bar{\lambda})}{n} \\ \frac{l-\gamma\bar{\bar{\varkappa}}+\delta(\lambda+\bar{\lambda})}{n} \end{bmatrix} (v)_b \right)$$

$$= e^{-\frac{2}{n}\left[k+\alpha\frac{\varkappa-1}{2}-\beta\lambda-\beta\frac{n_2-1}{2}\right]\gamma\varkappa\pi i} \prod_{\bar{\varkappa}=0}^{\varkappa-1} \prod_{\bar{\lambda}=0}^{n_2-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha\bar{\bar{\varkappa}}-\beta(\lambda+\bar{\lambda})}{n} \\ \frac{l-\gamma\bar{\bar{\varkappa}}+\delta(\lambda+\bar{\lambda})}{n} \end{bmatrix} (v)_b.$$

Indem man aber diesen für $P''_{\varkappa,\lambda}$ gefundenen Ausdruck mit dem letzten für $P'_{\varkappa,\lambda}$ aufgestellten multiplicirt, erhält man die Gleichung:

$$(P_1) \qquad P_{\varkappa,\lambda} = e^{-\frac{2}{n}\left[k+\alpha\frac{\varkappa-1}{2}-\beta\lambda-\beta\frac{n_2-1}{2}\right]\gamma\varkappa\pi i} P_{0,\lambda}.$$

Es ist ferner:

$$P_{0,\lambda} = P'_{0,\lambda} \cdot P''_{0,\lambda},$$

wenn man unter $P'_{0,\lambda}$, $P''_{0,\lambda}$ die Producte:

$$P'_{0,\lambda} = \prod_{\bar{\varkappa}=0}^{n_1-1} \prod_{\bar{\lambda}=0}^{n_2-\lambda-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha\bar{\varkappa}-\beta(\lambda+\bar{\lambda})}{n} \\ \frac{l-\gamma\bar{\varkappa}+\delta(\lambda+\bar{\lambda})}{n} \end{bmatrix} (v)_b$$

$$- \prod_{\bar{\varkappa}=0}^{n_1-1} \prod_{\bar{\lambda}=\lambda}^{n_2-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha\bar{\varkappa}-\beta\bar{\bar{\lambda}}}{n} \\ \frac{l-\gamma\bar{\varkappa}+\delta\bar{\bar{\lambda}}}{n} \end{bmatrix} (v)_b,$$

*) Hier ist, wie in der folgenden Untersuchung überall, zur Abkürzung $\prod_{\varepsilon=p}^{q}$ statt $\prod_{\varepsilon=p}^{\varepsilon=q}$ geschrieben.

$$P''_{0,\lambda} = \prod_{\bar{\varkappa}=0}^{n_1-1} \prod_{\bar{\lambda}=n_2-\lambda}^{n_2-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha\bar{\varkappa}-\beta(\lambda+\bar{\lambda})}{n} \\ \frac{l-\gamma\bar{\varkappa}+\delta(\lambda+\bar{\lambda})}{n} \end{bmatrix} (v)_b$$

$$= \prod_{\bar{\varkappa}=0}^{n_1-1} \prod_{\bar{\bar{\lambda}}=0}^{\lambda-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha\bar{\varkappa}-\beta\bar{\bar{\lambda}}-\beta n_2}{n} \\ \frac{l-\gamma\bar{\varkappa}+\delta\bar{\bar{\lambda}}+\delta n_2}{n} \end{bmatrix} (v)_b$$

versteht. Nun ist aber:

$$-\beta n_2 \equiv \alpha\varkappa' \pmod{n}, \qquad \delta n_2 \equiv -\gamma\varkappa' \pmod{n},$$

wo $\varkappa'$ eine durch diese Congruenzen eindeutig bestimmte Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots, n_1 - 1$ bezeichnet, und es ist daher weiter:

$$P''_{0,\lambda} = \prod_{\bar{\varkappa}=0}^{n_1-1} \prod_{\bar{\bar{\lambda}}=0}^{\lambda-1} \left(e^{\frac{2}{n}\left[k+\alpha(\varkappa'+\bar{\varkappa})-\beta\bar{\bar{\lambda}}\right]\frac{\delta n_2+\gamma\varkappa'}{n}\pi i} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha(\varkappa'+\bar{\varkappa})-\beta\bar{\bar{\lambda}}}{n} \\ \frac{l-\gamma(\varkappa'+\bar{\varkappa})+\delta\bar{\bar{\lambda}}}{n} \end{bmatrix} (v)_b \right)$$

$$= e^{\frac{2}{n}\left[k+\alpha\varkappa'+\alpha\frac{n_1-1}{2}-\beta\frac{\lambda-1}{2}\right]\frac{\delta n_2+\gamma\varkappa'}{n}n_1\lambda\pi i} \overline{P}_{\varkappa',0},$$

wenn man mit $\overline{P}_{\varkappa',0}$ das Product:

$$\overline{P}_{\varkappa',0} = \prod_{\bar{\varkappa}=0}^{n_1-1} \prod_{\bar{\bar{\lambda}}=0}^{\lambda-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha(\varkappa'+\bar{\varkappa})-\beta\bar{\bar{\lambda}}}{n} \\ \frac{l-\gamma(\varkappa'+\bar{\varkappa})+\delta\bar{\bar{\lambda}}}{n} \end{bmatrix} (v)_b$$

bezeichnet.

Es ist endlich:

$$\overline{P}_{\varkappa',0} = \overline{P}'_{\varkappa',0} \cdot \overline{P}''_{\varkappa',0},$$

wenn man unter $\overline{P}'_{\varkappa',0}$, $\overline{P}''_{\varkappa',0}$ die Producte:

$$\overline{P}'_{\varkappa',0} = \prod_{\bar{\varkappa}=0}^{n_1-\varkappa'-1} \prod_{\bar{\bar{\lambda}}=0}^{\lambda-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha(\varkappa'+\bar{\varkappa})-\beta\bar{\bar{\lambda}}}{n} \\ \frac{l-\gamma(\varkappa'+\bar{\varkappa})+\delta\bar{\bar{\lambda}}}{n} \end{bmatrix} (v)_b$$

$$= \prod_{\bar{\bar{\varkappa}}=\varkappa'}^{n_1-1} \prod_{\bar{\bar{\lambda}}=0}^{\lambda-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha\bar{\bar{\varkappa}}-\beta\bar{\bar{\lambda}}}{n} \\ \frac{l-\gamma\bar{\bar{\varkappa}}+\delta\bar{\bar{\lambda}}}{n} \end{bmatrix} (v)_b,$$

$$\overline{P}''_{\varkappa',0} = \prod_{\bar{\varkappa}=n_1-\varkappa'}^{n_1-1} \prod_{\bar{\lambda}=0}^{\lambda-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha(\varkappa'+\bar{\varkappa})-\beta\bar{\lambda}}{n} \\ \frac{l-\gamma(\varkappa'+\bar{\varkappa})+\delta\bar{\lambda}}{n} \end{bmatrix} (v)_b$$

$$= \prod_{\bar{\bar{\varkappa}}=0}^{\varkappa'-1} \prod_{\bar{\lambda}=0}^{\lambda-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha\bar{\bar{\varkappa}}-\beta\bar{\lambda}+\alpha n_1}{n} \\ \frac{l-\gamma\bar{\bar{\varkappa}}+\delta\bar{\lambda}-\gamma n_1}{n} \end{bmatrix} (v)_b$$

versteht. Nun ist aber:

$$\alpha n_1 \equiv 0 \pmod{n}, \quad \gamma n_1 \equiv 0 \pmod{n},$$

und es ist daher weiter:

$$\overline{P}''_{\varkappa',0} = \prod_{\bar{\bar{\varkappa}}=0}^{\varkappa'-1} \prod_{\bar{\lambda}=0}^{\lambda-1} \left(e^{-\frac{2}{n}\left[k+\alpha\bar{\bar{\varkappa}}-\beta\bar{\lambda}\right]\frac{\gamma n_1}{n}\pi i} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha\bar{\bar{\varkappa}}-\beta\bar{\lambda}}{n} \\ \frac{l-\gamma\bar{\bar{\varkappa}}+\delta\bar{\lambda}}{n} \end{bmatrix} (v)_b \right)$$

$$= e^{-\frac{2}{n}\left[k+\alpha\frac{\varkappa'-1}{2}-\beta\frac{\lambda-1}{2}\right]\frac{\gamma n_1}{n}\varkappa'\lambda\pi i} \prod_{\bar{\bar{\varkappa}}=0}^{\varkappa'-1} \prod_{\bar{\lambda}=0}^{\lambda-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha\bar{\bar{\varkappa}}-\beta\bar{\lambda}}{n} \\ \frac{l-\gamma\bar{\bar{\varkappa}}+\delta\bar{\lambda}}{n} \end{bmatrix} (v)_b.$$

Indem man aber diesen für $\overline{P}''_{\varkappa',0}$ gefundenen Ausdruck mit dem letzten für $\overline{P}'_{\varkappa',0}$ aufgestellten multiplicirt, und den dadurch für $\overline{P}_{\varkappa',0}$ entstehenden Ausdruck in die letzte Gleichung für $P''_{0,\lambda}$ einführt, erhält man:

$$P''_{0,\lambda} = e^{\frac{2}{n}\left[k+\alpha\frac{n_1-1}{2}-\beta\frac{\lambda-1}{2}\right]\delta\lambda\pi i + 2\frac{\alpha n_1}{n}\cdot\frac{\delta n_2+\gamma\varkappa'}{n}\cdot\varkappa'\lambda\pi i}$$

$$\times e^{\frac{1}{n}\frac{\alpha\gamma}{n_2}(n_1-\varkappa')\varkappa'\lambda\pi i} \prod_{\bar{\bar{\varkappa}}=0}^{n_1-1} \prod_{\bar{\lambda}=0}^{\lambda-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k+\alpha\bar{\bar{\varkappa}}-\beta\bar{\lambda}}{n} \\ \frac{l-\gamma\bar{\bar{\varkappa}}+\delta\bar{\lambda}}{n} \end{bmatrix} (v)_b,$$

und endlich, indem man diesen Ausdruck für $P''_{0,\lambda}$ mit dem letzten für $P'_{0,\lambda}$ aufgestellten multiplicirt und gleichzeitig beachtet, dass in Folge der Congruenzen:

$$\alpha n_1 \equiv 0 \pmod{n}, \quad \delta n_2 + \gamma\varkappa' \equiv 0 \pmod{n}$$

die Gleichung:

$$e^{2\frac{\alpha n_1}{n}\cdot\frac{\delta n_2+\gamma\varkappa'}{n}\cdot\varkappa'\lambda\pi i} = 1$$

besteht, die Gleichung:

$$(P_2) \qquad P_{0,\lambda} = e^{\frac{2}{n}\left[k+\alpha\frac{n_1-1}{2}-\beta\frac{\lambda-1}{2}\right]\delta\lambda\pi i + \frac{1}{n}\frac{\alpha\gamma}{n_2}(n_1-\varkappa')\varkappa'\lambda\pi i} P_{0,0}.$$

Aus den beiden Gleichungen (P_1), (P_2) folgt schliesslich, indem man in der ersten Gleichung die Grösse $P_{0,\lambda}$ durch den in der zweiten Gleichung dafür aufgestellten Ausdruck ersetzt und gleichzeitig statt k wieder die zur Abkürzung damit bezeichnete Grösse:

$$k = \hat{g} + \sigma - \overset{\wedge}{\mathfrak{z}} = \hat{g} + \sigma - \alpha\,\frac{n_1-1}{2} + \beta\,\frac{n_2-1}{2}$$

einführt, die Gleichung:

$$(P) \qquad P_{\varkappa,\lambda} = e^{\frac{2}{n}(\hat{g}+\sigma)\eta'\pi i - \frac{1}{n}(\alpha\gamma\varkappa^2 - 2\beta\gamma\varkappa\lambda + \beta\delta\lambda^2)\pi i}$$
$$\times e^{\frac{1}{n}\left[n_1\alpha\gamma\varkappa + n_2\beta\delta\lambda + \frac{\alpha\gamma}{n_2}(n_1-\varkappa')\varkappa'\lambda\right]\pi i} P_{0,0}.$$

Durch diese Gleichung ist, da dieselbe für jedes $\varkappa$ von 0 bis $n_1 - 1$, für jedes λ von 0 bis $n_2 - 1$ gilt, die oben gestellte Aufgabe, alle Producte $P_{\varkappa,\lambda}$ durch das eine den Werthen $\varkappa = 0$, $\lambda = 0$ entsprechende unter ihnen auszudrücken, gelöst.

Man gehe jetzt auf die Formel $(\overline{T}_2)$ zurück und drücke auf der rechten Seite das im allgemeinen Gliede der Summe vorkommende Product $P_{\varkappa,\lambda}$ mittelst der soeben gewonnenen Formel durch das Product:

$$P_{0,0} = \prod_{\varkappa=0}^{\varkappa=n_1-1}\prod_{\lambda=0}^{\lambda=n_2-1} \vartheta\left[\begin{matrix}\frac{\hat{g}+\sigma+\bar{\eta}-\mathfrak{z}}{n} \\ \frac{\hat{h}+\tau+\bar{\eta}'-\mathfrak{z}'}{n}\end{matrix}\right](v)_b$$

aus. Nach Vereinigung zusammengehöriger Glieder und passender Anordnung der übrig bleibenden erhält man dann die der Transformation (T) entsprechende zweite specielle Formel in der weiteren Gestalt:

$$(\overline{\overline{T}}_2) \quad \frac{1}{n} D''_{\sigma,\tau}\,\vartheta\left[\begin{matrix}g \\ h\end{matrix}\right](u)_a = \sqrt{\frac{-\pi i^{\varrho}}{\widetilde{\beta}\,A}}\; e^{-\frac{\beta u^2}{A}}\, e^{\Psi(g,h)}\, e^{\widetilde{\varphi}\binom{0}{\sigma}}\, \widetilde{G}\left[\begin{matrix}0 \\ \sigma\end{matrix}\right]$$
$$\times e^{-\frac{2}{n}(\hat{g}+\overset{0}{\sigma})\tau\pi i} \prod_{\varkappa=0}^{\varkappa=n_1-1}\prod_{\lambda=0}^{\lambda=n_2-1} \vartheta\left[\begin{matrix}\frac{\hat{g}+\sigma+\bar{\eta}-\mathfrak{z}}{n} \\ \frac{\hat{h}+\tau+\bar{\eta}'-\mathfrak{z}'}{n}\end{matrix}\right](v)_b$$
$$\times \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n_1-1} e^{-\frac{2}{n}\left[\gamma\sigma+\alpha\tau+\frac{1}{2}(\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma\delta-n_1\alpha\gamma)\right]\varkappa\pi i}$$
$$\times \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n_2-1} e^{\frac{2}{n}\left[\delta\sigma+\beta\tau+\frac{1}{2}\left\{\alpha\beta\delta+\beta\gamma\delta+n_2\beta\delta+\frac{\alpha\gamma}{n_2}(n_1-\varkappa')\varkappa'\right\}\right]\lambda\pi i}.$$

Bei dieser Formel erkennt man unmittelbar, dass das allgemeine Glied der in der dritten Zeile stehenden, auf $\varkappa$ bezüglichen Summe

seinen Werth nicht ändert, wenn man die Grösse $\varkappa$ um ein ganzes Vielfaches von n_1 ändert; es besitzt daher diese Summe nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth n_1, wenn die Zahlen σ, τ der Congruenz:

$$(C_1) \qquad \gamma\sigma + \alpha\tau + \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma + \alpha\gamma\delta - n_1\alpha\gamma) \equiv 0 \pmod{n}$$

genügen. Ist aber diese Congruenz erfüllt, so besitzt die in der vierten Zeile stehende Summe nach λ, da dann ihr allgemeines Glied, wie man unschwer zeigt, seinen Werth nicht ändert, wenn man λ um ein ganzes Vielfaches von n_2 ändert, nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth n_2, wenn die Zahlen σ, τ der Congruenz:

$$(C_2) \quad \delta\sigma + \beta\tau + \tfrac{1}{2}\left\{\alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta + n_2\beta\delta + \frac{\alpha\gamma}{n_2}(n_1 - \varkappa)\varkappa\right\} \equiv 0 \pmod{n}$$

genügen. Daraus ergiebt sich, dass die rechte Seite der Formel $(\overline{\overline{T}}_2)$ immer verschwindet, wenn für σ, τ zwei Zahlen gesetzt werden, welche den Congruenzen $(C_1), (C_2)$ nicht genügen. Durch Einführung solcher Zahlen an Stelle von σ, τ entsteht also aus $(\overline{\overline{T}}_2)$ keine Transformationsformel; es ergiebt sich vielmehr dann nur die immerhin bemerkenswerthe Gleichung:

$$D''_{\sigma,\tau} = 0.$$

Zur Gewinnung von Transformationsformeln dagegen hat man an Stelle von σ, τ solche Zahlenpaare zu setzen, welche den Congruenzen $(C_1), (C_2)$ genügen; bezüglich dieser Zahlenpaare aber bemerkt man weiter das Folgende. Ist σ', τ' ein erstes, σ'', τ'' ein zweites Zahlenpaar, welches den Congruenzen $(C_1), (C_2)$ genügt, so kann man, da in Folge der Congruenzen $(C_1), (C_2)$ dann:

$$\gamma(\sigma'' - \sigma') + \alpha(\tau'' - \tau') \equiv 0 \pmod{n},$$
$$\delta(\sigma'' - \sigma') + \beta(\tau'' - \tau') \equiv 0 \pmod{n}$$

ist, die Zahlen σ'', τ'' stets mit Hülfe ganzer Zahlen $\overset{\wedge}{\varkappa}, \overset{\wedge}{\lambda}$ durch die Zahlen σ', τ' ausdrücken in der Form:

$$\sigma'' = \sigma' + \overset{\wedge}{\eta}, \quad \tau'' = \tau' + \overset{\wedge}{\eta}',$$

wobei:

$$\overset{\wedge}{\eta} = \alpha\overset{\wedge}{\varkappa} - \beta\overset{\wedge}{\lambda}, \quad \overset{\wedge}{\eta}' = -\gamma\overset{\wedge}{\varkappa} + \delta\overset{\wedge}{\lambda}$$

ist. Setzt man aber in der Formel $(\overline{\overline{T}}_2)$ einmal $\sigma = \sigma', \tau = \tau'$, ein ander Mal $\sigma = \sigma' + \overset{\wedge}{\eta}, \tau = \tau' + \overset{\wedge}{\eta}'$, wo die in $\overset{\wedge}{\eta}, \overset{\wedge}{\eta}'$ vorkommenden $\overset{\wedge}{\varkappa}, \overset{\wedge}{\lambda}$ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen, so erhält man in beiden Fällen die gleiche Thetaformel, da die linke und rechte Seite der zweiten Formel sich von der linken und rechten Seite der ersten Formel

beziehlich nur um einen und denselben Factor unterscheiden. Aus der Formel $(\overline{\overline{T}}_2)$ geht also, wenn man an Stelle von σ, τ alle möglichen Lösungen der Congruenzen (C_1), (C_2) einführt, immer die nämliche Thetaformel hervor.

Um dieselbe zu erhalten, setze man nun in $(\overline{\overline{T}}_2)$ an Stelle von σ, τ jene specielle Lösung der Congruenzen (C_1), (C_2), welche man erhält, wenn man die linken Seiten dieser Congruenzen gleich Null setzt und das so entstehende Gleichungenpaar nach σ, τ als Unbekannten auflöst; bezeichnet man die sich ergebenden Werthe mit $\overset{*}{\sigma}, \overset{*}{\tau}$, so ist:

$$\overset{*}{\sigma} = \frac{1}{2n}\left[n\alpha\beta + n_1\alpha\beta\gamma + n_2\alpha\beta\delta + \frac{\alpha^2\gamma}{n_2}(n_1 - \varkappa')\varkappa'\right],$$

$$\overset{*}{\tau} = \frac{1}{2n}\left[n\gamma\delta - n_1\alpha\gamma\delta - n_2\beta\gamma\delta - \frac{\alpha\gamma^2}{n_2}(n_1 - \varkappa')\varkappa'\right],$$

und man zeigt leicht, dass die auf den rechten Seiten dieser Gleichungen stehenden Ausdrücke in der That ganzzahlige Werthe besitzen. Setzt man aber in $(\overline{\overline{T}}_2)$:

$$\sigma = \overset{*}{\sigma}, \qquad \tau = \overset{*}{\tau}$$

und dividirt noch linke und rechte Seite der entstehenden Gleichung, nachdem man die in dritter Zeile stehende Summe nach $\varkappa$ durch ihren Werth n_1, die in vierter Zeile stehende Summe nach λ durch ihren Werth n_2 ersetzt hat, durch $n = n_1 n_2$, so erhält man *die zweite specielle der ganzzahligen zur Zahl n gehörigen Transformation entsprechende Thetaformel* in der Gestalt:

$$(T_2) \qquad \frac{1}{n^2} D''_{\overset{*}{\sigma},\overset{*}{\tau}} \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \sqrt{\frac{-\pi i^{\varrho}}{\widetilde{\beta} A}}\, e^{-\frac{\beta u^2}{A}}\, e^{\psi(g,h)}\, e^{\widetilde{\varphi}(\overset{0}{\sigma})}\, \widetilde{G}[\overset{0}{\sigma}]$$

$$\times e^{-\frac{2}{n}(\hat{g}+\overset{0}{\sigma})\overset{*}{\tau}\pi i} \prod_{\varkappa=0}^{\varkappa=n_1-1} \prod_{\lambda=0}^{\lambda=n_2-1} \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g}+\overset{*}{\sigma}+\eta-\mathfrak{z}}{n} \\ \dfrac{\hat{h}+\overset{*}{\tau}+\eta'-\mathfrak{z}'}{n} \end{bmatrix}(v)_b.$$

In dieser Formel haben die vorkommenden Abkürzungen und Symbole $A, B, v, b, \eta, \eta', \hat{g}, \hat{h}, \psi(g,h), \widetilde{\varphi}(\overset{0}{\sigma}), \widetilde{G}[\overset{0}{\sigma}], \overset{0}{\sigma}, \varrho, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ die nämliche Bedeutung wie bei der Formel (T); es ist ferner:

$$n_1 = \frac{n}{t_{\alpha\gamma}}, \qquad n_2 = t_{\alpha\gamma},$$

wenn $t_{\alpha\gamma}$ den grössten gemeinsamen Theiler der beiden Zahlen α und γ bezeichnet; es ist weiter:

$$\mathfrak{z} = \frac{n_1 - 1}{2}\alpha - \frac{n_2 - 1}{2}\beta, \qquad \mathfrak{z}' = -\frac{n_1 - 1}{2}\gamma + \frac{n_2 - 1}{2}\delta;$$

ferner:

$$\overset{*}{\sigma} = \frac{1}{2n}\left[n\alpha\beta + n_1\alpha\beta\gamma + n_2\alpha\beta\delta + \frac{\alpha^2\gamma}{n_2}(n_1 - \varkappa')\,\varkappa'\right],$$

$$\overset{*}{\tau} = \frac{1}{2n}\left[n\gamma\delta - n_1\alpha\gamma\delta - n_2\beta\gamma\delta - \frac{\alpha\gamma^2}{n_2}(n_1 - \varkappa')\,\varkappa'\right],$$

wobei $\varkappa'$ die durch die Congruenzen:

$$-\beta n_2 \equiv \alpha\varkappa' \pmod{n}, \qquad \delta n_2 \equiv -\gamma\varkappa' \pmod{n}$$

eindeutig bestimmte Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots, n_1 - 1$ bedeutet; es bezeichnet endlich $D^{\varkappa'}_{\overset{*}{\sigma},\overset{*}{\tau}}$ jenen speciellen Werth, der aus $D_{\sigma,\tau}$ hervorgeht, wenn man darin $\sigma = \overset{*}{\sigma}$, $\tau = \overset{*}{\tau}$ setzt und den für die Constanten $g_1, \ldots, g_n$, $h_1, \ldots, h_n$ im Anfange dieses Artikels eingeführten speciellen Werthen entsprechend:

$$g'_{\varkappa n_2+\lambda} = -\frac{1}{2n}\varkappa(\varkappa+1)\,n_2\alpha + \frac{1}{2n}[\lambda(\lambda+1) - \varkappa n_2(n_2 - 2\lambda - 1)]\,\beta,$$

$$h'_{\varkappa n_2+\lambda} = +\frac{1}{2n}\varkappa(\varkappa+1)\,n_2\gamma - \frac{1}{2n}[\lambda(\lambda+1) - \varkappa n_2(n_2 - 2\lambda - 1)]\,\delta,$$

$$\begin{pmatrix}\varkappa = 0, 1, \cdots, n_1 - 1\\ \lambda = 0, 1, \cdots, n_2 - 1\end{pmatrix}$$

wobei das Werthepaar $\varkappa = 0$, $\lambda = 0$ aber auszuschliessen ist, setzt.

5.

Beispiele.

Setzt man in den Formeln (T), (T_1), (T_2):

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = n,$$

so erhält man als Lösung des durch die Charakteristik:

$$T' = \left|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & n \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsproblems:

1) aus der Formel (T) *die allgemeine Formel:*

$$(T') \qquad D_\tau\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} e^{-\frac{2}{n}(g+\varkappa)\tau\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{g+\varkappa}{n} + g_1 \\ h + \frac{\tau}{n} + h_1 \end{bmatrix}(u)_{na} \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{g+\varkappa}{n} + g_n \\ h + \frac{\tau}{n} + h_n \end{bmatrix}(u)_{na},$$

bei der τ eine beliebige ganze Zahl, $g_1, \ldots, g_n$, $h_1, \ldots, h_n$ $2n$ Constanten, welche den Bedingungen:

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_n = 0, \qquad h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 0$$

genügen, bedeuten, D_τ aber die Summe:

$$D_\tau = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} e^{-\frac{2}{n}\tau\varkappa\pi i} C_\varkappa$$

bezeichnet, wenn man allgemein unter C_μ den auf Seite 490 angeschriebenen Ausdruck versteht;

2) aus der Formel (T_1) *die erste specielle Formel:*

$$(T_1') \qquad D_\tau' \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (u)_a = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} e^{-\frac{2}{n}(g+\varkappa)\tau\pi i} \vartheta^n \begin{bmatrix} \frac{g+\varkappa}{n} \\ h + \frac{\tau}{n} \end{bmatrix} (u)_{na},$$

bei der τ ebenfalls eine beliebige ganze Zahl bedeutet, D_τ' aber jenen speciellen Ausdruck bezeichnet, der aus D_τ hervorgeht, wenn man die in C_μ vorkommenden Grössen g_ν', h_ν' $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ alle der Null gleich setzt;

3) aus der Formel (T_2) *die zweite specielle Formel:*

$$(T_2') \qquad \frac{1}{n} D_0'' \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (u)_a = \prod_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{g+\varkappa}{n} - \frac{n-1}{2n} \\ h \end{bmatrix} (u)_{na},$$

bei der D_0'' jenen speciellen Ausdruck bezeichnet, der aus D_τ hervorgeht, wenn man $\tau = 0$ und in C_μ für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$g_\nu' = -\frac{1}{2n}\nu(\nu+1), \qquad h_\nu' = 0$$

setzt.

Setzt man degegen in den Formeln (T), (T_1), (T_2):

$$\alpha = m, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = m,$$
$$n = m^2,$$

so erhält man als Lösung des durch die Charakteristik:

$$T'' = \left| \begin{array}{c|c} m & 0 \\ \hline 0 & m \end{array} \right|$$

bestimmten Transformationsproblems:

1) aus der Formel (T) *die allgemeine Formel:*

$$(T'') \qquad m D_{\sigma,\tau} \vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (u)_a = \sum_{\varkappa,\lambda}^{0,1,\ldots,m-1} e^{-2g\lambda\pi i - \frac{2}{m}(g+\varkappa)\tau\pi i}$$

$$\times \vartheta \begin{bmatrix} \frac{g+\varkappa}{m} + \frac{\sigma}{m^2} + g_1 \\ \frac{h+\lambda}{m} + \frac{\tau}{m^2} + h_1 \end{bmatrix} \left(\frac{u}{m}\right)_a \cdots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{g+\varkappa}{m} + \frac{\sigma}{m^2} + g_{m^2} \\ \frac{h+\lambda}{m} + \frac{\tau}{m^2} + h_{m^2} \end{bmatrix} \left(\frac{u}{m}\right)_{a'},$$

bei der σ, τ beliebige ganze Zahlen $g_1, \ldots, g_{m^2}$, $h_1, \ldots, h_{m^2}$ $2m^2$ Constanten, welche den Bedingungen:

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_{m^2} = 0, \qquad h_1 + h_2 + \cdots + h_{m^2} = 0$$

genügen, bedeuten, $D_{\sigma,\tau}$ aber die Summe:

$$D_{\sigma,\tau} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=m-1} e^{\frac{2}{m}\tau\varkappa\pi i} C_{\sigma-m\varkappa}$$

bezeichnet, wenn man allgemein unter C_μ den auf Seite 490 angeschriebenen Ausdruck versteht;

2) aus der Formel (T_1) *die erste specielle Formel:*

$$(T_1'') \qquad m D'_{\sigma,\tau}\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a$$

$$= \sum_{\varkappa,\lambda}^{0,1,\ldots,m-1} e^{-2g\lambda\pi i - \frac{2}{m}(g+\varkappa)\tau\pi i}\, \vartheta^{m^2}\begin{bmatrix} \frac{g+\varkappa}{m} + \frac{\sigma}{m^2} \\ \frac{h+\lambda}{m} + \frac{\tau}{m^2} \end{bmatrix}\left(\frac{u}{m}\right)_a,$$

bei der σ, τ ebenfalls beliebige ganze Zahlen bedeuten, $D'_{\sigma,\tau}$ aber jenen speciellen Ausdruck bezeichnet, der aus $D_{\sigma,\tau}$ hervorgeht, wenn man die in C_μ vorkommenden Grössen g_ν', h_ν' $(\nu = 1, 2, \ldots, m^2 - 1)$ alle der Null gleich setzt;

3) aus der Formel (T_2) *die zweite specielle Formel:*

$$(T_2'') \qquad \frac{1}{m} D''_{0,0}\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(u)_a = \prod_{\varkappa=0}^{\varkappa=m-1} \prod_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{g+\varkappa}{m} - \frac{m-1}{2m} \\ \frac{h+\lambda}{m} - \frac{m-1}{2m} \end{bmatrix}\left(\frac{u}{m}\right)_a,$$

bei der $D''_{0,0}$ jenen speciellen Ausdruck bezeichnet, der aus $D_{\sigma,\tau}$ hervorgeht, wenn man $\sigma = 0$, $\tau = 0$ und in C_μ:

$$g'_{\varkappa m+\lambda} = -\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa+1),$$

$$h'_{\varkappa m+\lambda} = -\frac{1}{2m}\lambda(\lambda+1) + \frac{1}{2}\varkappa(m-2\lambda-1), \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 0, 1, \ldots, m-1 \\ \lambda = 0, 1, \ldots, m-1 \end{pmatrix}$$

wobei das Werthepaar $\varkappa = 0$, $\lambda = 0$ aber auszuschliessen ist, setzt.

Strassburg, den 9. April 1893.

Inhalt.

Seite

Einleitung 457

Erster Abschnitt: Aufstellung der zur linearen Transformation L_1 gehörigen Thetaformel.

1. Zusammensetzung der Transformation L_1 aus elementaren 458
2. Die den sechs in Art. 1 erhaltenen elementaren linearen Transformationen entsprechenden Thetaformeln 459
3. Die zur Transformation L' gehörige Thetaformel in einer vorläufigen Gestalt $(\overline{L'})$ 462
4. Untersuchung der Gauss'schen Summe $G[\sigma]$ 464
5. Die zur Transformation L' gehörige Thetaformel in der endgültigen Gestalt (L') 468
6. Die zur Transformation L_1 gehörige Thetaformel in einer vorläufigen Gestalt $(\overline{L}_1)$ 471
7. Die zur Transformation L_1 gehörige Thetaformel in der endgültigen Gestalt (L_1) 475
8. Die der ganzzahligen linearen Transformation entsprechende Thetaformel 478

Zweiter Abschnitt: Aufstellung der zur linearen Transformation L_2 gehörigen Thetaformel.

1. Zusammensetzung der Transformation L_2 aus elementaren 479
2. Die den beiden in Art. 1 erhaltenen elementaren linearen Transformationen entsprechenden Thetaformeln 479
3. Die zur Transformation L_2 gehörige Thetaformel (L_2) 480
4. Allgemeine der linearen Transformation L entsprechende Thetaformel (L) 482

Dritter Abschnitt: Aufstellung der der ganzzahligen zur Zahl n gehörigen Transformation T entsprechenden Thetaformel.

1. Die der ganzzahligen zur Zahl n gehörigen Transformation T entsprechende Thetaformel in einer vorläufigen Gestalt $(\overline{T})$ 484
2. Die der ganzzahligen zur Zahl n gehörigen Transformation T entsprechende Thetaformel in der endgültigen allgemeinsten Gestalt (T) 486
3. Erste specielle Formel für die ganzzahlige zur Zahl n gehörige Transformation 492
4. Zweite specielle Formel für die ganzzahlige zur Zahl n gehörige Transformation 493
5. Beispiele 501

Inhalt 504

Zur Theorie der Functionen eines cubischen Körpers.

Von

Ludwig Baur in Darmstadt.

§ 1.

Durch die irreducibele Gleichung

$$a_0\Theta^3 + a_1\Theta^2 + a_2\Theta + a_3 = 0, \tag{1}$$

in welcher a_0, a_1, a_2, a_3 ganze rationale Functionen der Veränderlichen x ohne gemeinsamen Theiler bedeuten, wird Θ als algebraische Function von x, und zwar, sobald sich a_0 nicht auf eine Constante reducirt, als gebrochene algebraische Function von x definirt.

Setzt man dann

$$z = a_0\Theta + \frac{a_1}{3}, \tag{2}$$

so erhält man für z eine Gleichung von der Form

$$z^3 + b_2 z + b_3 = 0, \tag{3}$$

worin b_2 und b_3 ebenfalls ganze rationale Functionen von x sind, und es ist mithin z jedenfalls eine *ganze algebraische Function* von x.

Man sieht nun sofort, dass auch

$$y = \frac{z}{d} \tag{4}$$

eine ganze Function ist, sobald es eine ganze rationale Function von x, $d(x)$, giebt derart, dass

$$b_2 \equiv 0 \pmod{d^2},$$
$$b_3 \equiv 0 \pmod{d^3}.$$

Bezeichnet man daher durch $G\left(b_i^{\frac{1}{n}}\right)$ die ganze rationale Function von x höchsten Grades, die in $b_i^{\frac{1}{n}}$ aufgeht (dieselbe ist abgesehen von einem constanten Factor vollkommen bestimmt und kann auf rationalem Wege gefunden werden), und versteht jetzt unter $d(x)$ den grössten gemeinsamen Theiler von $G\left(b_2^{\frac{1}{2}}\right)$ und $G\left(b_3^{\frac{1}{3}}\right)$, was durch die Gleichung

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{Th}\left(G\left(b_2^{\frac{1}{2}}\right),\ G\left(b_3^{\frac{1}{3}}\right)\right) = d(x)$$

ausgedrückt werden möge, so kann

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} b_2 &= d^2 f_2, \\ b_3 &= d^3 f_3 \end{aligned}$$

gesetzt werden, und es besteht dann für y die Gleichung

$$\text{(7)} \qquad F(y, x) = y^3 + f_2 y + f_3 = 0,$$

wo jetzt $G\left(f_2^{\frac{1}{2}}\right)$, $G\left(f_3^{\frac{1}{3}}\right)$ keinen gemeinsamen Theiler mehr haben, oder

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{Th}\left(G\left(f_2^{\frac{1}{2}}\right),\ G\left(f_3^{\frac{1}{3}}\right)\right) = 1$$

ist. *y ist daher eine ganze algebraische Function von x, die durch keine ganze rationale Function von x theilbar ist.*

Die Gesammtheit aller rationalen Functionen von Θ und x, $R(\Theta, x)$, bildet einen bestimmten Körper algebraischer Functionen von x, der als der der Gleichung (1) entsprechende *cubische Köper* Ω bezeichnet werden möge. Weil aber wegen (2) und (4) die Gesammtheit der rationalen Functionen von Θ und x vollkommen zusammenfällt mit der der rationalen Functionen von z und x, oder auch von y und x, so können ebensowohl auch die Gleichungen (3) oder (7) zur Definition des cubischen Körpers Ω benutzt werden. Der Einfachheit halber gehen wir bei den folgenden Untersuchungen von der Gleichung (7) aus und bezeichnen dieselbe als die *Grundgleichung des Körpers* Ω.

Unter den Functionen des Körpers Ω verdienen diejenigen eine besondere Betrachtung, die zugleich *algebraisch ganz* sind; ihre Gesammtheit soll als das *System* $\mathfrak{o}$ bezeichnet werden.

Die Fundamentalaufgabe der ganzen Theorie besteht nun darin, eine Basis für $\mathfrak{o}$ (ein Fundamentalsystem des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}(x, y)$) anzugeben, d. h. ein System von 3 ganzen Functionen ω_1, ω_2, ω_3 in $\mathfrak{o}$ derart, dass sich jede andere Function ω in $\mathfrak{o}$ in der Form darstellen lässt

$$\omega = u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + u_3\omega_3,$$

wo u_1, u_2, u_3 *ganze* rationale Functionen von x sind. Es soll nun im folgenden eine solche *Basis* für unser System $\mathfrak{o}$ wirklich aufgestellt und im Anschluss daran die Berechnung der *Verzweigungszahl* und des *Geschlechtes* des Körpers Ω gegeben werden. Es wird sich dabei zeigen, dass alle hierfür nöthigen Grössen auf rationalem Wege durch alleinige Anwendung des Euklidischen Verfahrens zur Bestimmung des grössten gemeinsamen Theilers gefunden werden können und dass insbesondere die Coefficienten der Basis rational aus denen der ursprünglichen Gleichung zusammengesetzt sind.

§ 2.*)

Jede Function η in Ω kann, wenn r_1, r_2, r_3 ganze oder gebrochene rationale Functionen von x bedeuten, in der Form

$$\eta = r_1 + r_2 y + r_3 y^2 \tag{9}$$

dargestellt werden. Die Functionen $1, y, y^2$ bilden daher eine *Basis für* Ω. Es ist dann:

$$\eta y = -f_3 r_3 + (r_1 - f_2 r_3) y + r_2 y^2,$$
$$\eta y^2 = -f_3 r_2 - (f_2 r_2 + f_3 r_3) y + (r_1 - f_2 r_3) y^2,$$

mithin ergiebt sich für η die Gleichung

$$\varphi(\eta) = \begin{vmatrix} r_1 - \eta & r_2 & r_3 \\ -f_3 r_3 & r_1 - f_2 r_3 - \eta & r_2 \\ -f_3 r_2 & -f_2 r_2 - f_3 r_3 & r_1 - f_2 r_3 - \eta \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Bringt man dieselbe auf die Form

$$\eta^3 - B_1(r_1, r_2, r_3)\eta^2 + B_2(r_1, r_2, r_3)\eta - B_3(r_1, r_2, r_3) = 0, \tag{11}$$

so wird B_1 die *Spur*, B_3 die *Norm* von η genannt, so dass

$$S(\eta) = B_1(r_1, r_2, r_3) = r_1 + (r_1 - f_2 r_3) + (r_1 - f_2 r_3) = 3r_1 - 2f_2 r_3, \tag{12}$$

$$N(\eta) = B_3(r_1, r_2, r_3) = \varphi(0) \tag{13}$$
$$= r_1^3 - f_3 r_2^3 + f_3^2 r_3^3 - 2f_2 r_1^2 r_3 + f_2 r_1 r_2^2 + f_2^2 r_1 r_3^2 - f_2 f_3 r_2 r_3^2 + 3 f_3 r_1 r_2 r_3.$$

Sind ferner η_1, η_2, η_3 drei beliebige Functionen aus Ω, so wird die durch die Gleichung

$$\Delta(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = |S(\eta_i \eta_k)| \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{14}$$

definirte Function als die *Discriminante des Systems* η_1, η_2, η_3 bezeichnet. Norm und Spur einer ganzen Function, sowie die Discriminante eines Systems ganzer Functionen sind ganze rationale Functionen von x und wegen der Gleichungen

$$S(1) = 3,$$
$$S(y) = 0,$$
$$S(y^2) = -2f_2,$$
$$S(y^3) = -f_2 S(y) - f_3 S(1) = -3f_3,$$
$$S(y^4) = -f_2 S(y^2) - f_3 S(y) = 2f_2^2$$

ist insbesondere

---

*) Für das folgende vergl. namentlich Dedekind-Weber, Theorie der algebraischen Functionen § 1—3. J. f. M. Bd. 92.

$$\Delta(1, y, y^2) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2f_2 \\ 0 & -2f_2 & -3f_3 \\ -2f_2 & -3f_3 & 2f_2^2 \end{vmatrix},$$

oder

$$-\Delta(1, y, y^2) = \Delta = 27f_3^2 + 4f_2^3. \tag{15}$$

Bedeuten weiterhin u_1, u_2, u_3 unbestimmte *ganze* rationale Functionen von x, so bildet die Gesammtheit aller Functionen von der Form

$$u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + u_3\eta_3$$

den Modul $[\eta_1, \eta_2, \eta_3]$ und das System η_1, η_2, η_3 die Basis dieses Moduls. Besteht die Basis eines solchen Moduls aus lauter ganzen Functionen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, so sind sicher alle Functionen des Moduls $[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ ebenfalls ganze Functionen; es ist aber keineswegs ausgeschlossen, dass auch noch die Function

$$\omega = \frac{u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + u_3\omega_3}{g}, \tag{16}$$

wo g eine ganze rationale Function von x bedeutet, zu dem System $\mathfrak{o}$ gehört. Angenommen dies wäre der Fall und $x - c$ ein Linearfactor des Nenners g, so müssten sich die Constanten c_1, c_2, c_3 so bestimmen lassen, dass auch

$$\overline{\omega} = \frac{c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3}{x - c}$$

algebraisch ganz ist. Sind dann ausserdem noch die Functionen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ linear unabhängig, so bilden sie eine Basis für Ω, ihre Discriminante verschwindet nicht identisch und es besteht die Gleichung

$$\Delta(\overline{\omega}, \omega_2, \omega_3) = \frac{c_1^2}{(x-c)^2}\Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3)^*)$$

woraus, da $\Delta(\overline{\omega}, \omega_2, \omega_3)$ eine ganze rationale Function von x ist, folgt:

Sind $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ drei linear unabhängige Functionen des Systems $\mathfrak{o}$, so kann die Function (16) *nur dann ebenfalls dem Systeme $\mathfrak{o}$ angehören, wenn in ihrem Nenner blos solche Linearfactoren auftreten, deren Quadrat in der Discriminante des Systems $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ aufgeht.*

Es giebt demnach immer nur eine beschränkte Anzahl von Linearfunctionen, durch die Functionen eines Moduls $[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ theilbar sein können; und insbesondere kann eine Function des Moduls $[1, y, y^2]$ nur dann durch eine Linearfunction $x - c$ theilbar sein, wenn Δ durch $(x-c)^2$ theilbar ist.

*) Wäre etwa $c_1 = 0$ und c_2 von 0 verschieden, so würde

$$\Delta(\omega_1, \overline{\omega}, \omega_3) = \frac{c_2^2}{(x-c)^2}\Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

sein etc.

Diese Theiler $x - c$ aufzusuchen und der Reihe nach zu entfernen, wird unsere nächste Aufgabe sein.

§ 3.

1) Da in der Grundgleichung

$$y^3 + f_2 y + f_3 = 0 \tag{7}$$

die Coefficienten f_2 und f_3 so beschaffen sind, dass

$$\mathrm{Th}\left(G\left(f_2^{\frac{1}{2}}\right),\ G\left(f_3^{\frac{1}{3}}\right)\right) = 1 \tag{8}$$

ist, so kann der grösste gemeinsame Theiler von f_2 und f_3 keine höhere wie die zweite Potenz eines Linearfactors enthalten und daher

$$\mathrm{Th}\,(f_2, f_3) = AB^2 \tag{17}$$

gesetzt werden mit der Massgabe, dass die in A und B auftretenden Linearfactoren alle von einander verschieden sind.

Die ganzen rationalen Functionen A und B von x können dann auf rationalem Wege gefunden werden und man erhält für f_2 und f_3 die Darstellung

$$\begin{aligned} f_2 &= AB^2 h_2, \\ f_3 &= AB^2 h_3, \end{aligned} \tag{18}$$

wo die ganze rationale Function h_3 von x relativ prim zu h_2 und zu B, also

$$\mathrm{Th}\,(h_3, h_2) = \mathrm{Th}\,(h_3, B) = 1 \tag{19}$$

ist.

Demnach sind in dem Modul $[1, y, y^2]$ die beiden Basisfunctionen 1 und y selbst durch eine ganze rationale Function $g(x)$ nicht theilbar. Dagegen genügt y^2 nach (10) der Gleichung

$$\begin{vmatrix} -y^2 & 0 & 1 \\ -f_3 & -f_2 - y^2 & 0 \\ 0 & -f_3 & -f_2 - y^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(y^2)^3 + 2f_2(y^2)^2 + f_2^2 \cdot y^2 - f_3^2 = 0,$$

und es ist daher y^2 immer und nur dann durch $g(x)$ theilbar, wenn gleichzeitig

$$\begin{aligned} f_2 &= A\,B^2 h_2 \equiv 0 \pmod{g}, \\ f_3^2 &= A^2 B^4 h_3^2 \equiv 0 \pmod{g^3}. \end{aligned}$$

Mithin ist y^2 jedenfalls theilbar durch die ersten Potenzen aller Linearfactoren von B, ferner durch die ersten Potenzen derjenigen Linearfactoren von A, die zugleich in h_3 enthalten sind, aber auch durch keine anderen. Denn wäre y^2 theilbar durch einen von den genannten

verschiedenen Factor $x - c$, so müsste h_2 und h_3 durch $x - c$ theilbar sein, was gegen (19) verstösst.

Setzt man daher

$$\text{Th}(A, h_3) = A_1, \tag{20}$$

so ist

$$y_3 = \frac{y^2}{A_1 B} \tag{21}$$

eine ganze Function, und die drei ganzen Functionen $1, y, y_3$, von denen keine mehr durch eine ganze rationale Function von x theilbar ist, bilden jetzt ebenfalls eine Basis von Ω, während gleichzeitig

$$\Delta(1, y, y_3) = \frac{1}{A_1^2 B^2} \cdot \Delta(1, y, y^2) \tag{22}$$

ist.

2) Im Anschluss an (20) werde noch

$$\begin{aligned} A &= A_1 A_2, \\ h_3 &= A_1 h_4 \end{aligned} \tag{23}$$

gesetzt, dann muss h_4 prim zu A_2, h_2 prim zu A_1 und h_4 sein, und es ergiebt sich

$$\begin{aligned} f_2 &= A_1 A_2 B^2 h_2, \\ f_3 &= A_1^2 A_2 B^2 h_4, \end{aligned} \tag{24}$$

— woraus wegen (8) folgt, dass h_4 prim zu B ist — und

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2, \tag{25}$$

wo

$$\Delta_1 = A_1^3 A_2^2 B^4 = A_1 \,\text{Th}(f_2, f_3)^2, \tag{26}$$

$$\Delta_2 = 4 A_2 B^2 h_2^3 + 27 A_1 h_4^2. \tag{27}$$

Dieses Δ_2 hat dann die wichtige Eigenschaft, prim zu A_1, A_2, B, h_2, h_4, d. h. prim zu f_2, f_3 und Δ_1 zu sein. Denn die Congruenz $\Delta_2 \equiv 0$ nach einem der Linearfactoren von A_2, B, h_2 als Modul würde die Congruenz $A_1 h_4 \equiv 0$ bezüglich desselben Moduls nach sich ziehen, was den Eigenschaften dieser Functionen widerspricht, und entsprechend verhält es sich bezüglich der Linearfactoren von A_1 und h_4.

Für die Discriminante des Systems $1, y, y_3$ erhält man schliesslich den Ausdruck

$$\Delta(1, y, y_3) = A_1 A_2^2 B^2 \Delta_2, \tag{28}$$

und es ist damit $\Delta(1, y, y_3)$ in eine Reihe von Factoren zerlegt, die alle prim zu einander sind.

3) Nunmehr ist jede Function w des Moduls $[1, y, y_3]$, d. h., wenn v_1, v_2, v_3 unbestimmte ganze rationale Functionen von x bedeuten, jede Function w von der Form

$$w = v_1 + v_2 y + \frac{v_3}{A_1 B} y^2 \tag{29}$$

eine Function in o. Da gemäss der Gleichung (28) die Discriminante des Systems $1, y, y_3$ die Factoren von A_1 alle blos in der ersten Potenz enthält, so ist w sicher nicht durch einen dieser Factoren theilbar (§ 2). Soll deshalb die Function w auf ihre Theilbarkeit durch eine ganze rationale keine mehrfachen Linearfactoren enthaltende Function $g(x)$ untersucht werden, so dürfen wir von vornherein voraussetzen, dass $g(x)$ relativ prim zu A_1 ist; und es sind dann weiterhin nach Herrn Hensel der Reihe nach die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzustellen, dass w in dessen Sinne durch $g^{\frac{1}{3}}$, $g^{\frac{1}{2}}$, $g^{\frac{2}{3}}$, g theilbar sei.*)

Heisst die Gleichung für w

$$(30)\quad w^3 - B_1(v_1, v_2, v_3)w^2 + B_2(v_1, v_2, v_3)w - B_3(v_1, v_2, v_3) = 0,$$

so ist w dann und nur dann durch $g^{\frac{1}{3}}$ theilbar, wenn

$$(31)\qquad B_i^{(i-1)}(v_1, v_2, v_3) \equiv 0 \pmod{g}. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Dabei bedeutet $B_i^{(i-1)}$ jede $(i-1)^{te}$ Ableitung der Form $B_i(v_1, v_2, v_3)$ nach den Unbestimmten v_1, v_2, v_3. Da aber unter den Basisfunctionen des Moduls $[1, y, y_3]$ die Function „1" sich findet, so sind B_1 und die Ableitungen $B_2^{(1)}$ homogene lineare Functionen der Ableitungen $B_3^{(2)}$**), und es reducirt sich das System (31) auf das einfachere

$$\frac{\partial^2 B_3}{\partial v_i \partial v_k} \equiv 0 \pmod{g},$$

oder, da $B_3 = N(w)$, auf

$$(32)\qquad \frac{\partial^2 N(w)}{\partial v_i \partial v_k} \equiv 0 \pmod{g} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Nun ist (13)

$$N(w) = v_1^3 - f_3 v_2^3 + \frac{f_3^2}{A_1^2 B^3} v_3^3 - \frac{2f_2}{A_1 B} v_1^2 v_3 + f_2 v_1 v_2^2 + \frac{f_2^2}{A_1^2 B^2} v_1 v_3^2 - \frac{f_2 f_3}{A_1^2 B^2} v_2 v_3^2 + \frac{3f_3}{A_1 B} v_1 v_2 v_3,$$

*) Für das Folgende siehe: Hensel „Ueber die Darstellung der ganzen algebraischen Functionen einer Variabelen durch ein Fundamentalsystem". Journal für Mathematik Bd. 111, S. 139—155. — Diese Arbeit enthält eine Berichtigung eines Versehens, das sich in eine frühere Arbeit desselben Verfassers (Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen etc. Journal für Mathematik Bd. 109, S. 1—42) eingeschlichen hat. Der in der letztgenannten Arbeit am Schluss von Nr. V aufgestellte Satz über die Theilbarkeit einer algebraischen Form durch eine ganze rationale Form ist nur in dem speciellen Falle $n = 2$ durchaus giltig.

**) Hensel, J. f. M. Bd. 109, p. 15. Die linke Seite der Gleichung (30) ist hier

$$= -N(v_1 - w + v_2 y + v_3 y_3),$$

also auch

$$= -B_3(v_1 - w, v_2, v_3),$$

und daraus folgt

$$B_2 = \frac{\partial B_3}{\partial v_1}, \quad B_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_3}{\partial v_1^2}.$$

$$N_1 = 3v_1^2 - \frac{4f_2}{A_1B}v_1v_3 + f_2v_2^2 + \frac{f_2^2}{A_1^2B^2}v_3^2 + \frac{3f_3}{A_1B}v_2v_3,$$

$$N_2 = -3f_3v_2^2 + 2f_2v_1v_2 - \frac{f_2f_3}{A_1^2B^2}v_3^2 + \frac{3f_3}{A_1B}v_1v_3,$$

$$N_3 = \frac{3f_3^2}{A_1^3B^3}v_3^2 - \frac{2f_2}{A_1B}v_1^2 + \frac{2f_2^2}{A_1^2B^2}v_1v_3 - \frac{2f_2f_3}{A_1^2B^2}v_2v_3 + \frac{3f_3}{A_1B}v_1v_2,$$

$$N_{11} = 6v_1 - \frac{4f_2}{A_1B}v_3,$$

$$N_{12} = 2f_2v_2 + \frac{3f_3}{A_1B}v_3,$$

$$N_{13} = -\frac{4f_2}{A_1B}v_1 + \frac{2f_2^2}{A_1^2B^2}v_3 + \frac{3f_3}{A_1B}v_2,$$

$$N_{22} = -6f_3v_2 + 2f_2v_1,$$

$$N_{23} = -\frac{2f_2f_3}{A_1^2B^2}v_3 + \frac{3f_3}{A_1B}v_1,$$

$$N_{33} = \frac{6f_3^2}{A_1^3B^3}v_3 + \frac{2f_2^2}{A_1^2B^2}v_1 - \frac{2f_2f_3}{A_1^2B^2}v_2.$$

Setzt man für f_2 und f_3 ihre Ausdrücke gemäss (24) ein, so darf man bei den Congruenzen (32), falls etwa auf der linken Seite A_1 als gemeinsamer Factor auftritt, diesen Factor ganz weglassen, da ja A_1 relativ prim zu $g(x)$ ist, und man erhält zunächst die Congruenzen:

$$V_1 = 3v_1 - 2A_2Bh_2v_3 \equiv 0,$$
$$V_2 = A_2B(2Bh_2v_2 + 3h_4v_3) \equiv 0.$$

Da ferner

$$N_{13} = -4A_2Bh_2v_1 + 2A_2^2B^2h_2^2v_3 + 3A_1A_2Bh_4v_2$$
$$= -A_2Bh_2V_1 - A_2B(h_2v_1 - 3A_1h_4v_2),$$

so folgt weiter

$$V_3 = A_2B(h_2v_1 - 3A_1h_4v_2) \equiv 0.$$

Die übrigen Ableitungen lassen sich alle als homogene lineare Functionen von V_1, V_2, V_3 darstellen, nämlich

$$N_{22} = 2A_1BV_3,$$
$$N_{23} = A_1B^2h_3V_1,$$
$$N_{33} = A_2Bh_2V_3 + A_1A_2h_4V_2,$$

so dass sich die Congruenzen (32) auf

$$3v_1 - 2A_2Bh_2v_3 \equiv 0 \pmod{g},$$
$$A_2B(2Bh_2v_2 + 3h_4v_3) \equiv 0 \quad ,, \quad ,$$
(33)
$$A_2B(h_2v_1 - 3A_1h_4v_2) \equiv 0 \quad ,,$$

reduciren.

*) Zur Abkürzung wird, wie üblich, $\frac{\partial N}{\partial v_i} = N_i$, $\frac{\partial^2 N}{\partial v_i \partial v_k} = N_{ik}$ gesetzt.

Hieraus ist sofort ersichtlich: Nehmen wir für g irgend einen der Factoren von A_2 oder B, so muss nothwendig $v_1 = 0$ sein, d. h. bedeutet g_1 irgend einen Theiler von $A_2 B$, so sind alle durch $g_1^{\frac{1}{3}}$ theilbaren Functionen des Moduls $[1, y, y_3]$ enthalten in der Form

$$w_1 = v_2 y + v_3 \frac{y^2}{A_1 B}.$$

Damit nun w_1 nicht blos durch $g_1^{\frac{1}{3}}$ sondern auch durch $g_1^{\frac{1}{2}}$ theilbar sei, ist nothwendig und hinreichend, dass

$$\overline{B}_i^{(i-1)}(v_2, v_3) \equiv 0 \pmod{g_1}, \qquad \left(i \cdot \tfrac{1}{3} = \text{einer ganzen Zahl}\right),$$

d. h.

$$\overline{B}_3^{(2)}(v_2, v_3) \equiv 0 \pmod{g_1}. \tag{34}$$

Dabei ist:

$$\overline{B}_3(v_2, v_3) = \frac{1}{g_1^{\left[3 \cdot \frac{1}{3}\right]}} \cdot B_3(v_2, v_3) = \frac{1}{g_1} B_3(v_2, v_3),$$

und $B_3(v_2, v_3)$ das absolute Glied in der Gleichung dritten Grades für w_1, so dass

$$B_3(v_2, v_3) = N(w_1).$$

Daher sind die Congruenzen (34) gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial^2 N(w)}{\partial v_i \partial v_k} \equiv 0, \pmod{g_1^2} \qquad (i, k = 2, 3). \tag{35}$$

$N(w_1)$ ergiebt sich am einfachsten aus (13) durch die Substitution

$$r_1 = 0, \quad r_2 = v_2, \quad r_3 = \frac{v_3}{A_1 B},$$

nämlich

$$-N(w_1) = f_3 v_2^3 - \frac{f_3^2}{A_1^3 B^3} v_3^3 + \frac{f_2 f_3}{A_1^2 B^2} v_2 v_3^2.$$

Nun ist aber wegen (24) der Ausdruck $\frac{f_2 f_3}{A_1^2 B^2}$ theilbar durch $A_2^2 B^2$, also sicher auch durch g_1^2 und da in den Congruenzen (35) die Coefficienten der Unbestimmten blos mod. g_1^2 betrachtet zu werden brauchen, so reduciren sich dieselben zunächst auf

$$\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_k}\left(f_3 v_2^3 - \frac{f_3^2}{A_1^3 B^3} v_3^3\right) \equiv 0 \pmod{g_1^2},$$

d. i.

$$f_3 v_2 \equiv 0 \pmod{g_1^2},$$

$$\frac{f_3^2 v_3}{A_1^3 B^3} \equiv 0 \quad \text{„} \quad .$$

Setzt man für f_3 seinen Werth aus (24) ein und berücksichtigt, dass A_1 relativ prim zu A_2B und daher auch zu g_1 ist, so folgt

$$A_2B^2h_4\ v_2 \equiv 0 \pmod{g_1^2},$$
$$A_2^2Bh_4^2v_3 \equiv 0 \quad ,,$$

oder, da g_1 ein Theiler von A_2B, h_4 relativ prim zu A_2B, und die Linearfactoren $x-a''$ von A_2 und $x-b$ von B alle von einander verschieden sind,

$$B\ v_2 \equiv 0 \pmod{g_1},$$
$$A_2v_3 \equiv 0 \pmod{g_1}.$$

Setzt man jetzt für g_1 zuerst einen der Factoren $x-b$, dann einen der Factoren $x-a''$, so muss im ersten Falle $v_3 = 0$, im zweiten Falle $v_2 = 0$*) sein, d. h. von den Functionen des Moduls $[1, y, y_3]$ sind blos die von der Form v_2y theilbar durch $(x-b)^{\frac{1}{2}}$, die von der Form v_3y_3 theilbar durch $(x-a'')^{\frac{1}{2}}$. Da wir aber bereits wissen, dass weder y noch y_3 durch eine ganze rationale Function von x theilbar ist, so folgt: *Die Functionen des Moduls* $[1, y, y_3]$ *sind alle untheilbar durch die Factoren* von A_2 und B, also, vereinigt mit dem, was wir zu Anfang von 3) festgestellt haben, untheilbar durch die Factoren von A_1A_2B d. h. — beiläufig gesagt — durch die *des grössten gemeinsamen Theilers von* f_2 *und* f_3.

Von der Function $g(x)$ dürfen wir daher jetzt voraussetzen, dass dieselbe relativ prim zu A und B sei. Dann aber gehen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen (33) für die Theilbarkeit von w durch $g^{\frac{1}{3}}$ über in

$$\begin{aligned} 3v_1 - 2A_2Bh_2v_3 &\equiv 0 \pmod{g}, \\ 2Bh_2v_2 + 3h_4v_3 &\equiv 0 \quad ,, \quad , \\ h_2v_1 - 3A_1h_4v_2 &\equiv 0 \quad ,, \quad . \end{aligned} \tag{36}$$

Da aber h_4 relativ prim zu Bh_2 ist (§ 3, 2), so kann man zwei ganze rationale Functionen $k(x)$ und $l(x)$ so bestimmen, dass

$$2Bh_2l - 3h_4k = 1, \tag{37}$$

und durch die lineare Transformation

$$\begin{aligned} v_1' &= 3v_1 - 2A_2Bh_2v_3, \\ v_2' &= 2Bh_2v_2 + 3h_4v_3, \\ v_3' &= kv_2 + lv_3, \end{aligned}$$

*) Die unbestimmten Functionen v_1, v_2, v_3 und entsprechende später auftretende können stets bezüglich des betreffenden Moduls als auf den kleinsten Rest reducirt angenommen werden.

aus der sich

$$\begin{aligned} 3v_1 &= v_1' - 2A_2Bh_2kv_2' + 4A_2B^2h_2^2v_3', \\ 3v_2 &= \qquad 3lv_2' - \qquad 9h_4v_3', \\ 3v_3 &= \qquad -3kv_2' + \qquad 6Bh_2v_3' \end{aligned}$$

ergiebt, während gleichzeitig wegen des constanten Werthes der Substitutionsdeterminante

$$(37) \qquad (v_1', v_2', v_3') \sim (v_1, v_2, v_3)$$

ist, verwandeln sich jetzt die Congruenzen (36) in

$$(38) \qquad \begin{aligned} v_1' &\equiv 0 \pmod{g}, \\ v_2' &\equiv 0 \quad \text{„} \quad , \\ \Delta_2 v_3' &\equiv 0 \quad \text{„} \quad . \end{aligned}$$

Dieser Transformation entsprechend kann die Function

$$3w = 3v_1 + 3v_2y + 3v_3y_3$$

in die Form gesetzt werden

$$(39) \qquad 3w = v_1'y_1' + v_2'y_2' + v_3'y_3',$$

wo

$$(40) \qquad \begin{aligned} y_1' &= 1, \\ y_2' &= -2A_2Bh_2k + 3ly - 3ky_3, \\ y_3' &= 4A_2B^2h_2^2 - 9h_4y + 6Bh_2y_3, \end{aligned}$$

und es besteht dann die Aequivalenz

$$(40\,a) \qquad (1, y, y_3) \sim (y_1', y_2', y_3'),$$

so dass die Functionen y_1', y_2', y_3' ebenfalls eine Basis des Moduls $[1, y, y_3]$ bilden. — Die Bedingungen (38) sagen zunächst aus, dass unter den Functionen dieses Moduls nur die in der Form $v_3'y_3'$ enthaltenen durch $g^{\frac{1}{3}}$, also auch nur diese eventuell durch g theilbar sein können. Um weiteren Aufschluss zu erhalten, muss daher die Gleichung für y_3' gebildet werden. Da

$$y_3' = \frac{1}{A_1^3A_2B^3}(4f_2^2 - 9f_3y + 6f_2y^2),$$

so setzen wir

$$(41) \qquad \overline{w} = 4f_2^2 - 9f_3y + 6f_2y^2,$$

und erhalten dann für $\overline{w}$ nach § 2 die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 4f_2^2 - \overline{w} & -9f_3 & 6f_2 \\ -6f_2f_3 & -2f_2^2 - \overline{w} & -9f_3 \\ 9f_3^2 & 3f_2f_3 & -2f_2^2 - \overline{w} \end{vmatrix} = 0$$

oder nach einigen einfachen Umformungen

$$\bar{w}^3 - 3f_2\Delta\bar{w} - \Delta^2 = 0, \tag{42}$$

so dass y_3' der Gleichung genügt:

$$y_3'^3 - 3A_2B^2h_2\Delta_2y_3' - A_2B^2\Delta_2^2 = 0. \tag{43}$$

Soll daher y_3' durch g theilbar sein, so muss, da g als relativ prim zu AB vorausgesetzt werden durfte,

$$h_2\Delta_2 \equiv 0 \pmod{g^2},$$
$$\Delta_2^2 \equiv 0 \pmod{g^3},$$

sein, welche Bedingungen sich wiederum, da auch h_2 prim zu Δ_2 ist, auf die einzige

$$\Delta_2 \equiv 0 \pmod{g^2} \tag{44}$$

reduciren.*) Demnach ist y_3' blos theilbar durch

$$G\left(\Delta_2^{\frac{1}{2}}\right) = D \tag{45}$$

und wenn

$$y' = \frac{y_3'}{D} \tag{46}$$

gesetzt wird, so ist y' durch keine ganze rationale Function von x mehr theilbar. Daraus folgt dann, dass dasselbe von allen Functionen des Moduls

$$[y_1', y_2', y']$$

gilt.

In Folge von (45) ergiebt sich nämlich für Δ_2 die Darstellung

$$\Delta_2 = D^2\Delta_3, \tag{46}$$

wo D und Δ_3 relativ prim zu f_2 und f_3 sind und Δ_3 der Bedeutung von D nach keinen Linearfactor mehr als einmal enthält, und demgemäss hat man, da wegen der Aequivalenz (40a) die Discriminanten der beiden Systeme y_1', y_2', y_3' und $1, y, y_3$ abgesehen von einem constanten Factor übereinstimmen, die Gleichung

$$\begin{aligned}\Delta(y_1', y_2', y') &= \frac{1}{D^2}\Delta(y_1', y_2', y_3') = \frac{\text{const.}}{D^2}\cdot\Delta(1, y, y_3)\\ &= \text{const.}\,.\,A_1A_2^2B^2\Delta_3,\end{aligned} \tag{47}$$

so dass hiermit $\Delta(y_1', y_2', y')$ in ein Product von Factoren zerlegt ist, die alle relativ prim zu einander sind. Da hiernach in $\Delta(y_1', y_2', y')$

*) Man braucht blos zwei ganze rationale Functionen p und q von x so zu bestimmen, dass $p\,h_2 + q\,\Delta_2 = 1$, dann folgt aus den obigen Bedingungen jedenfalls $\Delta_2 \equiv 0 \pmod{g^2}$.

blos die Factoren $x - a''$ und $x - b$ in höherer als der ersten Potenz vorkommen, so könnte eine Function

$$w_2 = v_1 y_1' + v_2 y_2' + v_3 y'$$

des in Rede stehenden Moduls $[y_1', y_2', y']$ nur vielleicht noch durch die eben genannten Linearfactoren theilbar sein. Wäre dies aber der Fall, so müsste auch sicher die Function Dw_2, die dem Modul $[y_1', y_2', y_3']$ angehört, durch jenen Factor theilbar und mithin $v_1 D \equiv v_2 D \equiv 0 \bmod. (x - a'')$ oder $(x - b)$ d. h. $v_1 = v_2 = 0$ sein. Also müsste in diesem Falle w sich auf $v_3 y'$ reduciren, welche Function aber durch keine ganze rationale Function von x mehr theilbar ist. Daraus folgt das Gesagte.

Da andererseits die Functionen des Moduls $[y_1', y_2', y']$ alle ganz sind, so bildet das Functionensystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 1, \\ y_2' &= -2A_2Bh_2k + 3ly - \frac{3ky^2}{A_1B}, \\ y' &= \frac{4f_2^2 - 9f_3y + 6f_2y^2}{A_1^2A_2B^2D} \end{aligned}$$

oder auch das andere

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= 1, \\ \tilde{y}_2 &= ly - \frac{ky^2}{A_1B}, \\ \tilde{y}_3 &= \frac{4f_2^2 - 9f_3y + 6f_2y^2}{A_1^2A_2B^2D} = \frac{4A_2B^2h_2^2 - 9h_4y}{D} + \frac{6h_2}{A_1D}y^2 \end{aligned} \tag{48}$$

eine *Basis von* $\mathfrak{o}$. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Die Function y_2' zeichnet sich von der Function $\tilde{y}_2$ dadurch aus, dass ihre Spur verschwindet. Denn es ist (§ 3, 1)

$$S(y_2') = -6A_2Bh_2k + \frac{3k}{A_1B}2f_2 = 0;$$

y_2' genügt also ebenso wie y' einer reducirten cubischen Gleichung.

Indessen lässt sich überhaupt statt dieses Fundamentalsystems mit Vortheil ein anderes einführen. Da nämlich D zu Folge der Gleichung (46) und k zu Folge der Gleichung (37) keinen Theiler mit Bh_2 gemeinsam hat, so kann man zwei ganze rationale Functionen t und s von x so bestimmen, dass

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6Bh_2 & kD \\ 0 & s & t \end{vmatrix} = 1.$$

Componirt man dann das hier auftretende System mit dem Coeffi-

cientensystem der Basis $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3$, so erhält man das dem letzteren äquivalente System

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{matrix}$$

in welchem

a_{21} eine ganze rationale Function von x,

$a_{22} = 6Bh_2l - 9h_4k = 3$,

$a_{31} = \frac{4A_2B^2h_2^2}{D}t = \frac{2}{3}A_2Bh_2\left(\frac{1}{D} + sk\right) = \frac{2}{3}\frac{A_2Bh_2}{D} + \text{g. r. F. v. } x$,

$a_{32} = -\frac{9h_4t}{D} + \text{g. r. F. v. } x$,

$a_{33} = \frac{1}{A_1BD}$

ist, und welches daher wiederum durch das äquivalente System

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2A_2Bh_2}{3D} & \frac{-9h_4t}{D} & \frac{1}{A_1BD} \end{matrix}$$

ersetzt werden kann. Da eine derartige Composition einer linearen Verbindung der Horizontalreihen entspricht, so bildet auch das Functionensystem

$$\begin{aligned} &\omega_1 = 1, \\ &\omega_2 = y, \\ &\omega_3 = \frac{1}{D}\left(\frac{2}{3}A_2Bh_2 - 9h_4ty + \frac{1}{A_1B}y^2\right) \end{aligned} \tag{49}$$

eine *Basis von* $\mathfrak{o}$, und es ergiebt sich für die Discriminante des Körpers Ω oder des Systems $\mathfrak{o}$ (Gattungsdiscriminante) der Werth

$$\Delta(\Omega) = \Delta(\mathfrak{o}) = \Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -\frac{1}{A_1^2B^2D^2}\Delta,$$

oder

$$\Delta(\Omega) = -A_1A_2^2B^2\Delta_3, \tag{50}$$

während

$$\Delta = -A_1^3A_2^2B^4D^2\Delta_3.$$

Es besitzt somit die *Gleichungsdiscriminante* Δ *den ausserwesentlichen Theiler* $A_1^2B^2D^2$. Noch sei erwähnt, dass auch ω_3 einer reducirten cubischen Gleichung genügt, da

$$S(\omega_3) = \frac{1}{D}\left(2A_2Bh_2 + \frac{1}{A_1B}S(y^2)\right) = 0$$

ist.

§ 4.

Durch die Gleichung (50) ist die Discriminante des Körpers Ω in relative Primfactoren zerlegt. Bezeichnet man die Grade der ganzen rationalen Functionen A_1, A_2, B, Δ_3, die alle auf rationalem Wege gefunden werden, bezüglich durch $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \delta_3$, so ist die Discriminante $\Delta(\Omega)$ vom Grade

$$\alpha_1 + \delta_3 + 2(\alpha_2 + \beta) \tag{52}$$

und es ergiebt sich, dass die dem Körper Ω entsprechende Riemann'sche Fläche T *im Endlichen* $\alpha_1 + \delta_3$ *einfache,* $\alpha_2 + \beta$ *zweifache Verzweigungspunkte besitzt.*

Um die Art der Verzweigung im Unendlichen zu bestimmen, betrachten wir noch das System $\bar{\mathfrak{o}}$ derjenigen Functionen des Körpers Ω, die ganze Functionen von $\bar{x} = \frac{1}{x}$ sind.

Ist die gegebene Gleichung (1) in Bezug auf x vom m^{ten} Grade, so geht dieselbe, wenn man

$$x = \frac{1}{\bar{x}}$$

setzt und beide Seiten mit $\bar{x}^m$ multiplicirt, über in

$$\bar{a}_0 \Theta^3 + \bar{a}_1 \Theta^2 + \bar{a}_2 \Theta + \bar{a}_3 = 0, \tag{53}$$

wo jetzt $\bar{a}_0$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ ganze rationale Functionen von $\bar{x}$ sind, die ebenfalls den Grad m erreichen. Durch 2 Substitutionen, die den in § 1 unter (2) und (4) gemachten durchaus entsprechen, erhält man hieraus die Gleichung

$$\bar{y}^3 + \bar{f}_2 \bar{y} + \bar{f}_3 = 0, \tag{54}$$

und legt man jetzt den Grössen $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots$ in Bezug auf $\bar{f}_2, \bar{f}_3$ genau dieselbe Bedeutung bei, wie den Grössen $A_1, A_2, \ldots$ in Bezug auf f_2 und f_3, so ergiebt sich

$$\Delta_{\bar{x}}(\Omega) = \bar{A}_1 \bar{A}_2^2 \bar{B}^2 \bar{\Delta}_3, \tag{55}$$

und es hat demnach, da die hier auftretenden Factoren alle prim zu einander sind und nur einfache Linearfactoren enthalten, die Fläche T im Unendlichen einen *ein-, zwei-* oder *nullfachen Verzweigungspunkt, je nachdem das Product* $\bar{A}_1 \bar{\Delta}_3$ *oder das Product* $\bar{A}_2 \bar{B}$ *oder keines dieser Producte durch* $\bar{x}$ *theilbar ist.*

Enthalten demnach die Producte $\bar{A}_1 \bar{\Delta}_3$ und $\bar{A}_2 \bar{B}$ den Factor $\bar{x}$ bezüglich ε_1 und ε_2 mal, so ist eine dieser beiden Zahlen gleich Null, die andere gleich 1 oder beide gleich 0 und man erhält für die Gesammtzahl der Verzweigungspunkte von T d. i. für die *Verzweigungszahl* w_x oder $w_{\bar{x}}$ den Ausdruck

$$w_x = w_{\bar{x}} = \alpha_1 + \delta_3 + \varepsilon_1 + 2(\alpha_2 + \beta + \varepsilon_2) \tag{56}$$

und demgemäss für das *Geschlecht* p des Körpers Ω die Gleichung

$$(57) \qquad p = \frac{1}{2} w_x - 2 = \frac{\alpha_1 + \delta_2 + \varepsilon_1}{2} + \alpha_2 + \beta + \varepsilon_2 - 2.^*)$$

Zum Schlusse sei noch hervorgehoben, dass, wenn man Θ und x als Coordinaten eines Punktes in der Ebene ansieht, die Gleichung (1) eine grosse Classe von Curven umfasst, alle diejenigen nämlich, welche in Bezug auf die eine Coordinate von beliebigem, in Bezug auf die andere vom 3ten Grade sind.

Darmstadt, Juni 1893.

---

*) z. B. bei dem durch die binomische Gleichung $a_0\Theta^3 + a_3 = 0$ definirten cubischen Körper ergiebt sich für y eine Gleichung von der Form

$$y^3 = R(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_\alpha)\,(x - b_1)^2 \ldots (x - b_\beta)^2 = AB^2.$$

Es ist dann

$$\Delta(1, y, y^2) = -27A^2B^4, \qquad \omega_1 = 1, \qquad \omega_2 = y, \qquad \omega_3 = \frac{y^2}{B} = \frac{y^3}{G(y^2)},$$
$$\Delta(0) = -A^2B^2.$$

Wird dann $\alpha + 2\beta = 3\mu - \varepsilon$, $0 \leqq \varepsilon < 3$, und $\bar{x}^\mu y = \bar{y}$ gesetzt, so folgt

$$\bar{y}^3 = \bar{x}^\varepsilon \Pi(1 - a_\iota \bar{x})\,(1 - b_\varkappa \bar{x})^2 = \bar{A}\bar{B}^2.$$

Ist dann weiter $\varepsilon = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$, so müssen die beiden Zahlen ε_1 und ε_2 entweder beide zugleich verschwinden oder die eine muss den Werth 0, die andere den Werth 1 haben, und demgemäss

$$\bar{A} = \bar{x}^{\varepsilon_1} \Pi(1 - a_\iota \bar{x}), \quad \bar{B} = \bar{x}^{\varepsilon_2} \Pi(1 - b_\varkappa \bar{x}), \quad \Delta(\bar{0}) = \bar{x}^{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}(1 + \bar{x}g(\bar{x}))$$

sein. Daraus folgt dann

$$w_x = w_{\bar{x}} = 2(\alpha + \beta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$
$$p = \alpha + \beta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2;$$

d. h. *Ist* $\varepsilon = 0$, *also der Grad von* $R(x)$ *ein genaues Vielfaches von* 3, *so ist das Geschlecht des vorliegenden binomischen Körpers gleich* $\alpha + \beta - 2$, *in jedem anderen Falle gleich* $\alpha + \beta - 1$.

Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie.

Von

H. Weber in Göttingen.

Im Folgenden ist der Versuch gemacht, die Galois'sche Theorie der algebraischen Gleichungen in einer Weise zu begründen, die soweit möglich alle Fälle umfasst, in denen diese Theorie angewandt worden ist. Sie ergiebt sich hier als eine unmittelbare Consequenz des zum Körperbegriff erweiterten Gruppenbegriffs, als ein formales Gesetz ganz ohne Rücksicht auf die Zahlenbedeutung der verwendeten Elemente. Diese Begründung ist hiernach also auch ganz unabhängig von dem Fundamentalsatz der Algebra über die Wurzelexistenz. Die Theorie erscheint bei dieser Auffassung freilich als ein reiner Formalismus, der durch Belegung der einzelnen Elemente mit Zahlwerthen erst Inhalt und Leben gewinnt. Dagegen ist diese Form auf alle denkbaren Fälle, in denen die gemachten Voraussetzungen zutreffen, anwendbar, die einerseits in die Functionentheorie andererseits in die Zahlentheorie hinübergreifen.*)

Ich beginne, um vollständig klar zu sein, mit einer genauen Begriffsbestimmung des Gruppen- und Körperbegriffs, wobei besonders der Körperbegriff so gefasst ist, dass er auch auf Gebilde anwendbar ist, die bisher unter diesem Namen nicht mitbezeichnet waren, die aber doch alle für unsere Frage entscheidenden Merkmale besitzen, nämlich die endlichen Körper, im eigentlichen Sinne, d. h. Körper die nur aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehen.

§ 1.

Gruppen.

Wenn auch der Begriff einer Gruppe schon oft dargelegt worden ist, und die Vorstellungen, die die Mathematiker heutigen Tages mit diesem Worte verbinden, ziemlich übereinstimmend und klar sind, so will ich hier doch mit kurzen Worten noch einmal darauf zurück-

*) Zu verweisen ist hier auf die Abhandlung von Kneser „Arithmetische Begründung einiger algebraischer Fundamentalsätze", (Journal für Mathematik Bd. 102) die theilweise ähnliche Ziele verfolgt.

kommen, um dem Leser keine Ungewissheit über die Auffassung zu lassen, die dem Folgenden zu Grunde liegt.

Ein System $\mathfrak{S}$ von Dingen (Elementen) irgend welcher Art in endlicher oder unendlicher Anzahl wird zur *Gruppe*, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind.

1) *Es ist eine Vorschrift gegeben, nach der aus einem ersten und einem zweiten Element des Systems ein ganz bestimmtes drittes Element desselben Systems abgeleitet wird.*

Man schreibt symbolisch, wenn A das erste, B das zweite, C das dritte Element ist

$$AB = C, \qquad C = AB,$$

und nennt C aus A und B *componirt*.

Bei dieser Composition wird im Allgemeinen nicht das commutative Gesetz vorausgesetzt, d. h. es kann AB von BA verschieden sein; dagegen wird

2) *das associative Gesetz vorausgesetzt*,

d. h. wenn A, B, C irgend drei Elemente aus $\mathfrak{S}$ sind, so ist

$$(AB)C = A(BC),$$

und hieraus folgt durch die Schlussweise der vollständigen Induction, dass man immer zu demselben Resultat kommt, wenn man in einer beliebige Reihe von Elementen von $\mathfrak{S}$ in endlicher Anzahl

$$A, B, C, D, \ldots$$

zuerst zwei benachbarte Elemente componirt, dann wieder zwei benachbarte, u. s. f. bis die ganze Reihe auf ein Element reducirt ist, das mit $ABCD\ldots$ bezeichnet wird.

3) *Es wird vorausgesetzt, dass, wenn $AB = AB'$ oder $AB = A'B$ ist, nothwendig $B = B'$ oder $A = A'$ sein muss.*

Wenn $\mathfrak{S}$ eine endliche Anzahl von Elementen umfasst, so heisst die Gruppe eine *endliche* und die Anzahl ihrer Elemente ihr *Grad*.

Bei endlichen Gruppen ergiebt sich aus 1), 2), 3) die *Folgerung*.

4) *Wenn von den drei Elementen A, B, C zwei beliebig aus $\mathfrak{S}$ genommen werden, so kann man das dritte immer und nur auf eine Weise so bestimmen, dass*

$$AB = C$$

ist.

Sind A und B die gegebenen Elemente, so fällt unsere Behauptung mit 1) zusammen. Ist aber A und C gegeben, so lasse man in dem Compositum AB die zweite Componente B das ganze System $\mathfrak{S}$ durchlaufen, dessen Grad $= n$ sei. Dann erhält man nach 1) und 3) in AB

lauter verschiedene Elemente von $\mathfrak{S}$ und da ihre Anzahl $= n$ ist, so müssen alle Elemente von $\mathfrak{S}$, also auch C, darunter vorkommen. Ebenso schliesst man, wenn B gegeben ist und A das ganze System $\mathfrak{S}$ durchläuft.

Für unendliche Gruppen ist dieser Schluss nicht mehr zwingend. *Für unendliche Gruppen wollen wir also die Eigenschaft* 4) *noch als Forderung in die Beyriffsbestimmung mit aufnehmen.*

Aus dieser Definition ergeben sich unmittelbar einige Folgerungen.

Nach 4) giebt es *ein* Element A_0 in $\mathfrak{S}$, das der Bedingung

$$A_0 B = B \tag{1}$$

genügt, und dies A_0 ist von B unabhängig, denn aus (1) folgt für jedes C

$$A_0 BC = BC,$$

und BC kann nach 4) jedes Element in $\mathfrak{S}$ bedeuten.

Ebenso giebt es ein Element A_0', das der Bedingung

$$BA_0' = B \tag{2}$$

genügt. Dies Element A_0' ist aber von A_0 nicht verschieden, denn setzen wir $B = A_0'$, oder $B = A_0$, so folgt aus (1) und (2)

$$A_0 A_0' = A_0', \qquad A_0 A_0' = A_0$$

also

$$A_0 = A_0'.$$

Das Element A_0, was also mit jedem Element in $\mathfrak{S}$ componirt werden kann, ohne es zu verändern, heisst die *Einheit der Gruppe.*

Zu jedem Element giebt es nach 4) ein bestimmtes Element A^{-1}, das der Bedingung

$$A^{-1} A = A_0 \tag{3}$$

genügt. Aus (3) und (1) folgt

$$A^{-1} A A^{-1} = A_0 A^{-1} = A^{-1} = A^{-1} A_0,$$

und folglich nach 3)

$$A A^{-1} = A_0. \tag{4}$$

Die beiden Elemente A und A^{-1} heissen zu einander *entgegengesetzt* oder *reciprok.*

Ein häufig vorkommender Specialfall ist der, dass bei der Composition auch noch das *commutative Gesetz* gilt, also

$$AB = BA.$$

Solche Gruppen heissen *Abel'sche* oder auch *commutative Gruppen.*

Wenn sich die Elemente zweier Gruppen

$$A, B, C, D, \ldots$$

und

$$A', B', C', D', \ldots$$

in der Weise gegenseitig eindeutig entsprechen, dass immer, wenn

$$AB = C$$

ist, auch

$$A'B' = C',$$

wird, so heissen die Gruppen *isomorph* und es gilt der evidente Satz, dass zwei mit einer dritten isomorphe Gruppen unter einander isomorph sind. Man kann hiernach alle unter einander isomorphen Gruppen zu einer Classe von Gruppen, die selbst wieder eine Gruppe ist, zusammenfassen, deren Elemente die Gattungsbegriffe sind, die man erhält, wenn man die entsprechenden Elemente der einzelnen isomorphen Gruppen zu einem Allgemeinbegriffe zusammenfasst. Die einzelnen unter einander isomorphen Gruppen sind dann als verschiedene Repräsentanten eines Gattungsbegriffs aufzufassen, und es ist gleichgültig, an welchem Repräsentanten man die Eigenschaften der Gruppe studirt.

Dieser allgemeine Gruppenbegriff verhält sich zu den Einzelgruppen etwa so wie der allgemeine Zahlbegriff zu der Vorstellung der gezählten Objecte. Ein ganz scharfer Sprachgebrauch müsste zwischen diesem allgemeinen Gruppenbegriff und den Einzelgruppen unterscheiden; man kommt aber auch ohne eine solche Unterscheidung aus.

Ich führe einige Beispiele an.

1. Die verschiedenen Punkte in einer Ebene bilden eine unendliche Mannigfaltigkeit die man folgendermassen zur Gruppe ordnen kann. Man nimmt einen beliebigen Punkt 0 als Einheit der Gruppe an und construirt aus den beiden Strecken $(0, a)$ $(0, b)$ ein Parallelogramm. Der vierte Eckpunkt c dieses Parallelogramms kann dann als aus a und b componirt betrachtet werden. Diese Gruppe ist *commutativ*. Sie ist isomorph mit der Gruppe der Addition der complexen Zahlen. Die Eckpunkte eines festen Parallelogrammgitters bilden nach demselben Gesichtspunkt gleichfalls eine Gruppe.

2. Die verschiedenen Stellungen eines Körpers, der um einen festen Punkt frei drehbar ist, werden nach folgender Regel gruppirt. Man nehme eine beliebige Stellung O des Körpers als Einheit. Aus dieser Anfangsstellung bringt man den Körper in jede andere Stellung A durch Drehung um eine bestimmte Axe mit einem bestimmten Drehungswinkel. Hält man die Axe im Körper fest, bringt den Körper in eine neue Stellung B und führt dann dieselbe Drehung aus, so gelangt der Körper in eine dritte Stellung C, die aus A und B zusammengesetzt ist, also

$$AB = C.$$

Diese Gruppe ist nicht commutativ; sie ist isomorph mit der Gruppe linearer Substitutionen, durch die die rechtwinklige Coordinatentransformation im Raume ausgedrückt wird.

Im ersten dieser Beispiele kann man auch die *Verschiebungen*, im zweiten die *Drehungen* selbst als Elemente der Gruppe auffassen.

Die beiden genannten Gruppen sind unendliche. Als Beispiel von endlichen Gruppen führen wir an:

3. Die regulären Polyederdrehungen, die in der allgemeinen Drehungsgruppe als Theiler enthalten sind.*)

4. Die *Gruppe der Permutationen* von n Ziffern die deshalb so wichtig sind, weil *alle* endlichen Gruppen darunter ihre Vertreter finden**). Auch hier ist eine doppelte Auffassung möglich. Man kann die Ersetzung einer jeden Ziffer durch eine andere desselben Systems, also die Permutation selbst als Elemente der Gruppe ansehen, also, wenn $1, 2, 3, \ldots, n$ die Ziffern sind und $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dieselben Ziffern in einer anderen Anordnung, die Permutationen

$$\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots, & n \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_n \end{pmatrix},$$

die dann nach bekannten Gesetzen componirt werden. Ich ziehe es vor, statt des gebräuchlichen Ausdrucks „Substitution" für die Operation π, der noch so viele andere Bedeutungen hat, den ja auch oft gebrauchten Ausdruck „Permutation" anzuwenden.

Statt der Permutationen kann man aber auch die *Anordnungen* der n Ziffern als Elemente der Gruppe ansehen. Man wählt dann eine beliebige unter den Anordnungen als Einheit O und setzt zwei andere Anordnungen A und B zu einer dritten Anordnung C zusammen, indem man unter C die Anordnung versteht, die sich durch Anwendung der Permutation (O, A) auf B ergiebt, so dass, wenn

$$O = 1, 2, \ldots, n,$$
$$A = a_1, a_2, \ldots, a_n,$$
$$B = b_1, b_2, \ldots, b_n$$

ist,

$$AB = C = b_{a_1}, b_{a_2}, \ldots, b_{a_n}$$

gefunden wird.

5. Als Beispiele von endlichen commutativen Gruppen führe ich die nach einem Modul m genommenen Zahlclassen an, wobei die Zahlclassen durch ihre absolut kleinsten Repräsentanten

$$0, 1, 2, \ldots, m-1$$

bezeichnet werden können. Diese Zahlclassen bilden bei ihrer Verbindung durch *Addition* eine endliche commutative Gruppe, in der die Null als Einheit der Gruppe zu betrachten ist. Will man die

*) F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder.

**) Vgl. Frobenius und Stickelberger, Journal für Mathematik Bd. 86. Dyck, diese Ann. Bd. 22. Hölder, Ann. Bd. 40.

Zahlclassen durch *Multiplication* zur Gruppe verbinden, so gilt die charakteristische Eigenschaft 3) nicht mehr ausnahmslos. Man stellt eine reine Gruppe erst dadurch her, dass man die Zahlclassen ausscheidet, die zum Modul nicht relativ prim sind. In dieser Gruppe ist 1 das Einheitselement.

Endlich mögen noch die Classen binärer quadratischer Formen von gegebener Determinante erwähnt werden, die durch die Gauss'sche Composition zur Gruppe geordnet werden.

§ 2.

Körper.

Eine Gruppe wird zum Körper, wenn in ihr *zwei Arten der Composition* möglich sind, von denen die erste *Addition*, die zweite *Multiplication* genannt wird. Diese allgemeine Bestimmung müssen wir aber noch etwas einschränken.

1. Wir setzen voraus, dass beide Arten der Composition commutativ seien.

2. Die Addition soll den Bedingungen 1., 2., 3., 4. allgemein genügen. Das Einheitselement für diese Art der Composition wird Null genannt und mit 0 bezeichnet. Das aus a und b durch Addition zusammengesetzte Element wird mit $a + b$ bezeichnet. Ist a irgend ein Element, so wird das nach der ersten Compositionsart entgegengesetzte Element mit $-a$ bezeichnet, und für $a + (-b)$ wird $a - b$ geschrieben. Die dadurch ausgedrückte Verknüpfung der Elemente a und b heisst *Subtraction*.

3. Die zweite Art der Composition, ist die Multiplication, die durch einfaches Nebeneinandersetzen der Componenten ab, oder auch durch $a \,.\, b$ oder $a \times b$ bezeichnet wird. Wir brauchen auch die Ausdrücke Product, Factoren in üblicher Weise.

Die beiden Arten der Composition sollen durch folgende Gesetze mit einander verknüpft sein:

$\alpha)$ $$a(-b) = -ab,$$

$\beta)$ $$a(b+c) = ac + ac,$$

und aus $\alpha)$ folgt noch (nach dem Satz des vorigen Paragraphen, dass das entgegengesetzte Element des entgegengesetzten wieder das ursprüngliche ist)

$\gamma)$ $$(-a)(-b) = ab;$$

ferner folgt aus $\beta)$ wenn man $c = -b$ setzt:

$\delta)$ $$a \,.\, 0 = 0.$$

Aus $\delta)$ aber ergiebt sich, dass für die zweite Composition die Forderung 3) in § 1 nicht allgemein erfüllt sein kann, da, was auch a sei, immer

$0 \cdot a = a$ ist. Wir wollen aber noch die Voraussetzung machen, dass dies die einzige Ausnahme sei, d. h.

aus $ab = ac$ *soll* $b = c$ *folgen, ausser wenn* $a = 0$ *ist.*

Auch die Forderung 4) muss hiernach eine Einschränkung erfahren. Sie wird jetzt durch die folgende ersetzt.

Sind b *und* c *beliebig gegeben, so ist aus*

$$ab = c$$

a *eindeutig bestimmt, ausser wenn* $b = 0$ *ist.*

Ist in diesem Ausnahmefall c nicht $= 0$, so giebt es kein a; ist aber $c = 0$ so ist a völlig unbestimmt. Daraus folgt noch

dass ein Product nur dann Null sein kann, wenn wenigstens einer seiner Factoren Null ist.

Das Einheitselement bei der Multiplication heisst „Eins" und wird mit „1" bezeichnet. Es ist von Null verschieden, wenn wir den interesselosen Fall ausschliessen, dass der Körper nur das einzige Element Null enthält. Jedes Element mit Ausnahme der Null hat sein entgegengesetztes; das zu a entgegengesetzte Element wird mit jedem der drei Zeichen

$$\frac{1}{a}, \quad 1 : a, \quad a^{-1}$$

bezeichnet.

Weitere Voraussetzungen wollen wir über einen Körper nicht machen. Es ergiebt sich aber aus dieser Definition, dass die rationalen Rechenoperationen in jedem Körper unbeschränkt ausgeführt werden können, dass z. B. Sätze wie die über die Multiplication von Polynomen, der binomische und polynomische Lehrsatz, in jedem Körper richtig sind, wenn die Multiplication eines Elementes des Körpers mit einer ganzen Zahl als eine wiederholte Addition, die Potenzirung mit ganzzahligem Exponenten als wiederholte Multiplication aufgefasst wird.

Das nächstliegende und wichtigste Beispiel eines Körpers ist der Körper der *rationalen Zahlen;* wir wollen noch den Körper der Gauss'schen complexen Zahlen und die übrigen algebraischen Zahlkörper erwähnen.

Bemerkenswerth ist aber, dass es auch *endliche Körper* im eigentlichen Sinne giebt, d. h. Körper die nur aus einer endlichen Zahl von Elementen bestehen.

Einen solchen endlichen Körper erhält man, wenn man eine beliebige Primzahl p als Modul annimmt, und die durch die Reihe der Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots, p-1$$

repräsentirten Zahlclassen nach diesem Modul als Elemente betrachtet. Die Gleichungen in diesem Körper bedeuten dann in der gebräuchlichen Bezeichnung Congruenzen nach dem Modul p.

Da jeder Körper eine „1" enthält, so kommen darin auch alle ganzen Zahlen vor, d. h. sie haben im Körper ihre Bedeutung. Es sind aber nicht in jedem Körper alle im gewöhnlichen Sinn verschiedenen Zahlen als verschiedene Elemente zu betrachten.

Man könnte an verschiedene Erweiterungen des Körperbegriffs denken. Man könnte z. B. mehr als eine Ausnahme zulassen, so dass ein Product Null werden kann, auch wenn keiner seiner Factoren Null ist. Ein Beispiel hierfür erhält man, wenn man in dem angeführten endlichen Körper als Modul nicht eine Primzahl sondern eine zusammengesetzte Zahl annimmt.

Man könnte auch versuchen, die Vertauschbarkeit der Elemente in den Operationen aufzugeben, oder noch eine dritte Art der Composition hinzuzufügen. Ob solche Erweiterungen logisch möglich oder fruchtbar sind, habe ich nicht weiter untersucht und bleibe also für jetzt bei der gemachten einfachen Annahme stehen.

§ 3.

Formenkörper.

Wir legen jetzt einen beliebigen Körper Ω zu Grunde, und bezeichnen seine Elemente mit $a, b, c, \ldots$. Wir nehmen eine beliebige Anzahl unabhängiger Veränderlicher $x, y, z, \ldots$ hinzu und bilde ganze rationale Functionen von ihnen mit Coefficienten aus Ω, d. h. Ausdrücke von der Form

$$\Phi(x, y, z, \ldots) = \Sigma a x^r y^s z^t \ldots$$

worin die Coefficienten a Elemente aus Ω und $r, s, t, \ldots$ ganzzahlige Exponenten sind.

Solche Functionen wollen wir der Kürze wegen *Formen in* Ω nennen (etwas abweichend von dem gewöhnlichen Gebrauch, wonach unter Formen nur homogene Functionen verstanden werden). Wir nehmen an, dass in der Summe nicht zwei Glieder vorkommen in denen die Exponenten $r, s, t, \ldots$ dieselben Werthe haben. Der grösste Werth, dem die Summe $r + s + t + \cdots$ in irgend einem Gliede von Φ erreicht, heisst der *Grad der Form.*

1. *Zwei Formen gelten nur dann als gleich, wenn sie genau dieselben Glieder $x^r y^s z^t \ldots$ mit denselben Coefficienten a enthalten, und nur dann ist eine Form gleich Null, wenn alle ihre Coefficienten im Körper Ω der Null gleich sind.*

Die Variablen $x, y, z, \ldots$ haben hier keine selbständige Bedeutung; sie sind nur Zeichen, deren Benutzung die Zusammenfassung einer Anzahl von Gleichungen in eine einzige Gleichung, und Rechnungsregeln für die Coefficientensysteme einfach auszudrücken gestattet.

Wenn aber in einer Form in Ω für die Variablen selbst wieder Elemente aus Ω gesetzt werden, so geht die Form in ein Element von Ω über.

2. *Wenn man zwei oder mehr Formen in Ω mit einander multiplicirt, so erhält man eine neue Form in Ω, deren Grad gleich der Summe der Grade der Factoren ist.*

Der zweite Theil der Behauptung bedarf einer Begründung, bei der man sich eines Verfahrens bedienen kann, welches Gauss in seinem zweiten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra angewandt hat. (Gauss Werke Bd. III, S. 33).

Da man die Glieder höchster Ordnung des Productes erhält, indem man die Summen der Glieder höchster Ordnung in den beiden Factoren multiplicirt, und der Grad dieses Productes, wenn es nicht verschwindet sicher gleich der Summe der Grade der Factoren ist, so ist nur zu zeigen, dass das Product zweier homogener Functionen nicht Null sein kann, wenn keiner der Factoren Null ist. Man giebt nun in einer solchen homogenen Function den Gliedern eine bestimmte Rangordnung indem man von zwei Gliedern

$$x^r y^s z^t \ldots, \quad x^{r'} y^{s'} z^{t'} \ldots$$

dem ersten den höheren Rang zuschreibt, wenn die erste nicht verschwindende unter den Differenzen $r - r'$, $s - s'$, $t - t'$, ... positiv ist. Dann hat in jeder ganzen Function ein bestimmtes Glied den höchsten Rang und man sieht leicht, dass man das Glied höchsten Ranges in einem Product erhält, wenn man die Glieder höchsten Ranges der beiden Factoren mit einander multiplicirt; also kann dieses Glied höchsten Ranges und also auch das ganze Product nicht Null sein.

Durch Division zweier Formen Φ und Ψ, von denen die zweite nicht Null ist, erhalten wir die *gebrochenen Functionen*, mit denen nach den Regeln der Buchstabenrechnung gerechnet wird. Wenn wir festsetzen, dass zwei solche Functionen

$$\frac{\Phi}{\Psi}, \quad \frac{\Phi_1}{\Psi_1}$$

als gleich gelten sollen, wenn

$$\Phi\Psi_1 - \Psi\Phi_1 = 0$$

ist, so bilden diese gebrochenen Functionen von einem bestimmten System Veränderlicher einen Körper, den wir *einen Formenkörper über* Ω nennen wollen. Die Variablen $x, y, z, \ldots$ nennen wir dem Körper Ω adjungirt, und wir bezeichnen den Formenkörper durch

$$\Omega[x, y, z, \ldots].$$

Wir unterscheiden noch in der Bezeichnung, indem wir, wenn die Coefficienten dem Körper Ω angehören, Φ eine Form in Ω nennen, oder eine Form des Körpers oder aus dem Körper $\Omega[x, y, z, \ldots]$.

Unter den Formen in Ω sind *zerlegbare* oder *reducible* und *unzerlegbare* oder *irreducible* Formen zu unterscheiden. Die zerlegbaren sind solche, die sich nach 2. als Product aus mehreren Formen in Ω darstellen lassen, die unzerlegbaren die, die das nicht gestatten.

Aus 2) folgt, dass eine lineare Form immer unzerlegbar ist, und dass eine zerlegbare Form als Product einer endlichen Anzahl unzerlegbarer Formen darstellbar ist.

Eine irreducible Form in Ω kann in einem anderen erweiterten Körper zerlegbar sein. So lange aber der Körper Ω festgehalten wird, bestehen, wie wir jetzt beweisen werden, für die Zerlegung der Formen dieselben Gesetze der Eindeutigkeit, wie bei der Zerlegung von ganzen Zahlen in ihre Primfactoren. Deshalb kann man die irreducibeln Formen auch *Primformen* nennen.

Eine Form Φ heisst durch eine Form φ theilbar, wenn eine dritte Form ψ existirt, durch deren Multiplication mit φ die Form Φ entsteht, also:

$$\Phi = \varphi\psi.$$

Ein Product mehrerer Formen ist also immer durch φ theilbar, wenn einer seiner Factoren durch φ theilbar ist. Ebenso ist eine Summe von mehreren Formen durch φ theilbar, wenn alle Summanden durch φ theilbar sind.

Wenn wir die Elemente von Ω Constanten nennen, so können wir sagen, dass jede Form durch jede Constante ausser durch Null theilbar ist.

Zwei Formen Φ, φ heissen theilerfremd oder relativ prim, wenn nicht beide durch eine und dieselbe Form theilbar sind.

Es gilt nun folgender Fundamentalsatz:

1) *Ist Φ relativ prim zu φ und das Product zweier Formen $\Phi\Psi$ durch φ theilbar, so ist Ψ durch φ theilbar.*

Dieser Satz ist zunächst richtig, wenn es sich um Formen *einer* Variablen handelt. Denn dann lässt sich auf die beiden Formen Φ, φ der Algorithmus des grössten gemeinschaftlichen Theilers anwenden, durch den man zwei Formen P und p bestimmt, die der Bedingung

$$P\Phi + p\varphi = 1$$

genügen. Multiplicirt man mit Ψ, so folgt

$$\Psi = P\Phi\Psi + p\varphi\Psi.$$

Also ist, da $P\Phi\Psi$ und $p\varphi\Psi$ nach Voraussetzung durch φ theilbar sind, auch Ψ durch φ theilbar.

Wir wenden also jetzt die vollständige Induction an, indem wir den Satz 1) als bewiesen ansehen für irgend eine Zahl von Variablen und daraus seine Richtigkeit ableiten für Formen, die von einer

Variablen mehr abhängen. Dieser Beweis ergiebt sich als Schluss einer Kette von Folgerungen, die wir aus dem Theorem 1) ziehen.

Ist φ eine unzerlegbare Form, so ist eine andere Form Φ entweder durch φ theilbar oder relativ prim zu φ. Daraus folgt nach 1), dass ein Product $\Phi\Psi$ nur dann durch eine unzerlegbare Form φ theilbar sein kann, wenn wenigstens einer seiner Factoren durch φ theilbar ist; also durch wiederholte Anwendung dieses Schlusses:

2) *Ein Product aus mehreren Formen ist nur dann durch eine Primform φ theilbar, wenn wenigstens einer der Factoren des Products durch φ theilbar ist.*

Ist eine Form Φ auf zwei Arten in Primformen zerlegt, etwa

$$\Phi = \varphi\varphi'\varphi'' \cdots = \psi\psi'\psi'' \cdots$$

so folgt aus 2), dass einer der Factoren φ durch ψ theilbar, also bis auf einen constanten Factor mit ψ identisch sein muss. Ist also $\varphi = a\psi$, so folgt

$$\varphi'\varphi'' \cdots = a\psi'\psi'' \cdots,$$

woraus man weiter schliesst, dass $\varphi' = a'\psi'$ sein muss u. s. f. Betrachtet man also zwei Producte aus unzerlegbaren Formen nur dann als wesentlich verschieden, wenn sich die einzelnen Factoren nicht bloss um constante Factoren von einander unterscheiden, so erhalten wir den Satz:

3) *Eine Function in Ω kann nicht auf zwei wesentlich verschiedene Arten in Primformen zerlegt werden.*

Hieraus ergiebt sich der Begriff des grössten gemeinschaftlichen Theilers von zwei oder mehr Formen $\Phi, \Psi, \ldots$. Man versteht darunter das Product aller Primformen, die in den Zerlegungen *jeder* der Formen $\Phi, \Psi, \ldots$ vorkommen, oder die Form möglichst hohen Grades, die in allen Formen $\Phi, \Psi, \ldots$ aufgeht. Nach 3) ist diese Form, von einem constanten Factor abgesehen, für jedes Formensystem $\Phi, \Psi \ldots$ völlig bestimmt. Mehrere Formen $\Phi, \Psi, \ldots$ heissen *relativ prim*, wenn keine Form in allen $\Phi, \Psi, \ldots$ zugleich aufgeht. Wir führen noch den Satz an

4) *Sind Φ, Ψ relativ prim, φ, ψ zwei Formen, so dass $\psi\Phi$ und $\psi\Psi$ durch φ theilbar sind, so ist ψ durch φ theilbar.*

Die Richtigkeit ergiebt sich leicht ebenso wie für den entsprechenden Satz der Zahlentheorie, wenn man $\Phi, \Psi, \varphi, \psi$ in ihre unzerlegbaren Factoren zerlegt annimmt.

Wir betrachten jetzt Formen einer neuen Veränderlichen t

$$f(t) = f_0 t^m + f_1 t^{m-1} + \cdots + f_{m-1} t + f_m$$

in der die Coefficienten $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}, f_m$ Formen in Ω von $x, y, z, \ldots$ sind. Auf diese Gestalt kann jede Form in Ω von den Variablen $t, x, y, z, \ldots$ und zwar nur auf eine Art, gebracht werden.

Für den Augenblick wollen wir eine solche Form primitiv nennen, wenn ihre Coefficienten $f_0, f_1, \ldots, f_m$ relativ prim sind. Ist aber ψ der grösste gemeinschaftliche Theiler dieser Coefficienten, so nennen wir ψ den Theiler der Form $f(t)$). Dann gilt der Satz:

5) *Das Product von zwei primitiven Formen $f(t)$ und $\varphi(t)$ ist wieder eine primitive Form und der Theiler eines Productes zweier imprimitiver Formen ist gleich dem Product der Theiler der Factoren.*

Um ihn zu beweisen, setzen wir

$$(1) \qquad f(t) = f_0 t^m + f_1 t^{m-1} + \cdots + f_m,$$

$$(2) \qquad \varphi(t) = \varphi_0 t^\mu + \varphi_1 t^{\mu-1} + \cdots + \varphi_\mu,$$

$$(3) \qquad F(t) = f(t)\,\varphi(t) = F_0 t^{m+\mu} + F_1 t^{m+\mu-1} + \cdots + F_{m+\mu}.$$

Es ist dann, wenn r, ϱ irgend zwei Ziffern aus den Reihen

$$0.\ 1, \ldots m;\quad 0,\ 1, \ldots \mu$$

sind:

$$(4) \qquad F_{r+\varrho} = f_r \varphi_\varrho + f_{r-1}\varphi_{\varrho+1} + \cdots + f_{r+1}\varphi_{\varrho-1} + \cdots.$$

Wenn nun p irgend eine Primform des Formenkörpers $\Omega[x, y, z, \ldots]$ ist, die weder in allen f_r noch in allen φ_ϱ aufgeht, so wähleu wir r und ϱ so, dass f_r und φ_ϱ die ersten in der Reihenfolge unter den Coefficienten von $f(t)$ und $\varphi(t)$ sind, die nicht durch p theilbar sind, so dass also $f_{r-1}, f_{r-2}, \ldots \varphi_{\varrho-1}, \varphi_{\varrho-2} \ldots$ (fortgesetzt, so lange $r-1$, $r-2, \ldots \varrho-1$, $\varrho-2 \ldots$ nicht negativ werden) durch p theilbar sind. Dann sieht man aber aus (4), dass $F_{r+\varrho}$ nicht durch p theilbar ist; also ist $F(t)$ primitiv, wenn $f(t)$ und $\varphi(t)$ primitiv sind.

Daraus folgt unmittelbar, dass, wenn p und q irgend welche Formen des Körpers $\Omega[x, y, z, \ldots]$ sind, pq der Theiler des Productes der beiden imprimitiven Functionen $pf(t)$ und $q\varphi(t)$ ist, also der zweite Theil des Satzes 5).

Die Functionen $f(t)$ können als Formen der einen Variablen t im Körper $\Omega[x, y, z, \ldots]$ betrachtet werden; umgekehrt wird jede ganze Function von t im Formenkörper $\Omega[x, y, z, \ldots]$ durch Multiplication mit einer Form in $\Omega[x, y, z, \ldots]$ in eine Form des Körpers $\Omega[t, x, y, z, \ldots]$, d. h. in eine Function $f(t)$ verwandelt. Daraus folgt nun nach 5):

6) *Wenn eine ganze Function $F(t)$ von $t, x, y, z, \ldots$ als Form der Variablen t in $\Omega[x, y, z, \ldots]$ betrachtet, zerlegbar ist, so ist sie auch als Form des Körpers $\Omega[t, x, y, z, \ldots]$ zerlegbar.*

Mit anderen Worten, wenn $F(t)$ in Factoren zerlegbar ist, die in Bezug auf t ganz, in Bezug auf die $x, y, z, \ldots$ gebrochen sind, so ist sie auch in Factoren zerlegbar, die in Bezug auf alle Variablen ganz sind.

Denn wenn $F(t)$ in zwei ganze Functionen von t zerlegbar ist, so können wir eine Form X von $x, y, z, \ldots$ und die Formen $f_1(t)$, $\varphi_1(t)$ von $t, x, y, z, \ldots$ so bestimmen, dass

$$X F(t) = f_1(t)\, \varphi_1(t)$$

wird. Nach 5) muss aber X in dem Product der Theiler von $f_1(t)$ und $\varphi_1(t)$ aufgehen, und wenn man also mit X dividirt und unter $f(t)$ und $\varphi(t)$ zwei neue Formen der Variablen $t, x, y, z, \ldots$ versteht, die in Bezug auf t von denselben Graden sind wie $f_1(t)$ und $\varphi_1(t)$, so folgt

$$F(t) = f(t)\, \varphi(t).$$

Hieraus folgt nun unmittelbar, dass zwei Formen in Ω der Variablen $t, x, y, z, \ldots$, die in dem oben definirten Sinne relativ prim sind, sich auch als relativ prim erweisen müssen, wenn man sie als ganze Functionen von t in $\Omega[x, y, z, \ldots]$ betrachtet, und man kann also, wenn $F(t)$ und $f(t)$ zwei solche theilerfremde Functionen sind und $\Phi(t)$ eine dritte Form von $t, x, y, z, \ldots$ ist, wie in 1) schliessen, dass, wenn $\Phi(t)\, F(t)$ durch $f(t)$ theilbar ist, $\Phi(t)$ durch $f(t)$ theilbar sein muss. Der Quotient ist aber zunächst nur eine ganze Function von t in $\Omega[x, y, z, \ldots]$, d. h. es lässt sich eine Form X von $x, y, z, \ldots$ bestimmen, so dass $X\Phi(t)$ durch $f(t)$ theilbar ist.

Man hat also zwei Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, so dass

$$F(t)\, \Phi(t) = \varphi(t)\, f(t),$$
$$X\, \Phi(t) = \psi(t)\, f(t).$$

Daraus folgt, wenn man die erste Gleichung mit X multiplicirt und die zweite benutzt

$$X\, \varphi(t) = \psi(t)\, F(t).$$

Bezeichnen wir mit P, p, q die Theiler von $F(t)$, $f(t)$ und $\psi(t)$, so geht also X in Pq und in pq auf. Nach der Voraussetzung sind aber P und p relativ prim und also muss X nach 4) in q aufgehen. Wir können also

$$\psi(t) = X\, \psi_1(t)$$

setzen und erhalten

$$\Phi(t) = \psi_1(t)\, f(t)$$

also den Satz:

7) *Sind $F(t)$ und $f(t)$ relativ prim und ist $F(t)\, \Phi(t)$ durch $f(t)$ theilbar, so ist $\Phi(t)$ durch $f(t)$ theilbar.*

Dies aber ist nichts anderes als unser Theorem 1) für die Formen von $t, x, y, z, \ldots$, wodurch also die Induction vollendet ist.*)

---

*) Diese Sätze über Formen sind in Kroneckers Theorie der algebraischen Grössen fundamental. Die Sätze über Zerlegbarkeit finden sich in § 4 der Festschrift zu Kummers Jubiläum (Journal f. Mathem. Bd. 92). Ausführlicher bei Molk „Sur une notion ..." Acta Mathematica Bd. 6.

§ 4.

Congruenzkörper.

Im vorigen Paragraphen haben wir aus einem beliebigen Grundkörper Ω ein ganzes System höherer Körper $\Omega[x, y, z, \ldots]$ abgeleitet durch Einführung eines Systems unbestimmter Variablen. Wir müssen nun noch eine andere Art der Körperbildung betrachten, deren Theorie das eigentliche Ziel unserer Untersuchung ist.

Wir legen einen beliebigen Körper Ω zu Grunde und wählen eine in Ω *irreducible* Form $g(t)$ einer Veränderlichen t vom n^{ten} Grade

$$g(t) = t^n + m_1 t^{n-1} + m_2 t^{n-2} + \cdots + m_n, \tag{1}$$

in der $m_1, m_2, \ldots, m_n$ Elemente in Ω sind, und worin die höchste Potenz von t den Coefficienten 1 (die Einheit in Ω) hat. Diese Form $g(t)$ heisst der *Modul*.

Ist $\Phi(t)$ eine Form in Ω der Variable t, so können wir zwei andere Formen $Q(t)$ und $\varphi(t)$ in Ω bestimmen, von denen die letzte höchstens vom Grade $n-1$ und dadurch vollständig bestimmt ist, so dass

$$\Phi(t) = Q(t)\, g(t) + \varphi(t) \tag{2}$$

ist.

Ist ferner $\psi(t)$ eine durch $g(t)$ *nicht theilbare* (also zu $g(t)$ theilerfremde) Form, so kann man nach dem Algorithmus des grössten gemeinsamen Theilers die Formen $Q(t)$ und $\varphi(t)$ so bestimmen, dass

$$\psi(t)\, \varphi(t) + Q(t)\, g(t) = 1 \tag{3}$$

wird und der Grad von $\varphi(t)$ kann dann kleiner als n vorausgesetzt werden.

Wenn wir nun zwei Formen von t als *nicht verschieden* betrachten, wenn ihre Differenz durch $g(t)$ theilbar ist, (wenn sie nach dem Modul $g(t)$ congruent sind) so folgt aus (2) und (3)

$$\Phi(t) = \varphi(t), \tag{4}$$

$$\varphi(t)\, \psi(t) = 1 \tag{5}$$

und es ist damit bewiesen, dass der Inbegriff aller Formen

$$\varphi(t) = x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1} t^{n-1} \tag{6}$$

in dem die $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ beliebige Elemente des Körpers Ω sind, einen neuen Körper bilden, den wir *Congruenzkörper über Ω für den Modul $g(t)$* nennen und mit $\Omega(t)$ bezeichnen wollen. (Der Unterschied zwischen Formenkörper und Congruenzkörper soll durch den Gebrauch der eckigen und der runden Klammern gekennzeichnet werden).

Jeder Congruenzkörper umfasst alle Elemente des Körpers Ω selbst, aber auch alle ganzen und gebrochenen Functionen von t mit Coefficienten in Ω, wenn nur der Nenner nicht durch $g(t)$ theilbar ist;

denn alle diese Functionen können durch (4) und (5) auf die Form (6) gebracht werden. Die durch $g(t)$ theilbaren Formen sind gleich Null zu setzen.

Ist der Körper Ω endlich, so ist auch der Congruenzkörper $\Omega(t)$ endlich. Wenn z. B. Ω der oben erwähnte Körper der nach einem Primzahlmodul p genommenen Zahlclassen ist, so fällt die Theorie des Körpers $\Omega(t)$ zusammen mit der in der Zahlentheorie bekannten Theorie der Congruenzen nach einem Doppelmodul.*)

Ist Ω der Körper der reellen rationalen Zahlen, so ist in der Form $\Omega(t)$ jeder algebraische Zahlkörper enthalten. Ist Ω ein aus rationalen Functionen bestehender Körper, so ist $\Omega(t)$ ein Körper algebraischer Functionen u. s. f.

§ 5.

Der Satz von Lagrange.

Um zu einer allgemeinen Theorie der Congruenzkörper, und besonders zu den Galois'schen Grundsätzen zu gelangen, nehmen wir irgend eine Zahl m und zwei Systeme von je m unabhängigen Veränderlichen an:

$$(1) \qquad \begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m, \\ \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_m. \end{matrix}$$

Hierzu nehmen wir noch eine Veränderliche x und setzen

$$(2) \qquad \begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m) \\ &= x^m - a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} - \cdots \pm a_m, \end{aligned}$$

so dass $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *die symmetrischen Grundfunctionen* der Variablen α sind. Es ist bekannt, dass man jede ganze symmetrische Function der α mit ganzzahligen Coefficienten auch als ganze Function der Variablen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ mit ganzzahligen Coefficienten betrachten kann. Unter diesen symmetrischen Functionen ist von besonderer Wichtigkeit die Discriminante von $f(x)$:

$$(3) \qquad (\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2\cdots = \Delta(a).$$

Die symmetrischen Grundfunctionen der Variablen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ bezeichnen wir mit $b_1, b_2, \ldots, b_m$.

Wir setzen nun

$$(4) \qquad \varrho = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_m\beta_m,$$

und führen in ϱ die Permutationen der α oder der β aus; die so entstandenen von einander verschiedenen Functionen in der Zahl

$$\Pi(m) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$$

*) Vgl. Dedekind „Abriss einer Theorie der höheren Congruenzen in Bezug auf einen Primzahlmodulus". Journal f. Mathematik Bd. 54.

bezeichnen wir mit

$$\varrho,\ \varrho',\ \varrho'',\ \varrho''',\ \ldots \tag{5}$$

Die Gesammtheit dieser Functionen ist dieselbe, mögen wir die α oder die β permutirt haben.

Unterwirft man die Indices der α und der β gleichzeitig derselben Permutation π, so ändert sich ϱ nicht. Wenn aber durch die Permutation π, wenn sie auf die Indices der β ausgeübt wird, ϱ in ϱ_1 übergeht, so wird derselbe Erfolg erreicht, wenn man auf die Indices der α die Permutation π^{-1} ausübt.

Man nimmt nun eine neue Variable t an und bildet das Product

$$G(t) = (t-\varrho)(t-\varrho')(t-\varrho'')(t-\varrho''')\ldots \tag{6}$$

was eine ganze Function vom Grade $\Pi(m)$ von t ist. Ausserdem ist es eine ganze Function der α und β, oder der a und β, oder der α und b, oder der a und b, so dass wir sie auf vier verschiedene Arten bezeichnen können

$$G(t, \alpha, \beta),\quad G(t, a, \beta),\quad G(t, \alpha, b),\quad G(t, a, b). \tag{7}$$

Die Discriminante dieser Function ist das Product aller Factoren

$$(\varrho-\varrho')^2(\varrho-\varrho'')^2(\varrho'-\varrho'')^2\ldots, \tag{8}$$

oder auch, vom Vorzeichen $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ abgesehen, das Product der Functionen

$$G'(\varrho),\ G'(\varrho'),\ G'(\varrho''),\ \ldots, \tag{9}$$

wenn $G'(t)$ die derivirte Function von $G(t)$ ist.

Auch diese Discriminante kann als ganze Function der α, β oder der a, β oder der α, b oder der a, b aufgefasst und soll demnach durch

$$\Delta(\alpha, \beta),\quad \Delta(a, \beta),\quad \Delta(\alpha, b),\quad \Delta(a, b) \tag{10}$$

bezeichnet werden. Diese Discriminante ist, da keine der Differenzen (8) verschwindet, gewiss nicht gleich Null.

Ueber ihren Bau wollen wir einen Satz ableiten, den wir später brauchen. Zu dem Zweck geben wir nach dem schon oben benutzten Grundsatz von Gauss den Variablen

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots,\ \beta_m$$

eine bestimmte Rangordnung, und nennen von zwei Producten

$$\beta_1^{h_1}\beta_2^{h_2}\cdots\beta_m^{h_m},\quad \beta_1^{h_1'}\beta_2^{h_2'}\cdots\beta_m^{h_m'}$$

das erste von höherem Rang als das zweite, wenn die erste nicht verschwindende unter den Differenzen

$$h_1 - h_1',\ h_2 - h_2',\ \ldots,\ h_m - h_m'$$

positiv ist. In jeder ganzen Function der β wird dann ein bestimmtes Glied den höchsten Rang haben und in dem Product zweier oder

mehrerer ganzer Functionen erhält man das Glied höchsten Ranges als Product der Glieder höchsten Ranges in den einzelnen Factoren.

Dies wenden wir auf das Product der Factoren (8) an. In jedem dieser linearen Factoren hat das Glied höchsten Ranges als Coefficienten eine der Differenzen $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_1 - \alpha_3$, ... und folglich hat auch in der Function $\Delta(\alpha, \beta)$ das Glied höchsten Ranges zum Coefficienten ein Product aus Factoren $(\alpha_i - \alpha_k)$. Da aber dieser Coefficient eine symmetrische Function der α sein muss, so kann er nichts anderes als eine Potenz der Discriminante $\Delta(a)$ sein. Durch Vergleichung der Ordnung in Bezug auf die α kann man den (positiven) Exponenten der Potenz leicht bestimmen. Er ergiebt sich gleich $\Pi(m-2)\,(\Pi(m)-1)$, worauf hier aber nichts ankommt.

Also haben wir den Satz:

I. *Der Coefficient des Gliedes höchsten Ranges in der Discriminante $\Delta(\alpha, \beta)$ ist eine Potenz der Discriminante $\Delta(a)$.*

Wir schliessen hieran den Beweis des bekannten Theorems von Lagrange.*)

Es sei σ eine rationale Function der Variablen α und β und durch die Permutationen der α möge σ in die Functionen

$$\sigma,\ \sigma',\ \sigma'',\ \sigma''' \ldots$$

übergehen, während durch dieselben Permutationen in gleicher Reihenfolge ϱ in

$$\varrho,\ \varrho',\ \varrho'',\ \varrho''' \ldots$$

übergeht. Die Function

$$\frac{G(t)\sigma}{t-\varrho} + \frac{G(t)\sigma'}{t-\varrho'} + \frac{G(t)\sigma''}{t-\varrho''} \cdots = \chi(t) \tag{11}$$

ist dann eine ganze Function von t und zugleich eine symmetrische Function der α; folglich eine rationale Function der a und β; als solche möge sie durch

$$\chi(t, a, \beta)$$

bezeichnet sein. Setzt man dann $t = \varrho$, so ergiebt sich

$$\sigma = \frac{\chi(\varrho, a, \beta)}{G'(\varrho)}, \tag{12}$$

also das Theorem

II. *Jede Function der α und β lässt sich als Function von ϱ, a, β ausdrücken.*

Die genauere Bedeutung der Formel (12) ist die, dass, wenn man rechts ϱ und a durch α und β ausdrückt, zwischen der rechten und der linken Seite Gleichheit in dem im § 3 festgesetzten Sinne statt-

*) Lagrange, Réflexions sur la résolution algébrique des équations, Mém. de l'Academie de Berlin 1770, 1771. Oeuvres de Lagrange, Tome III.

findet, also Gleichheit in dem Formenkörper, der aus dem Körper der rationalen Zahlen durch Adjunction der Variablen α, β entsteht. Für die Function σ können wir auch die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ selbst wählen und wir erhalten dann, wenn ψ_k ein Symbol für eine rationale Function ist,

$$\alpha_k = \psi_k(\varrho, a, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{13}$$

Wenn wir in dieser letzteren Gleichung eine Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & m \\ h_1, & h_2, & \ldots, & h_m \end{pmatrix}$$

gleichzeitig auf die α und β anwenden, so bleiben ϱ und a ungeändert und es folgt

$$\alpha_{h_k} = \psi_k(\varrho, a, \beta_{h_1}, \beta_{h_2}, \ldots, \beta_{h_m});$$

man kann also alle α durch eine und dieselbe Function ψ darstellen, in der man die β permutirt. Wählt man z. B. für π die cyklische Permutation $(1, 2, \ldots, m)$ und ihre Wiederholungen, so erhält man

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \psi(\varrho, a, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m), \\ \alpha_2 &= \psi(\varrho, a, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_m &= \psi(\varrho, a, \beta_m, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}). \end{aligned} \tag{14}$$

Wenn man die Permutation π auf die Indices der α allein anwendet und annimmt, dass ϱ dadurch in ϱ_h übergeht, so erhält man aus (13)

$$\alpha_{h_k} = \psi_k(\varrho_h, a, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m). \tag{15}$$

Setzt man einen dieser Ausdrücke für α in die Function

$$f(\alpha) = \alpha^m - a_1\alpha^{m-1} + a_2\alpha^{m-2} - \cdots \pm a_m,$$

so erhält man, wenn man a und ϱ durch α und β ausdrückt,

$$f(\alpha_k) = 0. \tag{16}$$

Wie die α, so kann man auch die verschiedenen Functionen $\varrho', \varrho'', \varrho''', \ldots$ die man durch Permutation der α oder der β aus der Formel (4) erhält, durch ϱ, a, β ausdrücken. Die so gewonnenen Ausdrücke wollen wir mit

$$\varrho' = \Theta'(\varrho, a, \beta), \quad \varrho'' = \Theta''(\varrho, a, \beta), \ldots \tag{17}$$

bezeichnen.

Diese Ausdrücke müssen dann, wenn alles durch α, β ausgedrückt wird, den Gleichungen

$$G(\varrho', a, \beta) = 0, \quad G(\varrho'', a, \beta) = 0, \ldots \tag{18}$$

genügen.

Wir beweisen jetzt noch den Satz

III. *Wenn von den rationalen Functionen*

$$\Phi(\varrho, a, \beta), \quad \Phi(\varrho', a, \beta), \quad \Phi(\varrho'', a, \beta), \ldots$$

eine verschwindet, so verschwinden auch alle übrigen, und es ist daher, wenn t eine Variable bedeutet, der Zähler von $\Phi(t, \alpha, \beta)$ durch $G(t)$ theilbar.

Seine Richtigkeit ergiebt sich daraus, dass man in einer Gleichung

$$\Phi(\varrho, \alpha, \beta) = 0$$

die Variablen α permutiren kann, wodurch die α ungeändert bleiben, während jede der Grössen ϱ in jede andere übergehen kann.

Hiervon machen wir sogleich eine Anwendung auf den Beweis des wichtigen Satzes

IV. *Drückt man nach* (17)

(19) $$\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho''', \ldots$$

durch

(20) $$\varrho, \Theta'(\varrho), \Theta''(\varrho), \Theta'''(\varrho), \ldots$$

aus und lässt Θ eine beliebige von den Functionen (20) *bedeuten, so stimmt die Reihe der Grössen*

(21) $$\Theta(\varrho), \Theta'\Theta(\varrho), \Theta''\Theta(\varrho), \Theta'''\Theta(\varrho), \ldots$$

von der Anordnung abgesehen mit der Reihe der Grössen (19) *überein.*

Denn da $G(\Theta'\varrho)$ verschwindet, so verschwindet nach III auch $G(\Theta'\Theta\varrho)$, also ist $\Theta'\Theta(\varrho)$ unter den Grössen (19) enthalten, und ausserdem sind die Grössen (21) von einander verschieden, weil aus einer Gleichung wie $\Theta'\Theta(\varrho) = \Theta''\Theta(\varrho)$ nach III folgen würde, dass $\Theta'(\varrho) = \Theta''(\varrho)$ sein müsste, was nicht zutrifft.

Die Functionen (20) bilden also eine *Gruppe* vom Grade $\Pi(m)$, in der die Function ϱ selbst die Einheit ist, und die Composition so geschieht, dass $\Theta'\Theta''(\varrho)$ die Bedeutung hat, dass die Function Θ' nicht von ϱ selbst, sondern von $\Theta''(\varrho)$, was einem der andern ϱ, etwa dem ϱ'' gleich ist, gebildet werden soll.

V. *Diese Gruppe ist isomorph mit der Gruppe der $\Pi(m)$ Permutationen von m Ziffern, und zwar in folgender Weise.*

Wenn eine Permutation π_1 der Indices der α vorgenommen wird, so geht jedes ϱ in ein bestimmtes anderes ϱ über, z. B. ϱ in ϱ_1. Wir können also setzen

$$\pi_1 = (\varrho, \varrho_1).$$

Ist nun

(22) $$\varrho_1 = \Theta_1(\varrho),$$

so können wir in dieser Gleichung wieder beiderseits die α einer Permutation $\pi_2 = (\varrho, \varrho_2)$ unterwerfen, wodurch sich die Function Θ_1, da sie nur von den α abhängt, nicht ändert. Ist nun $\pi_2 = (\varrho_1, \varrho_3)$ und $\varrho_2 = \Theta_2(\varrho)$, so folgt aus (22)

(23) $$\varrho_3 = \Theta_1(\varrho_2) = \Theta_1\Theta_2(\varrho).$$

ϱ_3 ist aber das Ergebniss der nach einander auf ϱ angewandten Permutationen π_1, π_2, also der zusammengesetzten Permutation $\pi_3 = \pi_1 \pi_2$. Damit ist also bewiesen, dass die Gruppe der Functionen Θ isomorph ist mit der Gruppe der Permutationen π.

Es soll aber nochmals betont werden, dass hier die Gleichungen sich alle auf den Formenkörper der Variablen α, β über dem Körper der natürlichen Zahlen beziehen. Dass in manchen der betrachteten Functionen wie G, ψ, Θ, die α nur in den Verbindungen ϱ, a vorkommen, ist erst für das Folgende von entscheidender Bedeutung.

§ 6.

Die Galois'sche Theorie.

Wir nehmen jetzt irgend einen beliebigen *Grundkörper* Ω an, und deuten die in den Coefficienten (nicht aber in den Exponenten) von Functionen vorkommenden rationalen Zahlen im Körper Ω. In Functionen, die von den symmetrischen Verbindungen $a_1, a_2 \ldots a_m$ der α abhängen, substituiren wir für die $a_1, a_2 \ldots a_m$ irgend welche Elemente $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_m$ des Körpers Ω, von denen wir nur die eine Voraussetzung machen, dass die Discriminante $\Delta(a)$, die durch diese Substitution in $\Delta(\omega)$ übergehen mag, in Ω nicht Null ist. Ob diese Forderung immer erfüllbar ist, werden wir später untersuchen.

Diese Substitution, die wir mit

$$S_1 = \begin{bmatrix} a \\ \omega \end{bmatrix}$$

bezeichnen wollen, ist in jeder ganzen Function der a möglich, und in jeder gebrochenen dann, wenn der Nenner nach der Substitution in Ω nicht Null ist. Jede Function der a, die die Substitution S_1 gestattet, geht durch sie in ein Element von Ω über, und eine Gleichung zwischen solchen Functionen, die die Substitution S_1 gestatten, geht in eine in Ω richtige Gleichung über.

Wir erweitern den Körper Ω durch Adjunction der Variablen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ zu einen Formenkörper

$$\mathsf{B} = \Omega[\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m]$$

und werden diesem Körper für den Augenblick noch eine weitere Variable t adjungiren. Durch die Substitution S_1 geht $G(t, a, \beta)$ in eine Function des Körpers $\mathsf{B}[t]$ über:

$$G(t) = G(t, \omega, \beta),$$

und diese Function kann reducibel sein.

Wir wählen einen von ihren irreducibelen Factoren $g(t)$, in dem die höchste Potenz von t den Coefficienten 1 haben mag, und setzen

$$G(t) = g(t)\, h(t), \tag{1}$$

worin $h(t)$ gleichfalls eine Function des Körpers $\mathsf{B}[t]$ ist.

Wir betrachten weiter den Congruenzkörper

$$\Gamma = \mathsf{B}(t) \quad (\text{Modul } g(t)),$$

in dem jede durch $g(t)$ theilbare Function gleich Null ist, und adjungiren schliesslich auch diesem Körper noch eine Variable u, wodurch wir den Körper $\Gamma[u]$ erhalten.

Wenn wir in einer von ϱ und a abhängigen Function die Substitution

$$S_2 = \begin{bmatrix} \varrho, & a \\ t, & \omega \end{bmatrix}$$

machen, so erhalten wir, wenn der Nenner nicht Null wird, ein Element in Γ, und wenn wir endlich in einer Function von t, ϱ, a die Substitution

$$S_3 = \begin{bmatrix} t, & \varrho, & a \\ u, & t, & \omega \end{bmatrix}$$

machen, so ergiebt sich unter der gleichen Voraussetzung ein Element von $\Gamma[u]$. Die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen gehen nach dem Satze III durch die Substitutionen S_2 oder S_3 in richtige Gleichungen in den Körpern Γ oder $\Gamma[u]$ über, wenn kein Nenner verschwindet.

In allen Functionen, die im vorigen Paragraphen gebildet sind, kommt immer nur der eine Nenner $G'(\varrho)$ vor. Dass dieser Nenner aber durch die Substitution S_2 in ein *nicht verschwindendes* Element von Γ übergeht, ist eine Folge der Voraussetzung, dass die Discriminante $\Delta(\omega)$ in Ω nicht verschwindet.

Denn nach dem Theorem I ist die Discriminante $\Delta(\omega, \beta)$ von $G(t)$ ein Element des Körpers B, was von Null verschieden ist; wäre aber $G'(t)$ im Körper Γ gleich Null, so müsste $G'(t)$ durch $g(t)$ theilbar sein; d. h. $G(t)$ und $G'(t)$ müssten einen gemeinsamen Theiler haben, was nicht möglich ist, wenn nicht die Discriminante verschwindet.

Demnach sind in den Formeln des vorigen Paragraphen die Substitutionen S_1, S_2, S_3 erlaubt.

In den folgenden Formeln fügen wir der Deutlichkeit halber bei jeder Gleichung die Bezeichnung des Körpers bei, für den sie gilt. Wenn wir in (8) des vorigen Paragraphen, nachdem wir ϱ', ϱ'', ϱ''' ... nach (17) durch ϱ ausgedrückt haben, die Substitution S_2 machen, so ergiebt sich

$$\big(t - \Theta'(t)\big)^2 \big(t - \Theta''(t)\big)^2 \big(\Theta'(t) - \Theta''(t)\big)^2 \cdots = \Delta(\omega, \beta), \qquad (\Gamma)$$

also, da $\Delta(\omega, \beta)$ von Null verschieden ist, so schliessen wir, dass die

$$t,\ \Theta'(t),\ \Theta''(t),\ \Theta'''(t) \ldots \qquad (2)$$

lauter *verschiedene* Elemente des Körpers Γ darstellen.

Machen wir in der Formel (6), § 5 die Substitution S_3, so erhalten wir

$$(3) \qquad G(u) = (u - t)\left(u - \Theta'(t)\right)\left(u - \Theta''(t)\right) \ldots \qquad (\Gamma[u])$$

Diese Function $G(u)$ ist aber nach (1) gleich $g(u)\,h(u)$, und da nach § 3 $G(u)$ nur auf eine Weise in irreducible Factoren zerlegbar ist, so muss $g(u)$, was sicher durch $u - t$ theilbar ist, eine bestimmte, ihrem Grade gleiche Anzahl der linearen Factoren von (3) enthalten. Wir setzen also

$$(4) \quad g(u) = (u - t)\left(u - \Theta_1(t)\right)\left(u - \Theta_2(t)\right) \ldots \left(u - \Theta_{\nu-1}(t)\right), \quad (\Gamma[u]),$$

wenn ν den Grad von g bedeutet.

$g(u)$ ist aber nach unserer Voraussetzung nicht nur im Körper $\Gamma[u]$, sondern im Körper $\mathsf{B}[u]$ enthalten, d. h. es lässt sich mit Hilfe von $g(t) = 0$ von t befreien, oder anders ausgedrückt:

VI. *Die symmetrischen Functionen der Elemente*

$$(5) \qquad t,\ \Theta_1(t),\ \Theta_2(t),\ \ldots\ \Theta_{\nu-1}(t)$$

sind in B *enthalten.*

Wir haben ferner den Satz, der ein Ausdruck für die Irreducibilität von $g(u)$ *ist:*

VII. *Wenn eine Function* $\varphi(u)$ *des Körpers* $\mathsf{B}[u]$ *in* Γ *verschwindet, sobald für* u *eine der Grössen* (5) *gesetzt wird, so verschwindet sie auch für alle anderen Elemente* (5).

Daraus folgt, dass man die Grössen der Reihe (5) in eine *Gruppe* ordnen kann.

Denn da $g\left(\Theta_1(t)\right) = 0$ ist, so ist auch $g\left(\Theta_1\Theta_2(t)\right) = 0$ d. h. $\Theta_1\Theta_2(t)$ ist in der Reihe (5) enthalten. Diese Gruppe, deren Eigenschaften wir noch weiter untersuchen, heisst die *Galois'sche Gruppe* der Function $f(x)$ $\left(\S\ 5\ (2)\right)$, und soll mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet werden.

VIII. *Wenn eine Function* $\varphi(u)$ in $\mathsf{B}[u]$ *die Eigenschaft hat, dass*

$$\varphi(t) = \varphi(\Theta_1 t) = \cdots = \varphi\left(\Theta_{\nu-1}(t)\right) \qquad (\Gamma)$$

ist, so ist $\varphi(t)$ *ein Element in* B.

Denn denken wir uns $\varphi(t)$ in die Form gesetzt

$$x_0 + x_1 t + \cdots + x_{\nu-1} t^{\nu-1},$$

so sind $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}$ Elemente in B. Setzen wir nun

$$\varphi(t) = \varphi(\Theta_1 t) = \cdots = \varphi\left(\Theta_{\nu-1}(t)\right) = \tau, \qquad (\Gamma)$$

wo τ also zunächst ein Element in Γ ist, so muss die Function in Γ

$$\psi(u) = x_0 + x_1 u + \cdots + x_{\nu-1} u^{\nu-1} - \tau$$

durch $g(u)$ theilbar sein, weil es für alle Wurzeln von $g(u)$ verschwindet. Da aber $\psi(u)$ nur vom Grade $\nu - 1$ ist, so muss

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots\ x_{\nu-1} = 0,\ x_0 = \tau \qquad (\Gamma)$$

sein, also ist τ ein Element in B.

Ist ν kleiner als $\Pi(m)$, also $g(u)$ von $G(u)$ verschieden, so giebt es unter den Functionen (2) eine, $\Theta_\nu(t)$, die nicht in (5) enthalten ist. Wir setzen

(6) $\Theta_\nu(t) = \Theta_\nu(t),\ \Theta_{\nu+1}(t) = \Theta_\nu\Theta_1(t),\ \ldots\ \Theta_{2\nu-1}(t) = \Theta_\nu\Theta_{\nu-1}(t),$ (Γ)

und bilden

$$g_1(u) = \big(u - \Theta_\nu(t)\big)\big(u - \Theta_{\nu+1}(t)\big)\ \ldots\ \big(u - \Theta_{2\nu-1}(t)\big). \qquad (\Gamma[u])$$

Diese Function ist nach VI im Körper $\mathsf{B}[u]$ enthalten; sie ist aber von $g(u)$ verschieden, da $g(u)$ den Theiler $\big(u - \Theta_\nu(t)\big)$ nicht enthält, und muss daher zu $g(u)$ theilerfremd sein. Ausserdem ist $g_1(u)$ ein Theiler von $G(u)$. Die Grössen (6) sind daher sowohl unter einander als von den Grössen (5) verschieden. Die Function ν^{ten} Grades $g_1(u)$ ist in B irreducibel; denn ist $\bar{g}_1(u)$ der irreducible Factor von $g_1(u)$, der den Linearfactor $\big(u - \Theta_\nu(t)\big)$ enthält, so ist nach VII:

$$\bar{g}_1\big(\Theta_\nu(t)\big) = 0,\ \bar{g}_1\big(\Theta_{\nu+1}(t)\big) = 0,\ \ldots\ \bar{g}_1\big(\Theta_{2\nu+1}(t)\big) = 0, \qquad (\Gamma)$$

d. h. $\bar{g}_1(u)$ ist durch $g_1(u)$ theilbar, und also mit $g_1(u)$ identisch.

Ist 2ν noch kleiner als $\Pi(m)$, so kann man diese Schlüsse wiederholen, indem man eine Function $\Theta_{2\nu}(t)$ nimmt, die weder in (5) noch in (6) enthalten ist, und erhält so das Resultat:

IX. *Die Function $G(u)$ lässt sich in μ irreducible Factoren ν^{ten} Grades des Körpers* $\mathsf{B}[u]$ *zerlegen*

$$G(u) = g(u)\,g_1(u)\ \ldots\ g_{\mu-1}(u), \qquad \big(\mathsf{B}[u]\big)$$

worin $\mu\nu = \Pi(m)$ ist.

Wenn wir in den Functionen (14) des vorigen Paragraphen die Substitution S_2 machen, so gehen die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ in Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ des Körpers Γ über, und es wird

$$f(\varepsilon_1) = 0,\ f(\varepsilon_2) = 0,\ \ldots,\ f(\varepsilon_m) = 0. \qquad (\Gamma)$$

Machen wir statt S_2 eine der ν Substitutionen

$$S_\varkappa = \begin{bmatrix} \varrho, & u \\ \Theta_\varkappa(t), & \omega \end{bmatrix},$$

wo $\Theta_\varkappa$ eine der Functionen der Gruppe (5) ist, so gehen die $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ in dieselben Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ in veränderter Ordnung über, und nach dem Satz V des vorigen Paragraphen bilden die den verschiedenen Substitutionen $S_\varkappa$ entsprechenden Permutationen der Indices von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ eine mit $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe von Permutationen, die in der allgemeinen Gruppe aller Permutationen enthalten ist, die gleichfalls mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet und *Galois'sche Gruppe* genannt wird.

Diese Gruppe hat folgende drei Eigenschaften, die für sie zugleich charakteristisch sind.

a) *Jede Gleichung mit Coëfficienten in* B

$$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m) = 0 \quad (\Gamma)$$

bleibt richtig, wenn auf die Indices der ε *eine Permutation der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *angewandt wird.*

b) *Eine Function* $\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$ *mit Coëfficienten in* B, *die ungeändert bleibt, wenn auf die Indices der* ε *irgend eine Permutation der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *angewandt wird, ist in* B *enthalten.*

c) *Eine Permutation, die auf alle Gleichungen der Form*

(7) $$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m) = 0 \quad (\Gamma)$$

angewandt werden darf, gehört zu $\mathfrak{G}$.

Die beiden ersten Eigenschaften sind nur ein anderer Ausdruck für die Sätze VII, VIII. Um die Eigenschaft c) zu beweisen, nehmen wir eine Permutation π an, die in allen Gleichungen der Form (7) anwendbar ist.

Nun ist

(8) $$t = \varepsilon_1\beta_1 + \varepsilon_2\beta_2, \ldots, \varepsilon_m\beta_m. \quad (\Gamma)$$

Durch Anwendung von π auf die Indices von ε geht t in eine der Grössen $\Theta(t)$ über, wenn $\left(\varrho, \Theta(\varrho)\right)$ die der Permutation π entsprechende Vertauschung der ϱ ist.

Denn ist

$$\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, \ldots, & n \\ h_1, & h_2, \ldots, & h_n \end{pmatrix},$$

so ist nach § 5

$$\Theta(\varrho) = \beta_1\psi_{h_1}(\varrho, a) + \beta_2\psi_{h_2}(\varrho, a) + \cdots + \beta_m\psi_{h_m}(\varrho, a),$$

und dies giebt durch Anwendung der Substitution S_2

(9) $$\Theta(t) = \varepsilon_{h_1}\beta_1 + \varepsilon_{h_2}\beta_2 + \cdots + \varepsilon_{h_m}\beta_m, \quad (\Gamma)$$

wo die rechte Seite aus der rechten Seite von (8) durch Anwendung der Permutation π auf die Indices von ε hervorgeht.

Um nun c) nachzuweisen, kommt es nur noch darauf an, zu zeigen, dass die Function $\Theta(t)$ in (9) unter den Functionen (5) vorkommt.

Dies aber folgt aus der Voraussetzung, dass π auf jede Gleichung (7) anwendbar ist, also auch auf

$$g(t) = g(\varepsilon_1\beta_1 + \varepsilon_2\beta_2 + \cdots + \varepsilon_m\beta_m) = 0;$$

denn darnach muss auch $g(\Theta t) = 0$ sein.

d) *Es ist ferner noch zu beweisen, dass es nur eine Permutationsgruppe giebt, der die Eigenschaften* a), b) *zukommen.*

Wenn nämlich $\mathfrak{G}'$ eine Permutationsgruppe mit den Eigenschaften a), b) ist, so folgt zunächst aus c) dass $\mathfrak{G}'$ ein Theiler von $\mathfrak{G}$ ist. Wenn nun $\mathfrak{G}'$ aus den Permutationen

$$(t, t),\ (t, \Theta_1 t),\ (t, \Theta_2 t), \ldots, (t, \Theta_{\nu'-1} t)$$

besteht, so ist

$$h(u) = (u - t)\left(u - \Theta_1(t)\right)\left(u - \Theta_2(t)\right) \ldots \left(u - \Theta_{\nu'-1}(t)\right) \quad (\Gamma)$$

wegen der Eigenschaft b) und dem Gruppencharakter von $\mathfrak{G}'$ in $\mathsf{B}[u]$ enthalten, und wenn also $\nu' < \nu$ wäre, so könnte $g(u)$ nicht irreducibel sein, wie doch angenommen war. Also ist $\nu' = \nu$ und folglich auch $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$.

Dem Satze b) müssen wir aber noch eine genauere Bestimmung hinzufügen:

e) *Eine Function $\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$ mit Coefficienten in Ω, die ungeändert bleibt, wenn auf die Indices der ε eine Permutation der Gruppe $\mathfrak{G}$ angewandt wird, ist in Ω enthalten.*

Um diese Eigenschaft nachzuweisen, bemerken wir zunächst, dass eine Function der ε, die bei *allen* Permutationen der Indices ungeändert bleibt, aus einer *symmetrischen Function* der α durch die Substitution S_2 abgeleitet werden kann, und also gleich einem Element in Ω ist.

Wählen wir nun die nicht zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Permutationen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{\mu-1}$ so, dass alle $\Pi(m)$ Permutationen der Ziffern $1, 2, \ldots, m$ in die μ Reihen

$$\mathfrak{G},\ \mathfrak{G}\pi_1,\ \mathfrak{G}\pi_2, \ldots, \mathfrak{G}\pi_{\mu-1} \tag{10}$$

vertheilt sind, so geht (nach bekannten Sätzen über Permutationsgruppen) durch die Permutationen dieser Reihen die Function ψ über in μ Functionen

$$\psi,\ \psi_1,\ \psi_2, \ldots, \psi_{\mu-1},$$

die sich nur unter einander permutiren, wenn auf die ε irgend eine Permutation angewandt wird.

Die Function

$$\begin{aligned}(u - \psi)(u - \psi_1)(u - \psi_2) \ldots (u - \psi_{\mu-1}) &= \Phi(u, \omega) \\ &= u^\mu + \Phi u^{\mu-1} + \cdots + \Phi_\mu\end{aligned} \tag{11}$$

ist daher eine Form μ^{ten} Grades von u in Ω.

Andererseits sind nach b) $u - \psi$ und

$$\begin{aligned}(u - \psi_1)(u - \psi_2) \ldots (u - \psi_{\mu-1}) &= \chi(u, \omega, \beta) \\ &= u^{\mu-1} + \chi_1 \cdot u^{\mu-2} + \cdots + \chi_{\mu-1}\end{aligned}$$

Formen von u in B, also

$$\Phi(u, \omega) = (u - \psi)\,\chi(u). \tag{12}$$

Nach § 3, 5) folgt aber hieraus, dass $\psi, \chi_1, \ldots, \chi_{\mu-1}$ keinen von den Variablen β abhängigen Nenner haben können, also Formen der Variable β in Ω sind. Nun ist aber

$$\psi\chi_{\mu-1} = \Phi_\mu$$

ein Element in Ω und daher müssen (nach § 3) ψ und $\chi_{\mu-1}$ ebenfalls von β unabhängig, also Elemente in Ω sein. Die Function $g(u)$ heisst eine *Galois'sche Resolvente* von $f(x)$. In dem zum Modul $g(t)$ gehörigen Congruenzkörper Γ hat die Gleichung $f(x)=0$ die m Wurzeln $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$. In diesem Körper kommen aber noch die der Function $f(x)$ ganz fremden Variablen β vor. Deren Bedeutung wird klarer, wenn man nun zur Bildung anderer Galois'scher Resolventen übergeht.

Wir nehmen irgend eine Form $\chi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ im Körper Ω, von der wir voraussetzen, dass die ν Werthe, $\tau, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\nu-1}$, die man aus

$$\tau = \chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m) \quad (\Gamma) \tag{13}$$

erhält, wenn man auf die ε die Permutationen der Gruppe $\mathfrak{G}$ anwendet, *von einander verschieden sind.* Nur wenn eine solche Function existirt, worüber im nächsten Paragraphen Näheres ausgeführt werden soll, sind die folgenden Betrachtungen richtig. Die Function

$$\gamma(u) = (u-\tau)(u-\tau_1)\ldots(u-\tau_{\nu-1}) \quad (\Gamma) \tag{14}$$

ist dann nach b) und e) nicht nur im Körper $\mathsf{B}[u]$, sondern im Körper $\Omega[u]$ enthalten. Die Function $\gamma(u)$ ist im Körper B *irreducibel,* weil der irreducible Factor $\bar{\gamma}(u)$, der durch $(u-\tau)$ theilbar ist, nach a) auch durch $(u-\tau_1), (u-\tau_2), \ldots, (u-\tau_{\nu-1})$ theilbar sein muss.

Der Ausdruck (13), den wir auch so darstellen

$$\tau = F(t, \omega, \beta) \quad (\Gamma) \tag{15}$$

giebt τ als ein Element des Körpers Γ und macht $\gamma(\tau)$ zu Null, und wenn irgend eine ganze Function in B, $\psi(\tau)$ durch die Substitution (15) in Γ gleich Null wird, so muss $\psi(u)$ durch $\gamma(u)$ theilbar sein. Wir können aber auch mit Hilfe der Function $\gamma(\tau)$ als Modul einen Congruenzkörper $\mathsf{B}(\tau)$, $\big(\text{modul } \gamma(\tau)\big)$ construiren, von dem wir nun folgenden Satz beweisen.

X. *Es giebt ein Element des Körpers* $\mathsf{B}(\tau)$

$$t = \Phi(\tau, \omega, \beta) \quad \big(\mathsf{B}(\tau)\big) \tag{16}$$

das für t substituirt $g(t)$ in $\mathsf{B}(\tau)$ zu Null macht.

Wenn wir nämlich

$$t = \varepsilon_1\beta_1 + \varepsilon_2\beta_2 + \cdots + \varepsilon_\nu\beta_\nu \quad (\Gamma) \tag{17}$$

setzen, und mit $t_1, t_2, \ldots, t_{\nu-1}$ die durch die Permutationen der Gruppe $\mathfrak{G}$ daraus hervorgehenden Grössen, entsprechend den $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\nu-1}$, bezeichnen, so ist

$$(18) \qquad \frac{\gamma(u)\,t}{u-\tau}+\frac{\gamma(u)\,t_1}{u-\tau_1}+\cdots+\frac{\gamma(u)\,t_{\nu-1}}{u-\tau_{\nu-1}}=\varphi(u) \qquad (\Gamma[u])$$

nach b) eine Function in $\mathsf{B}[u]$, und wenn wir darin $u=\tau$ setzen, so folgt

$$(19) \qquad t=\frac{\varphi(\tau)}{\gamma'(\tau)}=\Phi(\tau,\omega,\beta). \qquad (\Gamma)$$

Es ist aber

$$g(t)=g\big(\Phi(\tau,\omega,\beta)\big)=0 \qquad (\Gamma)$$

und folglich ist auch $g\big(\Phi(\tau,\omega,\beta)\big)$ in $\mathsf{B}(\tau)$ gleich Null. Durch die Substitution (15) geht jedes Element von $\mathsf{B}(\tau)$ in ein Element von $\mathsf{B}(t)$ über und jede Gleichung in $\mathsf{B}(\tau)$ geht in eine richtige Gleichung in $\mathsf{B}(t)$ über; die Substitution (16) leistet das Umgekehrte, so dass also durch diese beiden Substitutionen die Uebereinstimmung beider Körper hergestellt wird:

$$\Gamma=\mathsf{B}(t)\big(\text{modul } g(t)\big)=\mathsf{B}(\tau)\big(\text{modul } \gamma(\tau)\big).$$

Da aber die Function $\gamma(u)$ von den Variablen β nicht abhängt, so können wir mit dem Modul $\gamma(\tau)$ auch einen Körper $\Omega(\tau)$ construiren, der ein Theil des Körpers Γ ist, und wir beweisen schliesslich noch den Satz

XI. *Die Form $f(x)$ in Ω hat im Congruenzkörper $\Omega(\tau)$ m Wurzeln $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$.*

Wir können den Körper $\mathsf{B}(\tau)$ auffassen als einen Formenkörper der Variablen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ über dem Körper $\Omega(\tau)$, und diesem Formenkörper gehören die früher bestimmten Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ an. Wir haben nachzuweisen, dass sie von den Variablen β unabhängig sind.

Dies folgt nach § 3 wie oben aus der Zerlegung

$$f(x)=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\ldots(x-\varepsilon_m). \qquad (\Gamma)$$

$f(x)$ ist aber eine Form von x in Ω, die in $\Omega(\tau)$ $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m]$ zerlegbar ist, sie muss also nach § 3, 6. auch zerlegbar sein im Körper $\Omega(\tau)$ $[x, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m]$. Es können also die einzelnen Factoren $(x-\varepsilon_1), (x-\varepsilon_2), \ldots, (x-\varepsilon_m)$ die Variablen β zunächst nicht im Nenner enthalten, und sodann müssen, da das Product $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m$ von den β unabhängig ist, auch die einzelnen Factoren davon unabhängig sein.

§ 7.

Endliche und unendliche Körper.

Unsere bisherigen Betrachtungen umfassen sowohl endliche als unendliche Körper. Der wichtigste Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Körpern besteht aber in folgendem Satz:

Ist Ω ein unendlicher Körper und $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ ein System von Formen in Ω von irgend welchen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ so kann man für die Variablen $x, y, z, \ldots$ solche Elemente aus Ω setzen, dass keine der Functionen $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ nach dieser Substitution in Ω verschwindet.

Wir beweisen den Satz zunächst für Formen in Ω von einer Veränderlichen $\Phi(x), \Phi_1(x), \Phi_2(x) \ldots$ und wenden dann die vollständige Induction an.

Wenn aber $\Phi(x)$ für $x = \omega$ verschwindet, so ist $\Phi(x)$ durch $x - \omega$ theilbar, und da $\Phi(x)$ nur auf eine Art in irreducible Factoren zerlegbar ist, so giebt es nur eine endliche Anzahl von Elementen ω, für die $\Phi(x)$ verschwindet. Da es aber in einem unendlichen Körper Ω unendlich viele Elemente giebt, so kann man ω so wählen, dass keines der Elemente $\Phi(\omega), \Phi_1(\omega), \Phi_2(\omega), \ldots$ verschwindet. Man kann ω auch einem beliebigen in Ω enthaltenen unendlichen Körper entnehmen.

Gehen wir nun zu den Formen von einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ über und nehmen an, wir hätten für $y, z, \ldots$ solche Elemente ω gesetzt, dass keine der Formen

$$\Phi(x, y, z \ldots), \quad \Phi_1(x, y, z, \ldots), \quad \Phi_2(x, y, z) \ldots$$

im Körper $\Omega[x]$ verschwindet, so können wir schliesslich für x einen solchen Werth finden, dass keine dieser Functionen in Ω verschwindet.

Für endliche Körper gilt dieser Satz nicht mehr. Denn ist z. B. p eine Primzahl und Ω der Körper der nach dem Modul p genommenen Zahlclassen, so wird die Function $x^p - x$ für *jedes* ω gleich Null (nach dem Fermat'schen Satze).

Wenn wir in den Sätzen des vorigen Paragraphen einen unendlichen Körper Ω voraussetzen, so können wir für die Variable β solche Elemente aus Ω setzen, dass die Discriminante von $G(t)$, $\Delta(\omega, \beta)$ nicht Null wird, wodurch alle Elemente des Körpers B in Elemente von Ω übergehen. Wenn aber Ω ein endlicher Körper ist, so ist das nicht immer möglich.

Hiermit steht dann auch die oben schon angeregte Frage im Zusammenhang, ob es immer, d. h. für jeden Körper Ω und für jedes m möglich ist, für die Variablen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ solche Elemente aus Ω zu setzen, dass die Discriminante $\Delta(a)$ von Null verschieden ist. Ist Ω ein unendlicher Körper, so folgt diese Möglichkeit aus dem obigen Satze, da die Form $\Delta(a)$ des Körpers $\Omega[a_1, a_2, \ldots, a_m]$ nicht Null ist.

Für einen endlichen Körper können wir die Möglichkeit durch zwei besondere Beispiele nachweisen. Die Discriminante von $x^m - 1$ ist bekanntlich $\pm m^m$ und ist also von Null verschieden, ausser wenn m in Ω gleich Null ist, und die Substitution

$$a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ \ldots,\ a_{m-1} = 0,\ a_m = \pm 1$$

giebt also eine von Null verschiedene Discriminante $\Delta(\omega)$. Wenn aber m in Ω verschwindet, so bilden wir die Discriminante von $x^m - x$, die den Werth $\pm (m-1)^{m-1}$ hat und also in dem Falle wo $m = 0$ ist, das von Null verschiedene Element ± 1 in Ω darstellt. In diesem Fall erfüllt also die Substitution

$$a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ \ldots,\ a_{m-1} = \pm 1,\ a_m = 0$$

den Zweck, eine von Null verschiedene Discriminante $\Delta(\omega)$ zu liefern.

Endlich ist noch über die Voraussetzungen der Theoreme X und XI des § 6 eine Bemerkung beizufügen. Es handelt sich um die Frage, ob es immer Functionen der Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ giebt, wie $\chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$, die bei den ν Permutationen der Galois'schen Gruppe ν verschiedene Werthe annehmen; sie ist für einen unendlichen Körper Ω unbedingt zu bejahen; denn man braucht ja nur für die β solche Elemente aus Ω zu setzen, dass die Discriminante $\Delta(\omega, \beta)$ nicht Null wird, um aus ϱ selbst eine solche Function zu erhalten. Ist aber Ω ein endlicher Körper, so wird eine solche Function vielleicht nicht immer existiren. Trotzdem behalten aber die Sätze X und XI auch in diesen Fällen ihre Bedeutung. Man muss dann aus dem Körper Ω durch Adjunction irgend welcher Variablen einen Formenkörper Ω' ableiten, der ja stets unendlich ist und diesen in den Betrachtungen die zu den Sätzen X und XI geführt haben, an die Stelle von Ω setzen. B selbst ist ein solcher Körper Ω', aber dieser Körper B ist nur einer von unendlich vielen, die zu dem gleichen Ziele führen. Offen bleibt aber für die endlichen Körper die Frage, ob im Körper Ω selbst die Theoreme X, XI ausnahmslose Giltigkeit behalten.

Göttingen, 9. August 1893.

Ueber die Syzygante $D^2\psi = [5, 5, 2]$ zweier simultanen biquadratischen binären Formen.

Von

Frhr. v. GALL in Darmstadt.

Im 34. Bande dieses Journals habe ich die Syzyganten zweier simultanen biquadratischen Formen gegeben und bin dabei zum erstenmale auf eine Grundsyzygante gestossen, die keine binäre Combination $G_i . G_k$ der Grundformen G enthält. Es war dies die einzige zwischen den Invarianten des Systems bestehende Relation, die bei mir von dem Grade $[8, 8, 0]$ und mit der Charakteristik D^4 auftritt. Auf meine Bemerkung hin, dass es mir nicht gelungen wäre, dieselbe als das Quadrat einer Syzygante $[4, 4, 0]$ mit der Charakteristik D^2 zu erweisen, zeigte Herr E. Stroh im 36. Bande dieses Journals, dass dieses überhaupt unmöglich ist, und dass keine Syzygie $[4, 4, 0]$ bestehen kann. Damit wurde aber auch der letzte Zweifel über die Existenz einer Syzygante $[3, 3, 2]$ mit der Charakteristik $D . \psi$ hinfällig. Denn die 2. Ueberschiebung einer solchen über ψ müsste wegen

$$(\psi\psi)^2 = -\tfrac{1}{2} E^2 - \tfrac{1}{4} AA + \tfrac{3}{2} D$$

und der (Seite 209 des 33. Bandes dieses Journals) von mir gegebenen Entwickelungen der Invarianten

$$(\psi l)^2,\ (\psi m)^2,\ (\psi \chi)^2,\ (\psi n)^2 \text{ u. s. w.}$$

nothwendig eine Syzygante

$$D^2 = [4, 4, 0]$$

liefern. Damit ist aber auch der Nachweis erbracht, dass eine Relation $[5, 5, 2]$ mit dem Summand $D^2\psi$ eine Grundsyzygante sein muss. Eine solche lässt sich aber auf verschiedene Weise erhalten. Bei Zugrundelegung meiner alten Bezeichnung ergiebt sich dieselbe durch Anwendung des Processes

$$\partial\Phi = \sum \nabla_i \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}$$

auf die Syzygante [5, 4, 2], (pag. 337 des 34. Bandes dieses Journals] in der Form:

$$\psi \cdot \left[-2D^2 - \tfrac{1}{36} A^2\mathsf{A}^2 - \tfrac{1}{3}\mathsf{A}BC - \tfrac{1}{3} A\mathsf{B}\Gamma + \tfrac{1}{6} A\mathsf{A}D + \tfrac{2}{3} B\mathsf{B}E \right]$$
$$+ l\left[-\tfrac{1}{3}\mathsf{A}BE + \tfrac{1}{6} A^2\mathsf{B} + \tfrac{1}{6} A\mathsf{A}\Gamma + 2\Gamma D \right]$$
$$+ \lambda\left[\tfrac{1}{3} A\mathsf{B}E - \tfrac{1}{6}\mathsf{A}^2 B - \tfrac{1}{6} A\mathsf{A}C - 2CD \right]$$
$$+ \chi\left[DE + \tfrac{1}{6} A\mathsf{A}E - 3C\Gamma - B\mathsf{B} \right]$$
$$+ m[2BC - AD] + \mu[-2\mathsf{B}\Gamma + \mathsf{A}D]$$
$$- n \cdot AC + \nu \cdot \mathsf{A}\Gamma = 0.$$

Ebenso leicht lässt sich dieselbe auf directem Wege erweisen. Aus der Relation

$$(l\chi) = -\tfrac{1}{2} Dl + \tfrac{1}{2} C\chi + \tfrac{1}{2}\mathsf{B}\mu - \tfrac{1}{4}\mathsf{A}\nu$$

[pag. 207, im 33. Band dieses Journals] erhält man durch Ueberschiebung mit λ die Syzygante:

$$-[(l\chi)\lambda] - \tfrac{1}{2} D(l\lambda) + \tfrac{1}{2} C(\chi\lambda) + \tfrac{1}{2}\mathsf{B}(\mu\lambda) - \tfrac{1}{4}\mathsf{A}(\nu\lambda) = 0.$$

Entwickeln wir den ersten Term nach der bekannten Regel, ersetzen die Functionaldeterminanten durch ihre von mir gegebenen Werthe und addiren zu dem Resultate der Substitution

$$-\tfrac{1}{24}\mathsf{A} \cdot [5, 3, 2],$$

wo [5, 3, 2] die Seite 336 im 36. Band dieses Journals gegebene Syzygante $D\mu$ bedeutet, so findet man:

$$+\tfrac{1}{8}[5, 5, 2],$$

d. i. das $\frac{1}{8}$-fache der oben angegebenen Syzygante $D^2\psi$. — Diese aber giebt durch die 2. Ueberschiebung mit ψ bis auf den überflüssigen Factor $-\frac{1}{144}$ die von E. D'Ovidio in Turin bereits im Jahre 1880 unter dem Titel:

La relazione fra gli otto invarianti fondamentali die due forme binarie biquadratiche

in den Atti della Reale Academia delle Scienze di Torino, Vol. XV veröffentlichte und auf ganz anderem Wege, sowie durch mehrere Specialisirungen erhaltene Invariantenrelation [660], deren Kenntniss sowohl Herrn Stroh als mir unbekannt geblieben war. Dieselbe lautet in der von D'Ovidio gegebenen Gestalt:

$$(A^3 - 6B^2)(\mathsf{A}^3 - 6\mathsf{B}^2) + 108\left(4D^3 - (ED - C\Gamma)^2\right) - 3A^2\mathsf{A}^2E^2$$
$$+ 18[2E^2D + 4EC\Gamma - 6D^2] \cdot A\mathsf{A} - 18[A\mathsf{A} + 12D](AC^2 + \mathsf{A}\Gamma^2)$$
$$+ 24[2E^3 - 9(ED + C\Gamma)] \cdot B\mathsf{B} + 144[BC^3 + \mathsf{B}\Gamma^3]$$
$$+ 36E[A^2\mathsf{B}C + \mathsf{A}^2B\Gamma] + 72(3D - E^2)(\mathsf{A}BC + A\mathsf{B}\Gamma) = 0.$$

Ich bin Herrn D'Ovidio zu grossem Danke verpflichtet, dass er mich zuerst durch Zusendung seiner jüngsten Arbeit: *Sopra alcune classi di sisigie binarie*, Torino 1893 (Atti della R. Acad. Vol. XXVIII) auf diese seine so manchen Zweifel lösende Arbeit aufmerksam machte. Es ergiebt sich hieraus sofort, dass meine [8, 8, 0] sich von der seinigen durch den Factor D unterscheidet, was auch eine etwas umständliche Rechnung zeigt.

Ich füge schliesslich wegen der Wichtigkeit der [6, 6, 0] noch hinzu, dass dieselbe auch weiter bis auf den überflüssigen Factor $-\frac{1}{144}$ erhalten wird, wenn man meine Syzygante [3, 4, 2] zweimal über ν schiebt.

Darmstadt, 20. Juli 1893.

Beweis der Integrirbarkeit gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme nach Peano*).

(Mit einer Figurentafel).

Von

Gustav Mie in Karlsruhe.

So lange man bei den Fragen nach der Existenz von Integralen eines Differentialgleichungssystems und nach Methoden, sie zu berechnen, nur Functionen complexer Variablen an nicht-singulären Stellen in den Bereich der Betrachtung zieht, gestalten sich die betreffenden Untersuchungen principiell äusserst einfach. Es handelt sich da stets um rein formales Rechnen mit Potenzreihen. Sobald man hingegen jede beliebige Function reeller Variablen mit berücksichtigt, muss man auf die fundamentalen Definitionen zurückgehen und kommt auf Grenzbetrachtungen. Man denke z. B. an den Existenzbeweis für die „bestimmten Integrale", d. h. die Lösungen von Gleichungen der Form: $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Dieser wichtige Specialfall (welcher ja auch in den Grundlagen der Theorie der Functionen complexer Variablen eine so bedeutende Rolle spielt) hat naturgemäss allgemein das Interesse der Mathematiker gefunden, während der allgemeine Beweis für beliebige Differentialgleichungssysteme nur selten Gegenstand einer Untersuchung wurde. Und doch kann nur durch eine Begründung, die auf die Fundamente zurückgeht, unser Causalitätsbedürfniss befriedigt werden, was man von jenem rein rechnerischen Verfahren, welches zuerst Cauchy für den Fall von Functionen complexer Variablen anwandte, gewiss nicht sagen kann.

Auch der allgemeinere Beweis wurde zuerst von Cauchy**) geführt, doch unter einigen beschränkenden Annahmen. Sei nämlich das Gleichungssystem:

*) Mathematische Annalen Bd. 37, p. 182. 1890.

**) Moigno. Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral. t. 2, p. 385. vgl. auch: Coriolis in Liouvilles Journal. 1837. t. 2, p. 229.

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots y_n),$$

so sollen nicht nur:

1) in der Umgebung der Anfangswerthe $x_0, y_{10}, \ldots y_{n0}$ die rechten Seiten $f_1, f_2, \ldots f_n$ sämmtlich endliche, stetige Functionen aller Variablen $x, y_1, \ldots y_n$ sein,

sondern auch:

2) in demselben Bereich die partiellen Derivirten nach den abhängigen Variabeln: $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}, \frac{\partial f_1}{\partial y_2}, \ldots \frac{\partial f_1}{\partial y_n}, \frac{\partial f_2}{\partial y_1}, \ldots \frac{\partial f_n}{\partial y_n}$ ebenfalls endliche Functionen der Variabeln $x, y_1, \ldots y_n$ sein.

Diese zweite Voraussetzung wurde von Lipschitz*) dahin verallgemeinert, dass für beliebig kleine Werthe $\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots \Delta y_n$ die Ungleichungen:

$$\text{mod.}\ \frac{f_1(x, y_1 + \Delta y_1, y_2, \ldots y_n) - f_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n)}{\Delta y_1} < c_{11},$$
$$\text{mod.}\ \frac{f_1(x, y_1, y_2 + \Delta y_2, \ldots y_n) - f_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n)}{\Delta y_2} < c_{12}$$

etc. in dem betreffenden Bereich überall befriedigt sein sollen; die $c_{11}, c_{12}, \ldots$ sind endliche positive Constanten. (Um hieraus die Cauchy'sche Annahme 2) zu erhalten, müsste man ausserdem noch voraussetzen, dass diese „Differenzenquotienten" für unendlich kleine $\Delta y_1, \ldots \Delta y_n$ sich festen Grenzen nähern). Erst Peano zeigte (Math. Ann. Bd. 37, p. 182. 1890), dass der Existenzbeweis an sich nicht an diese Annahme 2) gebunden ist, obwohl man nur, wenn sie erfüllt ist, zugleich behaupten kann, dass eine *eindeutige* Lösung möglich ist. Peano geht in seiner Beweisführung stets auf die letzten logischen Schlussfolgerungen zurück, und, da er sich ausserdem der stets unzweideutigen Ausdrucksweise des Logikkalküls bedient, so erreicht seine Darstellung den höchstmöglichen Grad der Exactheit, welche bei diesen fundamentalen Untersuchungen unumgänglich nöthig ist. Indessen hat seine Darstellungsweise zugleich eine gewisse Umständlichkeit zur Folge, welche besonders dadurch befördert wird, dass viele Ausdrücke, die sich in der Analysis eingebürgert haben und die uns so bequem manche Weitschweifigkeiten entbehrlich machen, dem Logikkalkül noch fehlen. Ich meine Worte wie: unendlich, unendlich klein, beliebig klein, benachbart, Umgebung etc. etc. Ausserdem wird die Lectüre noch dadurch erschwert, dass die logische Schrift wohl niemandem gleich geläufig ist.

*) Lehrbuch der Analysis. Bd. 2, p. 500.

Da nun aber die Abhandlung manchen originellen und anregenden Gedanken enthält, so schien es mir nicht überflüssig, sie auch den Mathematikern leichter zugänglich zu machen, die sich nicht speciell mit dem Gegenstande beschäftigen. Indem ich in dieser Absicht die Peano'sche Abhandlung überarbeitete, war mein Bestreben mehr auf eine möglichst anschauliche und concise als auf eine ausführliche Darstellung gerichtet.

Anmerkung. Die ängstlich genaue Ausdrucksweise des Logikkalküls möge hier durch ein einziges Beispiel erläutert werden. Der von Peano bewiesene Fundamentalsatz lässt sich mit seiner Hülfe nicht in der gewöhnlichen kurzen Form aussprechen:

„Die Differentialgleichung $\frac{dx}{dt} = \varphi(t, x)$ hat ein Integral, welches für $t = b$ den Werth $x = a$ annimmt. Hier sind unter x, a, φ Complexe n^{ter} Ordnung verstanden."

Peano sagt statt dessen (l. c. p. 203):

$$a \varepsilon q_n \cdot b \varepsilon q : \Omega : : b' \varepsilon b + Q \cdot f \varepsilon q_n | b - b' \cdot fb = a : t \varepsilon b - b' \cdot \Omega_t \cdot \frac{dft}{dt}$$
$$= \varphi\big(t, f(t)\big) \therefore - = {}_{b',f}\Lambda.$$

was er genau in die Wortsprache überträgt:

„Si a est un complexe d'ordre n, et b un nombre réel, alors on peut déterminer b' et f, où b' est une quantité plus grande que b, et f est un signe de fonction qui à chaque nombre de l'intervalle de b à b' fait correspondre un complexe [en d'autres mots, ft est un complexe fonction de la variable réelle t, définie pour toutes les valeurs de l'intervalle $b - b'$]; la valeur de ft pour $t = b$ est a; et dans tout l'intervalle $b - b'$ cette fonction satisfait à l'equation différentielle donnée".

1. Man kann bekanntlich jedes System gewöhnlicher Differentialgleichungen von beliebig hoher Ordnung durch ein System ersetzen, in welchem nur Differentialquotienten erster Ordnung vorkommen, und welches folgende Form hat:

$$\frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(t, x_1, x_2, \ldots x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(t, x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Seien nun die $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ sämmtlich in der Umgebung des Punktes $t = b, x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$, endliche, stetige Functionen der Variablen $t, x_1, \ldots x_n$, so lässt sich beweisen, dass es mindestens ein System von Functionen $f_1(t), f_2(t), \ldots f_n(t)$ giebt, welche für $t = b$ die Werthe $a_1, a_2, \ldots a_n$ annehmen und in der Umgebung von $t = b$ identisch die Gleichungen befriedigen:

$$f_1'(t) = \varphi_1\big(t, f_1(t), \ldots f_n(t)\big),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n'(t) = \varphi_n\big(t, f_1(t), \ldots f_n(t)\big).$$

Kürzer ausgedrückt: *Unter der gemachten Voraussetzung hat das Gleichungssystem für die gegebenen Anfangswerthe mindestens ein System von Integralen.*

2. Der Beweis dieses Satzes, der natürlich für den Fall $n = 1$ am einfachsten sein wird, wird nicht wesentlich complicirter für beliebiges n, wenn man mit allgemeinen „complexen Grössen"*) operirt. Bezeichnet man das Werthsystem: $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ mit einem einzigen Buchstaben x, so heisse dies x eine complexe Zahl n^{ter} Ordnung.

Sei:
$$x = (x_1, x_2, \ldots x_n),$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$$
so sei:
$$x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n).$$

Sei a eine reelle Zahl, so sei:
$$a \cdot x = (a \cdot x_1,\ a \cdot x_2, \cdots a \cdot x_n).$$

Ferner sei:
$$0 = (0, 0, \ldots 0)$$
$$x = y, \quad \text{wenn} \quad x - y = 0,$$

Wie man sofort sieht, gelten für die complexen Zahlen dieselben Operationsregeln, wie für reelle, wobei nur zu bemerken ist, dass man 1) eine Addition einer reellen und einer complexen Zahl, 2) eine Multiplication zweier complexen Zahlen als unmöglich anzusehen hat.

Modul der complexen Zahl x, nennt man die Grösse:
$$mx = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$
und es bedeute $x = \overline{m}p$ „irgend eine complexe Zahl, die den Modul p hat."

Bekanntlich gilt die Ungleichung:
$$(1) \qquad mx + my \geqq m(x+y).$$

Wenn $x_1, x_2, \ldots x_n$ sämmtlich Functionen *einer* Variabeln t sind, so will ich dies durch $x = f(t)$ bezeichnen. Sei
$$f(t + \Delta t) = x + \Delta x;$$
dann ist:
$$m(x + \Delta x) \leqq mx + m\Delta x,$$
$$\frac{m(x+\Delta x) - mx}{\Delta t} \leqq m\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Macht man den Grenzübergang zum unendlich kleinen, so folgt:
$$(2) \qquad \frac{d\,mx}{dt} \leqq m\frac{dx}{dt}.$$

*) Vgl. Peano. Math. Ann. Bd. 32, p. 450. 1888.

Sei ferner t_2 ein zwischen t_0 und t_1 gelegener Werth derart, dass:

$$\Delta_1 t = t_1 - t_2 = t_2 - t_0 = \frac{1}{2} \cdot (t_1 - t_0),$$

so ist:

$$m\left(\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}\right) \leqq \frac{1}{2}\left\{m\left(\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2}\right) + m\left(\frac{f(t_2) - f(t_0)}{t_2 - t_0}\right)\right\} \leqq m\,\frac{\Delta_1 f(t)}{\Delta_1 t},$$

wo $\Delta_1 f(t)$ den grösseren der beiden Werthe:

$$f(t_1) - f(t_2) \quad \text{und} \quad f(t_2) - f(t_0)$$

bedeutet.

Sei nun das Intervall $\Delta_1 t$ wieder in zwei Intervalle getheilt:

$$\Delta_1 t = 2 \cdot \Delta_2 t,$$

so giebt es sicher ein $\Delta_2 f(t)$, so, dass:

$$m\left(\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}\right) \leqq m\,\frac{\Delta_1 f(t)}{\Delta_1 t} \leqq m\,\frac{\Delta_2 f(t)}{\Delta_2 t}.$$

Nun werde $\Delta_2 t$ getheilt und wieder dieser Schluss gemacht, und so fort. Durch Grenzübergang erhält man endlich den Satz:

$$m\left(\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}\right) \leqq m\left(\frac{df(t)}{dt}\right)_{t=t'}, \tag{3}$$

t' ein bestimmter zwischen t_0 und t_1 liegender Werth.

3. Mit Hülfe dieser complexen Zahlen lässt sich nun unser Differentialgleichungssystem (1) als *eine* Gleichung schreiben:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t, x). \quad x \text{ und } \varphi\text{: Complexe } n^{\text{ter}} \text{ Ordnung.}$$

x habe für $t = b$ den Anfangswerth $x = a$. Nach den in **1.** gemachten Annahmen soll auf einer Strecke von $t = b$ bis $t = b + T$ und in der Umgebung von $x = a$ bis zur Sphäre $x = a + \bar{m}R$, wo T und R bestimmte positive Zahlen sind, gelten:

1) $m\,\varphi(t, x) < l$, l eine bestimmte endliche Zahl.

2) es muss stets eine positive, von Null verschiedene Zahl r geben, derart dass, wenn $\tau < \frac{r}{l}$, für jedes Werthepaar (t, x) in dem Bereich die Ungleichung besteht:

$$m\left\{\varphi(t + \vartheta_1 \tau,\ x + \vartheta_2 \cdot \bar{m} r) - \varphi(t, x)\right\} < h,$$

h eine beliebig kleine Zahl, ϑ_1, ϑ_2 ganz beliebige echte Brüche.

3) Endlich sei noch hinzugefügt, dass man jedenfalls ein solches T nehmen darf, welches kleiner ist als $\frac{R}{l}$:

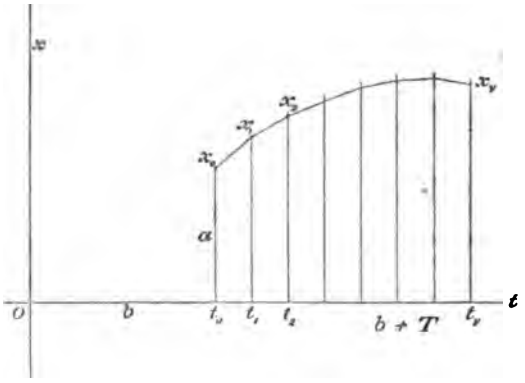
$$T < \frac{R}{l}.$$

4. Hieraus lässt sich nun jedenfalls schliessen, *dass man Functionen*

$x = \beta_h(t)$ bilden kann, welche die Differentialgleichung angenähert erfüllen, derart dass:

$$\alpha. \quad \begin{cases} m\left\{\beta_h'(t) - \varphi\left(t, \beta_h(t)\right)\right\} < h & \text{im Intervall } t = b \text{ bis } t = b + T. \\ \beta_h(b) = a & h \text{ eine beliebig kleine Zahl.} \end{cases}$$

Eine solche Function $\beta_h(t)$ erhält man z. B. auf folgendem Wege: Man theile das Intervall b bis $b + T$ in ν Theilintervalle:



$$\Delta_1 t,\ \Delta_2 t,\ \ldots\ \Delta_\nu t,$$

welche sämmtlich kleiner sind als die Zahl τ (3. 2)); die Werthe von t in den Endpunkten dieser Theilintervalle sind:

$$t_0 = b,\ t_1 = b + \Delta_1 t,$$
$$t_2 = b + \Delta_1 t + \Delta_2 t,\ \ldots$$
$$t_\nu = b + T = b + \Delta_1 t + \Delta_2 t + \cdots + \Delta_\nu t.$$

Für diese Punkte sei das gesuchte $\beta_h(t)$ folgendermassen definirt:

$$x_0 = \beta_h(t_0) = a,$$
$$x_1 = \beta_h(t_1) = a + \varphi(t_0, x_0) \cdot \Delta_1 t,$$
$$x_2 = \beta_h(t_2) = a + \varphi(t_0, x_0) \cdot \Delta_1 t + \varphi(t_1, x_1) \cdot \Delta_2 t,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_\nu = \beta_h(t_\nu) = a + \sum_1^\nu \varphi(t_{\varkappa-1}, x_{\varkappa-1}) \cdot \Delta_\varkappa t.$$

Zunächst ist klar, dass man hierbei immer in dem Bereich bleibt, wo φ endlich und stetig ist. Denn t nimmt nur Werthe zwischen b und $b + T$ an, und andererseits ist:

$$\begin{aligned} mx_0 &= ma && < ma + R, \\ mx_1 &< ma + (t_1 - b) \cdot l && < ma + R, \\ mx_2 &< ma + (t_2 - b) \cdot l && < ma + R, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ mx_\nu &< ma + T \cdot l && < ma + R \end{aligned}$$

wobei darauf zu achten ist, dass $T < \frac{R}{l}$, also $R > T \cdot l$. Die Definition ist demnach möglich. Für alle andern Werthe t, werde $\beta_h(t)$ folgendermassen bestimmt: Wenn t zwischen t_λ und $t_{\lambda+1}$ liegt, so sei $\beta_h(t)$ durch die lineare Function

$$\beta_\lambda(t) = a + \sum_1^{\lambda} \varphi(t_{\varkappa-1},\ x_{\varkappa-1}) \cdot \Delta_\varkappa t + \varphi(t_\lambda, x_\lambda) \cdot (t - t_\lambda)$$

gegeben (vgl. obenstehende Figur). Es ist dann:

$\beta_\lambda'(t) = \varphi(t_\lambda, x_\lambda)$, $t - t_\lambda < \tau$, $m\left(\beta_\lambda(t) - \beta_\lambda(t_\lambda)\right) < l \cdot \tau < r$ (vgl. 3. 2))

also da nach 3. 2):

$$m\left\{\varphi(t_\lambda, x_\lambda) - \varphi(t_\lambda + \vartheta_1\tau,\ x_\lambda + \vartheta_2 \cdot \overline{m} r)\right\} < h,$$

$$m\left\{\beta_\lambda'(t) - \varphi\left(t,\ \beta_\lambda(t)\right)\right\} < h,$$

ausserdem

$$\beta_\lambda(b) = a.$$

Es ist unser $\beta_\lambda(t)$ also:

1) eine in dem betrachteten Bereich endliche und stetige Function,

2) welche den Bedingungen α Genüge leistet.

Damit ist die Existenz solcher angenäherten Lösungen bewiesen.

5. Man erkennt aus diesem Existenzbeweis, dass es nicht nur *eine* solche Annäherung giebt, vielmehr werden die β_λ eine continuirliche Aufeinanderfolge bilden. Aber *die Gesammtheit der β_λ bleibt in endlichen Grenzen eingeschlossen*, wie man folgendermassen erkennt:

Es sei $L = l + h$; angenommen nun, es könnte ein $\beta_\lambda(t)$ in einem Punkte t_1 aus dem von den Linien $(x - a) = \overline{m} L \cdot (t - b)$ gebildeten „Kegel" heraustreten, d. h.:

$$m\left(\beta_\lambda(t_1) - a\right) > L \cdot (t_1 - b)$$

sein, so wäre:

$$m\left(\frac{\beta_\lambda(t_1) - a}{t_1 - b}\right) > L,$$

$$m\left(\frac{d\beta_\lambda(t)}{dt}\right)_{t=t'} > L,\quad b < t' < t_1 \quad \text{vgl. 2. 3)},$$

also:

$$m\left\{\beta_\lambda'(t') - \varphi\left(t',\ \beta_\lambda(t')\right)\right\} + m\,\varphi\left(t',\ \beta_\lambda(t')\right) > l + h,$$

$$m\left\{\beta_\lambda'(t') - \varphi\left(t',\ \beta_\lambda(t')\right)\right\} > h,$$

was gegen die Definition von β_λ wäre. Der „Kegel" $x - a = (t - b) \cdot \overline{m} L$ schliesst also alle β_λ ein. Wenn $n = 1$, wird der „Kegel" durch die beiden Geraden:

$$x - a = + L \cdot (t - b),\quad x - a = - L,\quad (t - b)$$

ersetzt (s. Fig. 3).

6. Der $(n+1)$-dimensionale Raum, welchen die Curven $x = \beta_\lambda(t)$ erfüllen, wird von denselben lückenlos ausgefüllt (nicht in der unvollständigen Weise, wie z. B. die echten Brüche die Strecke 0 bis 1 erfüllen, zwischen denen man noch alle die Irrationalzahlen einschalten

kann.) Das besagt: *Eine Function $f(t)$ ist sicher selbst ein $\beta_h(t)$, wenn man für jedes beliebig kleine δ stets ein $\beta_h(t)$ angeben kann, so, dass für jeden Werth t:*

$$m\big(f(t) - \beta_h(t)\big) < \delta.$$

Es ist dann nämlich:

1) $$m\left\{\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} - \frac{\beta_h(t+\Delta t) - \beta_h(t)}{\Delta t}\right\} < \frac{2\delta}{\Delta t}.$$

Sei ferner η eine fest vorgelegte kleine Zahl, so folgt aus der Ungleichung:

$$m\left\{\beta_h'(t) - \varphi\left(t, \beta_h(t)\right)\right\} < h,$$

dass es einen Werth t' von der Art giebt, dass:

2) $$m\left\{\frac{\beta_h(t+\Delta t) - \beta_h(t)}{\Delta t} - \varphi\left(t, \beta_h(t)\right)\right\} < h + \eta,$$

sobald nur $\Delta t < t' - t$.

Weil weiter φ stetig ist, so folgt:

3) $$m\left\{\varphi\left(t, \beta_h(t)\right) - \varphi\left(t, f(t)\right)\right\} < \varepsilon,$$

wo ε mit δ zugleich unendlich klein wird.

Durch Addition von 1), 2), 3) ergiebt sich:

4) $$m\left\{\frac{f(t+\Delta t) + f(t)}{\Delta t} - \varphi\left(t, f(t)\right)\right\} < \frac{2\delta}{\Delta t} + \varepsilon + h + \eta.$$

Also, weil man in 4) δ und ε beliebig klein nehmen kann, während man Δt und η festhält:

4') $$m\left\{\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} - \varphi\left(t, f(t)\right)\right\} < h + \eta.$$

Und zwar gilt diese Ungleichung für jedes noch so kleine Δt, welches $< t' - t$ ist. Das heisst aber:

$$m\left\{f'(t) - \varphi\left(t, f(t)\right)\right\} < h + \eta.$$

Oder da auch für η keine untere Grenze vorgeschrieben ist:

5) $$m\left\{f'(t) - \varphi\left(t, f(t)\right)\right\} \leqq h.$$

(Dabei können $\beta_h'(t)$ und $f'(t)$ unbestimmt sein.)

7*). Man denke sich nun die Gesammtheit der Curven $x = \beta_h(t)$ vorgelegt. Ebenso die Gesammtheit $x = \beta_{h'}(t)$, $h' < h$. Es ist alsdann klar, dass die letztere Curvenschaar vollständig in der ersteren enthalten ist, und zwar gilt dies natürlich für jedes beliebig kleine h'. Man kann nun, da die $x = \beta_h(t)$ alle innerhalb eines endlichen Raumes verlaufen, die Gesammtheit dieser Curven in eine endliche Anzahl μ von

*) Zu diesem Abschnitt vgl. Cantor. Math. Ann. Bd. 23. p. 454. 1884.

Gebieten zerlegen, die alle wieder ganz im Endlichen liegen. Mindestens eines von diesen Gebieten muss dann die Eigenschaft haben, dass es stets Curven $x = \beta_{h'}(t)$ enthält, wie klein auch h' sein mag. Denn wenn ein Gebiet für ein bestimmtes h' diese Eigenschaft nicht mehr hat, so hat es sie auch für jedes kleinere h' nicht; könnte man also für jedes Gebiet irgend eine Zahl angeben: $h_1', h_2', \ldots h_\mu'$, für welche es die Eigenschaft nicht hat, dann enthielte auch das Gesammtgebiet keine Curven $x = \beta_{h'}(t)$ mehr, sobald h' kleiner ist als alle diese $h_1', h_2', \ldots h_\mu'$. Das aber widerspräche dem in 4. bewiesenen Satze. Für mindestens ein Gebiet, z. B. das k^{te}, wird also eine solche kleinste Zahl h_k' überhaupt nicht existiren. Dieses k^{te} Gebiet theile man wieder in μ kleinere Gebiete, so muss es ebenso unter diesen eines geben, welches für jedes, noch so kleine h' noch Curven $x = \beta_{h'}(t)$ in sich schliesst. Dieses nehme man wieder heraus und theile es weiter. Fährt man so beliebig lange fort, so nähert man sich einer einzigen Curve $x = \beta_0(t)$ als Grenzwerth.

Diese Curve $x = \beta_0(t)$ muss zu der Schaar der $x = \beta_h(t)$ gehören. Denn, angenommen sie gehörte nicht selber dazu, so müsste es, wie aus ihrer Definition folgt, Curven $x = \beta_h(t)$ geben, die ihr unendlich benachbart sind. Dann aber ergiebt sich aus 6., dass sie ebenfalls unter den $x = \beta_h(t)$ enthalten ist. Ebenso gehört sie auch zu *jeder* der Schaaren $x = \beta_{h'}(t)$, $h' < h$. Also ist:

$$m\left\{\beta_0'(t) - \varphi\left(t, \beta_0(t)\right)\right\} < h',$$

wo h' eine beliebig kleine Zahl bedeutet, also:

$$m\left\{\beta_0'(t) - \varphi\left(t, \beta_0(t)\right)\right\} = 0,$$

$$\beta_0'(t) = \varphi\left(t, \beta_0(t)\right).$$

$x = \beta_0(t)$ ist also ein Integral der Gleichung. Damit ist der in 1. annoncirte Satz bewiesen.

Anmerkung. Die Eintheilung der Gesammtheit der β_h in Gebiete kann man sich beispielsweise auf folgende Art vollzogen denken: Man fixire einen bestimmten Werth t, theile den Raum, welchen die Punktmenge $\beta_h(t)$ einnimmt, in μ Theile. Dann sei ein „Gebiet" immer die Curvenschaar, welche durch je einen dieser Theile hindurchgeht. Man sucht nun, wie in 7. beschrieben, ein Gebiet heraus und theilt dies in derselben Weise. Schliesslich erhält man ein Curvenbündel, welches in t unendlich dünn ist. Da dasselbe sich anderswo möglicherweise wieder verbreitert, fixire man einen andern Werth t, wo man aus dem erhaltenen Curvenbündel nach derselben Methode eines ausscheidet, das auch hier unendlich dünn ist. So verfahre man längs der ganzen Strecke von b bis $b + T$, bis man schliesslich ein überall

unendlich dünnes Curvenbündel erhält $x = \beta_0(t)$, für welches das weiter in 7. gesagte gilt.

8. Es ist sehr wohl möglich, dass es nicht nur eine solche Function $x = \beta_0(t)$ giebt (wenn man nicht noch die Lipschitz'sche Annahme macht. Vgl. 10.), sondern mehrere oder gar ein oder mehrere Continua von Functionen.

Wenn $n = 1$ ist, sind nur zwei Fälle möglich. Entweder giebt es nur ein $x = \beta_0(t)$ oder die Curven $x = \beta_0(t)$ bedecken ein, und nur ein Continuum. Gäbe es nämlich zwei Integrale $x_1 = f_1(t)$ und $x_2 = f_2(t)$, zwischen denen noch Punkte (x_3, t_0) liegen (etwa so, dass $f_1(t_0) < x_3 < f_2(t_0)$), welche keinem $\beta_0(t)$ angehören, so muss es doch nach dem in 7. bewiesenen Satz eine Lösung der Gleichung geben $f_3(t)$, welche für $t = t_0$ den Anfangswerth x_3 hat. Und zwar muss $f_3(t)$ in dem ganzen Intervall von t_0 bis b (rückwärts gegangen) existiren. Ist nun $f_3(b) = a$, so ist $f_3(t)$ ja ein $\beta_0(t)$ (s. Fig. 2), ist aber $f_3(b) \gtrless a$, so muss nach einem bekannten Satze $f_3(t)$ an einem Punkte des Intervalls b bis t_0 entweder mit $f_1(t)$ oder mit $f_2(t)$ zusammenfallen: (s. Fig. 1)

$$f_3(t') = f_1(t'), \quad b < t' < t_0,$$

oder

$$f_3(t'') = f_2(t''), \quad b < t'' < t_0.$$

Man definire nun eine Function x von t so:

von $t=b$ bis $t=t'$, $x=f_1(t)$, von $t=t'$ bis $t=t_0$, $x=f_3(t)$,
bezw. „ $t=b$ „ $t=t''$, $x=f_2(t)$, „ $t=t''$ „ $t=t_0$, $x=f_3(t)$

so ist x eine stetige Function, welche der Differentialgleichung genügt und für $t = b$ den Werth a hat, also ein $\beta_0(t)$, welches durch den Punkt (x_3, t_0) geht.

Für beliebiges n lässt sich der Satz so aussprechen:

Die die Integrale repräsentirenden Curven können nicht Continua bilden, in welchen es noch „innere Punkte" giebt, durch die kein $x = \beta_0(t)$ geht. „Innere Punkte" heissen solche Punkte, dass *alle* Curven $x = \omega(t)$ ($\omega(t)$ eine *eindeutige*, stetige Function), die durch sie hindurchgehen, bei gehöriger Verlängerung wenigstens auf *einer* Seite das Continuum durchschneiden. —

9. Wenn $n = 1$ ist, so wird die Curvenschaar der $x = \beta_0(t)$ durch eine obere und eine untere Curve begrenzt. Diese Grenzcurven repräsentiren selber Integrale der Gleichung (s. Fig. 1 und 2).

Sei die Gleichung der Grenzcurve (z. B. der oberen) $x = f(t)$. Durch jeden Punkt dieser Linie muss sicher irgend ein $x = \beta_0(t)$ hindurchgehen, sonst würde sie nicht die Begrenzung bilden (nach 6. leicht zu beweisen). Im Punkte t_1, sei der Werth von $f(t)$: $x_1 = f(t_1)$, es muss sicher ein $\beta_0(t)$ geben, so, dass:

$$\beta_0'(t_1) = \varphi(t_1, x_1),$$
$$\beta_0(t_1) = x_1.$$

Da nun aber alle andern Werthe $\beta_0(t)$ kleiner sind als die entsprechenden $f(t)$, so ist:

$$\frac{\beta_0(t_1) - \beta_0(t_1 - \Delta t_1)}{\Delta t_1} > \frac{f(t_1) - f(t_1 - \Delta t_1)}{\Delta t_1},$$
$$\frac{\beta_0(t_1 + \Delta t_1) - \beta_0(t_1)}{\Delta t_1} < \frac{f(t_1 + \Delta t_1) - f(t_1)}{\Delta t_1}.$$

Macht man nun den Grenzübergang, so ergiebt sich:

$$\left(\frac{d\beta_0(t)}{dt}\right)_{t_1} = \left(\frac{df(t)}{dt}\right)_{t_1}.$$

Also:

$$f'(t_1) = \varphi(t_1, x_1).$$

Da dies für jeden Werth von t gilt, so genügt $f(t)$ selbst der Gleichung, ist also $\beta_0(t)$.

Für beliebiges n lautet der entsprechende Satz:

Die Punktcontinua (n-fache Mannigfaltigkeiten), welche den von einer Schaar von Integralcurven ausgefüllten $((n+1)$-dimensionalen$)$ Raum umhüllen, werden von einer continuirlichen Reihenfolge von Integralcurven zusammengesetzt.

10. *Wenn man nun noch die Bedingung hinzufügt:*

$$m\left(\frac{\varphi(t, x + \Delta x) - \varphi(t, x)}{\Delta x}\right) < p$$

p eine fest bestimmte Zahl, Δx beliebig klein, (x, t) irgend ein Werthesystem in dem betrachteten Bereich, so lässt sich zeigen, dass es nur ein einziges Integral giebt, dass die Mannigfaltigkeit $x = \beta_0(t)$ sich also auf eine Curve reducirt.

Anmerkung. Dies ist die von Lipschitz gemachte Annahme. Es ist damit nicht gesagt, dass die partiellen Derivirten:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}$$

existiren müssten. Vielmehr können diese beliebig viel Singularitäten von der Art haben, wie $\sin \frac{1}{x}$ für $x = 0$.

Seien $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t)$ zwei Functionen $\beta_h(t)$; nach Voraussetzung ist:

$$m\left(\frac{\varphi(t, x_1) - \varphi(t, x_2)}{x_1 - x_2}\right) < p,$$
$$m\left(\varphi(t, x_1) - \varphi(t, x_2)\right) < p \cdot m(x_1 - x_2).$$

Nun ist nach 2. 2):

$$\frac{d}{dt} m(x_1 - x_2) < m\left(f_1'(t) - f_2'(t)\right)$$
$$< m\left(f_1'(t) - \varphi(t, x_1)\right) + m\left(f_2'(t) - \varphi(t, x_2)\right) \cdot$$
$$+ m\left(\varphi(t, x_1) - \varphi(t, x_2)\right)$$
$$< 2h + p \cdot m(x_1 - x_2).$$

Setzt man $m(x_1 - x_2) = y$, so gilt für y:

$$\frac{dy}{dt} < 2h + p \cdot y; \quad (y)_{t=b} = 0.$$

Definirt man nun y_1 durch die Gleichung:

$$\frac{dy_1}{dt} = 2h + p \cdot y_1; \quad (y_1)_{t=b} = 0$$

so ist sicher $y < y_1$ für jedes t. Nun kann man aber die Gleichung durch die Function $y_1 = \frac{2h}{p} \cdot (e^{p(t-b)} - 1)$ befriedigen. Also ist sicher:

$$y = m(x_1 - x_2) < \frac{2h}{p} (e^{p(t-b)} - 1).$$

Die sämmtlichen Curven $x = \beta_h(t)$ verlaufen also in einer Röhre, deren Durchmesser überall kleiner ist als $\frac{2h}{p} (e^{p(t-b)} - 1)$. Wird h unendlich klein, so schrumpft diese Röhre in eine Curve zusammen, es wird $x_1 = x_2$. Es ist also nur eine einzige Curve $x = \beta_0(t)$ vorhanden, das Integral ist eindeutig bestimmt (s. Fig. 3).

Bemerkung zu **10.** Dass die in **10.** eingeführte Bedingung aber nur hinreichend und nicht nothwendig ist, zeigt Peano an folgendem Beispiel:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x)$$

x eine reelle Zahl. φ sei im Intervall $x = a$ bis $x = b$ stetig und von Null verschieden (φ behält also immer dasselbe Vorzeichen). Man setze nun:

$$t_0 - \int_a^{x_0} \frac{dx}{\varphi(x)} = a', \quad t_0 + \int_{x_0}^{b} \frac{dx}{\varphi(x)} = b', \quad t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\varphi(x)} = t.$$

So ist t eine Function von x, welche jeden Werth nur einmal annimmt und für $x = x_0$ gleich t_0 ist. Also ist auch x eine eindeutig bestimmbare Function von t im Intervall $t = a'$ bis b', Anfangswerth für $t = t_0 : x = x_0$, und der Differentialgleichung $\frac{dx}{dt} = \varphi(x)$ genügend. Dabei braucht über $\varphi'(x)$ gar keine Annahme gemacht zu werden.

Inhaltsübersicht:

Seite

Einleitung 553
1. Der Satz von der Existenz von Integralen. 555
2. Die allgemeinen complexen Zahlen. Operationen mit denselben. Modul. 556
3. Reduction des Gleichungssystems auf eine einzige Gleichung mit complexen Zahlen 557
4. Beweis für die Existenz angenäherter Lösungen $(\beta_h(t))$ 557
5. Die Gesammtheit der Functionen $\beta_h(t)$ verläuft innerhalb endlicher Grenzen 559
6. Eine Function $f(t)$, welche unendlich nahe bei einem $\beta_h(t)$ verläuft, ist selbst ein $\beta_h(t)$ 559
7. Der Existenzbeweis 560
8. Ueber das Continuum, welches die Lösungen erfüllen. 562
9. Die das Continuum begrenzenden Functionen sind selbst Integrale . . 562
10. Wann die Lösung eindeutig ist 563
Erklärung der Figuren. 565
Hinweis auf Peano's Abhandlung. Math. Ann. 37. 1890 566

Erklärung der Figuren.

Fig. 1. Integrale der Gleichung:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(x^2+t^2-2rx)^{\frac{1}{2}} - t}{x-r},$$

Anfangswerthe $x=0$, $t=0$, $\varphi=0$. φ ist um den Anfangspunkt herum endlich, stetig und (wenn man das Vorzeichen der Quadratwurzel als positiv fixirt) eindeutig. Also lässt sich die Gleichung integriren. $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0$ ist hingegen unendlich, also giebt es viele Lösungen:

1) Das „singuläre Integral": $x = r - \sqrt{r^2-t^2}$

2) Die „particulären Integrale": $x = r - \sqrt{k^2+t^2-2kt}$, $0 \leqq k \leqq r$, welche sich von dem singulären Integral abzweigen. (Fall 2 in Nr. 8). Gezeichnet für $k=0$; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. (r ist $=1$ gewählt).

Sobald $x=r$ wird, so wird $\varphi=\infty$, es hören da plötzlich die Integrale auf.

(Nimmt man die Wurzel negativ, so erhält man als einziges Integral: $x = r - \sqrt{r^2-t^2}$).

Fig. 2. Integrale der Gleichung:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4x.t^3}{x^2+t^4},$$

Anfangswerthe $x=0$, $t=0$, $\varphi=0$ (denn $x^2+t^4 > m2xt^2$), φ um den Anfangspunkt herum endlich, stetig, eindeutig. $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 = \infty$.

Das „allgemeine Integral" ist:

$$(x+c)^2 = c^2 + t^4.$$

Also für den gegebenen Anfangswerth:

$$x = c - \sqrt{c^2 + t^4} \text{ oder: } \sqrt{c^2 + t^4} - c, \quad c \text{ positiv.}$$

In der Figur ist: $c = 0$ (Parabeln $x = \pm t^2$); $c = 0,2$; $0,5$; $1,0$; $2,5$ und $c = \infty$ (Gerade $x = 0$). Alle die die Integrale repräsentirenden Curven berühren die t-Axe im Anfangspunkt. (Fall 1 in Nr. 8).

Fig. 3. (Der Masstab dieser Figur ist doppelt so gross, wie der der beiden andern).

Integral der Gleichung:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{1-} + \sqrt{\frac{1-t}{1+t}},$$

Anfangswerthe: $x = 0$, $t = 0$, $\varphi = 1$.

$$x = (1-t) \,.\, \text{arc sin } t.$$

Das Continuum der Curven $x = \beta_h(t)$, wird begrenzt durch zwei Curven, welche die Integrale der Gleichungen $\frac{d\beta_h}{dt} = \varphi(t, \beta_h) \pm h$ darstellen, d. h. durch:

$$x = (1-t) \,.\, \text{arc sin } t \mp h \,.\, (1-t) \,.\, \lg(1-t).$$

In der Figur ist der Bereich der β_h für $h = 0,1$ weit-, und für $h = 0,05$ eng-schraffirt. Für $t = 1$ wird $\varphi = \infty$, nur für $t = 1$, $x = 0$ ist φ unbestimmt. In Folge dessen endigen alle Curven im Werthe $t = 1$, über welchen hinaus sich das Integral nicht fortsetzen lässt. Da aber zufällig für $t = 1$, x den Werth Null hat, so wird $\frac{dx}{dt}$ für $t = 1$ nicht unendlich.

Betrachtet man nur den Bereich $x = 0$ bis $0,5$; $t = 0$ bis $0,5$: Der grösste Werth, den φ annimmt, ist $l = 1$, also $\frac{R}{l} = T$. Der grösste Werth von $\frac{\partial \varphi}{dx}$ in dem Bereich ist $p = 2$. Auf der Figur ist der in 5. beschriebene „Kegel" abgebildet für den Werth $h = 0,1$; ebenso für dasselbe h die „Röhre" von Nr. 10. Der „Kegel" wird gebildet aus den beiden Geraden:

$$x = \pm 1,1 \,.\, t, \quad (L = l + h = 1,1);$$

die „Röhre" aus den beiden Curven:

$$x = (1-t) \,.\, \text{arc sin } t \pm 0,1 \,.\, (e^{3t} - 1).$$

Hinweis auf Peano's Abhandlung Math. Ann. Bd. 37. 1890.

Einleitung. Vgl. § a, wo die Zeichen des Logikkalküls erklärt werden.

1. Peano reducirt das Problem p. 203 erst auf einen Specialfall, was mir um so weniger nothwendig erschien, als P. selber die Beweise oft ganz unabhängig von dieser Specialisirung führt.

2. Vgl. § b speciell 24 und 28. In der interessanten Abhandlung: „Integration par séries des équations différentielles lineaires" Math. Ann. Bd. 32, p. 450 behandelt Peano die complexen Zahlen ausführlicher. Die manchmal recht nützliche Formel 3) (siehe 5.) hat Peano nicht.

In § c und § c′ finden sich im Wesentlichen nur Gegenstände von mehr logischem Interesse behandelt. Die Definition der allgemeinsten Abbildung, Umkehrung (das Zeichen $\bar{m}$ § c, 4.), die Definition von „gleichmässig stetig" in logischen Zeichen (§ c′, 2) sind hier gegeben.

§§ d und e beginnen den eigentlichen Beweis des Satzes (s. unten).

3. *und* 4. Peano betrachtet im allgemeinen die Functionen $\beta_h(t)$ nicht in ihrem ganzen Verlauf, sondern nur in ihren einzelnen Punkten. Er definirt:

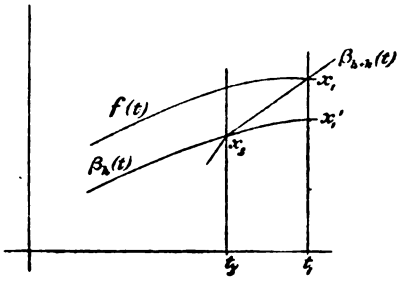
§ 1, 1. $\beta(t_0, t_1, h)$: Gesammtheit der Abbildungen des Intervalls t_0 bis t_1 auf Complexe n^{ter} Ordnung, welche die Gleichung mit der Annäherung h befriedigen.

§ 1, 2. $B(x_0, t_0, t_1, h)$: Gesammtheit der Werthe $f(t_1)$, wenn $f(t)$ ein β_h ist, welches für $t = t_0$ den Werth x_0 hat.

§ 2 enthält den Existenzbeweis, von welchem der meinige unter 4. nicht weiter abweicht.

5. Vgl. § 3, 7. Beweis stützt sich auf den Hülfssatz § 3, 1. Ich meine diesen Umweg durch Anwendung der Ungleichung 2. 3) vermieden zu haben.

6. Vgl. § 3, 9. wo zu bemerken ist, dass k beliebig klein ist. Ferner siehe § d, wo der Begriff der „abgeschlossenen" Punktmenge nach Cantor eingeführt wird. Da ich bei meiner Art des Beweises wünschte, gleich den ganzen Verlauf der β_h im Auge zu behalten, so musste ich in 6. naturgemäss einen etwas andern Weg einschlagen als Peano, welcher die einzelnen Punkte betrachtet. In den von mir gebrauchten Zeichen geschrieben, hat der Beweis § 3, 9., der sich mit dem meinigen nicht direct vergleichen lässt, folgenden Gang: Sei $f(t_1) = x_1$, $\varphi(t_1, x_1) = a$. Man bestimme einen nahe bei t_1 gelegenen Werth t_3 und eine kleine Zahl p so, dass für alle Δt und Δx, wenn nur:



$$\Delta t \leqq t_1 - t_3, \qquad m\Delta x < p$$

gilt: $m\{\varphi(t_1 \pm \Delta t,\ x_1 + \Delta x) - \varphi(t_1, x_1)\} < \frac{1}{3}k$, k beliebig klein ausserdem sei $t_1 - t_3 < \frac{p}{ma + h + k}$.

Dann giebt es einen Punkt x_3, t_3 welcher sich einerseits mit x_1, t_1 durch ein β_{k+1} verbinden lässt, und andererseits auf einer durch den Anfangspunkt gehenden Curve β_k liegt. (Und zwar nimmt dies β_k für t_1 einen Werth x_1' an, der von x_1 um weniger als $\frac{1}{3}k \cdot (t_1 - t_3)$ verschieden ist). Damit ist gezeigt, dass x_1, t_1 auf einem durch den Anfangspunkt gehenden β_{k+1} liegt.

7. Vgl. § e, 9. und 11. § 4 insbesondere 4. 18. 19. 20. § 6, 7. (8) und 9 (10). § 7, 13. 14. (15). Da immer nur einzelne Punkte betrachtet sind, so ergiebt der Grenzübergang § e (den ich sonst ganz ebenso gemacht habe) nicht eine Curvenschaar, sondern im allgemeinen ein Continuum von höherer Dimension (§ 4) und es muss daher erst ausführlich nachgewiesen werden (§ 6 und § 7), dass innerhalb dieses Continuums (und zwar nur hier) Integrale verlaufen. Uebrigens bemerkt man bei einigem Nachdenken leicht, dass Peano seine guten Gründe zu diesem Verfahren hat, zumal man auch bei der Form, die ich dem Beweise gab, schliesslich doch die einzelnen Punkte der Curven in Betracht ziehen muss (vgl. die Anmerkung zu 7.).

8. Von Peano nicht ausgesprochen,

9. Vgl. § 6. Beweis allerdings anders.

10. § 5. Zur Bemerkung: § 8, p. 228. (Uebrigens ist dieser Beweis im wesentlichen noch der von Cauchy und Lipschitz gelieferte).

Beispiele. Vgl. § 8.

Zur projectiven Geometrie.

Von

WILHELM KILLING in Münster i./W.

Die zwei kleinen und einfachen Beiträge, welche ich hier zu veröffentlichen mir gestatte, betreffen beide die projective Geometrie, ohne im übrigen mit einander in Beziehung zu stehen. Der erste Paragraph beantwortet die Frage, wie viel Punkte in einem projectiven Raume denselben Werthen der Coordinaten zugeordnet werden können; in § 2 gebe ich einen Weg an, der neben dem von Herrn Klein mitgetheilten geeignet ist, von der Projectivität zur Metrik zu führen.

Um die Lage eines Punktes in einem projectiven Raume von n Dimensionen zu bestimmen, wählt man $n + 1$ endliche Grössen $x_0, x_1 \ldots x_n$ und ordnet jedem Punkte ein festes Verhältniss von je zwei dieser Grössen zu. Meistens denkt man auch umgekehrt durch die Verhältnisse der $n + 1$ Grössen einen einzigen Punkt bestimmt, was offenbar gestattet ist. Dagegen ist bisher die Frage nicht beantwortet, ob eine derartige Zuordnung nothwendig ist oder ob man demselben Werthsystem mehrere Punkte zuordnen darf. Und doch ist die Beantwortung dieser Frage nicht ohne Bedeutung. Wie schon früher vielfach anerkannt war, jetzt aber in Folge der Berechtigung der Clifford-Klein'schen Raumformen unmittelbar einleuchtet, ist es nicht gestattet, den Raum als Ganzes von vorn herein der Untersuchung zu unterziehen, sondern man muss zunächst von einem allseitig begrenzten Bereiche ausgehen, dessen Gesetze entwickeln, und auf diese gestützt, die Art der unbegrenzten Fortsetzung untersuchen. Will man aber bei einer projectiven Raumform betreffs des letzten Punktes in's Reine kommen, so muss man wissen, wie viel Punkte zu gleichen Werthen der Coordinaten gehören.

Die Antwort lautet verschieden nach der Zahl der Dimensionen: in einer eindimensionalen Raumform kann demselben Verhältniss $x_1 : x_0$ jede beliebige Zahl von discreten Punkten zugeordnet werden, aber bei zwei und mehr Dimensionen können zu jedem Werthsystem der Coordinaten höchstens zwei Punkte gehören. Soweit ich die Literatur kenne,

dürfte der erste Theil des Satzes bereits bekannt sein; dagegen scheint man, soweit man überhaupt an eine derartige Frage gedacht hat, vielfach das für eine Dimension gefundene Resultat als allgemein gültig angenommen zu haben.

Der Beweis für die beiden Behauptungen kann schon in einigen gelegentlich von mir gemachten Bemerkungen gefunden werden; ich habe aber geglaubt, ihn hier in voller Ausführlichkeit mittheilen zu sollen, da ich dort metrische Beziehungen benutzt habe und der Leser vielleicht nicht unmittelbar erkennt, dass sie nur den Ausdruck betreffen, dem Wesen aber durchaus fremd sind. —

Um zu den Mannigfaltigkeiten constanter Krümmung zu gelangen, stellt Herr Klein im sechsten Bande der Annalen (S. 127) folgende Forderungen auf:

1) Man entwickle die projectivische Behandlungsweise einer Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen, im Anschluss daran den Begriff algebraischer Gebilde und complexer Elemente.

2) Man gründe auf ein Gebilde, welches durch eine quadratische Gleichung (von nicht verschwindender Determinante) zwischen den projectivischen Coordinaten dargestellt wird, die Cayley'sche Massbestimmung.

3) Man beschränke sich auf die Betrachtung quadratischer Gleichungen mit reellen Coefficienten und untersuche, welche besondern Eigenschaften die auf eine solche Gleichung gegründete Massbestimmung besitzt je nach der *Art* der gegebenen Gleichung.

Hierbei sind diejenigen $(n-1)$-dimensionalen Gebilde zweiten Grades auszuschliessen, welche reelle Gerade oder Ebenen enthalten, und um zu den parabolischen Raumformen zu gelangen, hat man einen Weg einzuschlagen, der bereits im vierten Bande (S. 611—615) von Hrn. Klein angegeben war.

Im zweiten Bande seines im Anschluss an Clebsch's Vorlesungen bearbeiteten Lehrbuches der Geometrie (S. 470) führt Hr. Lindemann direct die unendlich fernen Gebilde ein, zeigt, dass sie vom ersten oder zweiten Grade sein müssen, und gründet hierauf die Metrik. Dieser Weg ist jedoch, wie mir scheint, nicht frei von Bedenken. Wenn zudem das unendlich ferne Gebilde vom ersten Grade ist, so müssen noch weitere Forderungen gestellt werden, um die Metrik begründen zu können.

Jedenfalls dürfte die Mittheilung eines neuen Weges, welcher geeignet ist, von der Projectivität zur Metrik zu führen, einiges Interesse beanspruchen, wofern er nur rein auf projectivem Gebiete bleibt und die Messung (und damit die starre Bewegung) nicht benutzt. Nach dieser Richtung hin wird man, wie ich glaube, der mitzutheilenden Methode keinen Vorwurf machen können; sie hat aber noch den be-

sonderen Vorzug, dass sie nur zu den Räumen constanter Krümmung oder wie ich gern sage, zu den eigentlichen Raumformen führt, also für das Quadrat des Linienelementes eine beständig positive quadratische Form der Differentiale und für das Krümmungsmass einen constanten Werth liefert. Wir wollen das Princip für den dreidimensionalen Raum aussprechen.

Die projectiven Umgestaltungen eines solchen Raumes bilden eine 15-gliedrige Gruppe, deren Transformationen gestatten, jeden Punkt, jede Gerade und jede Ebene in Beziehung zu jedem andern Punkte, jeder andern Geraden und Ebene zu setzen. Es muss demnach als eine wesentliche Eigenschaft der projectiven Transformationen betrachtet werden, dass sie nicht nur gestatten, jeden Punkt in jeden andern, sondern auch jede Gerade in jede andere Gerade, jede Ebene in jede andere Ebene zu transformiren. Will man demnach die Gesammtheit der projectiven Transformationen beschränken, so liegt nichts näher, als die Forderung bestehen zu lassen, dass wenigstens für einen gewissen Bereich alle Punkte, Geraden und Ebenen in einander transformirt werden können; man kann somit nach der kleinsten projectiven Gruppe fragen, welche im Stande ist, dieser Forderung zu genügen. Dabei tritt die merkwürdige Vereinfachung ein, dass man sich auf die Ebenen beschränken darf, dass man also nur die Forderung zu stellen braucht: Von der allgemeinen projectiven Gruppe des dreidimensionalen Raumes soll die kleinste Untergruppe gesucht werden, welche im Stande ist, eine Ebene in jede andere zu transformiren, die mit ihr in einem festgewählten Bereiche liegt.

Um zur Metrik zu gelangen, darf man demnach folgenden Weg einschlagen:

1) Nachdem die allgemeinen Begriffe von Fläche, Linie und Punkt entwickelt sind, setze man die Geraden und Ebenen axiomatisch als Systeme von Linien und Flächen voraus, welche der Forderung genügen, dass *a*) durch je zwei Punkte eine einzige Linie des Systems geht, und dass *b*) durch jede Linie des Systems und einen jeden ausser ihr gelegenen Punkt eine einzige Fläche des Systems geht. Hieraus leite man die Gesetze der Projectivität her, namentlich entwickle man die gebräuchlichen Coordinaten und die allgemeine projective Transformationsgruppe.

2) Darauf wähle man einen Punkt, betrachte alle Ebenen, welche in seiner Umgebung liegen, und bestimme die kleinste projective Gruppe, deren Transformationen im Stande sind, eine derartige Ebene in jede andere solche Ebene überzuführen. Hierdurch gelangt man zur Metrik, und zwar zu den Raumformen positiver, verschwindender und negativer Krümmung. In der Darstellung der Untergruppe tritt nämlich eine willkürliche Constante auf; ihr Verschwinden liefert die

parabolische, ein positiver Werth die elliptische, ein negativer die hyperbolische Geometrie.

Wie bereits von den verschiedensten Seiten hervorgehoben ist, dürfte es am Besten sein, auch die erste Forderung zunächst auf ein fest begrenztes Gebiet zu beschränken. Statt die kleinste Untergruppe zu suchen, welche der zweiten Forderung genügt, kann man auch manche andere Beschränkung einführen. Indessen gehen wir darauf nicht näher ein.

In einer projectiven Raumform von n Dimensionen giebt es ausser den geraden Linien Ebenen von $2, 3 \ldots n-1$ Dimensionen. Die Gesammtheit der projectiven Transformationen ist im Stande, jede Ebene in irgend eine andere überzuführen, wofern beide nur gleichviel Dimensionen haben. Wir können also nach der kleinsten Untergruppe fragen, bei welcher diese Eigenschaft wenigstens solange besteht, als man innerhalb eines gewissen Bereiches bleibt. Zu dem Zwecke genügt es aber schon, dass die $(n-1)$-dimensionalen Ebenen in der bezeichneten Weise auf einander bezogen werden können. Auch hier enthält die kleinste Untergruppe, die dieser Forderung genügt, noch eine willkürliche Constante; jenachdem diese positiv, Null oder negativ ist, bekommt man ein positives, verschwindendes oder negatives Krümmungsmass.

Dieser Satz erleidet nur eine Ausnahme für $n = 2$, wo noch eine bekannte, bereits von Herrn von Helmholtz aus mechanischen Principien hergeleitete Möglichkeit besteht. Für die projective Geometrie ist diese Ausnahme um so weniger von Belang, da für den Aufbau der Projectivität die Zahl der Dimensionen mindestens gleich drei vorausgesetzt werden muss; indessen nöthigt uns das eingeschlagene Beweisverfahren, auch diese Ausnahme zu berücksichtigen.

Was den Beweis betrifft, so gestaltet sich derselbe besonders einfach, wenn man gewisse Sätze benutzen will, die Herr Lie über projective Gruppen bewiesen hat. Namentlich hat dieser Gelehrte schon vor längerer Zeit die projectiven Gruppen der Ebene vollständig und die des dreidimensionalen Raumes der Hauptsache nach mitgetheilt; auch findet man in seinen Arbeiten zahlreiche Bemerkungen, die es ausser Zweifel setzen, dass er entsprechende Theoreme für jede Zahl von Dimensionen kennt, wie sie der Eintheilung der projectiven Gruppen des dreidimensionalen Raumes zu Grunde liegen. Demnach dürfen wir annehmen, dass der dritte Band seines grossen Werkes eine eingehende Behandlung der projectiven Gruppen bringen wird, die es ermöglicht, den Beweis unseres Satzes ohne jede Rechnung fast unmittelbar abzulesen. In der That zeigt ein Blick auf die im zehnten Bande des norwegischen Archivs S. 108 und 109 angegebenen Gruppen, dass für die Ebene zweigliedrige Gruppen der gestellten Forderung

nicht genügen, und dass von dreigliedrigen Gruppen nur diejenigen in Betracht kommen, bei denen zwei Schaaren von geraden Linien in sich verbleiben, wobei es nur nothwendig ist, die beiden Schaaren als conjugirt complex vorauszusetzen. Indessen glaube ich mich auf diesen Hinweis beschränken zu sollen. Schon der Umstand, dass Hr. Lie die fraglichen Sätze meines Wissens nur in seinem Archiv veröffentlicht hat, das nicht jedem Leser zugänglich sein dürfte, lässt es angemessen erscheinen, einen Beweis mitzutheilen, der nur die ersten Elemente aus der Theorie der Transformationsgruppen benutzt, indem er sich ausschliesslich auf den Satz stützt, dass in einer Gruppe, welche zwei infinitesimale Transformationen enthält, auch nothwendig die durch die Combination beider erhaltene Transformation vorkommt. Leider ist bei diesem Wege eine gewisse Breite nicht zu vermeiden.

Zum Schlusse will ich noch bemerken, dass man die $(n-1)$-dimensionalen Ebenen für unsern Zweck auch durch Ebenen von weniger Dimensionen und durch gerade Linien ersetzen kann. Speciell kann man sagen: Die kleinste projective Untergruppe des dreidimensionalen Raumes, die es ermöglicht, alle Geraden in der Umgebung eines gewissen Punktes in einander überzuführen, liefert die Transformationen, durch welche die Bewegung eines Euklidischen oder Lobatschewsky'schen oder Riemann'schen Raumes beschrieben wird. Auf den Beweis dieser Behauptung glaube ich jedoch nicht näher eingehen zu sollen.

§ 1.

Wie viel Punkte lassen sich denselben Coordinatenwerthen zuordnen?

A. Den einzelnen Punkten einer eindimensionalen Raumform kann man stetig Zahlen x in der Weise zuordnen, dass jede projective Umgestaltung durch eine gebrochene lineare Function von x in der Form

$$x' = \frac{\varkappa x + \lambda}{\mu x + \nu} \tag{1}$$

dargestellt wird. Soll auch diese Umgestaltung stetig erfolgen, so lasse man das System $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ aus dem System $1, 0, 0, 1$ durch eine stetige Veränderung hervorgehen, ohne dass die Determinante $\varkappa\nu - \lambda\mu$ jemals verschwindet. Man kann etwa die Coefficienten $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ von einer veränderlichen Grösse t abhängig machen und festsetzen, dass sie für $t = 0$ die Werthe $1, 0, 0, 1$ annehmen. Hiernach kann man jede projective Umgestaltung aus infinitesimalen Transformationen erhalten, vermittelst deren die unendlich kleine Aenderung δx von x bei passender Wahl dreier constanter Grössen a, b, c durch die Gleichung dargestellt wird:

$$\delta x = (a + bx + cx^2)\,\delta t, \tag{2}$$

welche für $x = \frac{1}{\xi}$ übergeht in:

$$\delta\xi = -(c + b\xi + a\xi^2)\,\delta t. \tag{2*}$$

Mindestens einer der Quotienten $\delta x : \delta t$ und $\delta\xi : \delta t$ ist somit bei jeder Wahl der Constanten a, b, c für jeden Werth x eindeutig und endlich.

Jetzt setze man die Grösse x in Beziehung zu einer Grösse y durch die Gleichung:

$$x = \operatorname{tg}\frac{y}{2k}, \tag{3}$$

wo k eine constante Grösse bezeichnet, die etwa gleich Eins gesetzt werden kann. Dann entspricht jedem endlichen reellen Werthe von y ein einziger Werth von x; dagegen gehören zu jedem Werthe von x unendlich viele Werthe von y, die sich um beliebige Vielfache von $2k\pi$ unterscheiden. Zugleich wird

$$\delta y = k\left[(a + c) + b\sin\frac{y}{k} + (a - c)\cos\frac{y}{k}\right]\delta t, \tag{4}$$

so dass zu jedem reellen endlichen Werthe von y ein reeller endlicher Werth des Quotienten $\delta y : \delta t$ gehört, der sich nicht ändert, wenn man y um beliebige Vielfache von $2k\pi$ vermehrt oder vermindert. Setzt man also:

$$x = \operatorname{tg}\frac{y}{2k}, \quad x' = \operatorname{tg}\frac{y'}{2k}, \quad x' = \frac{\varkappa x + \lambda}{\mu x + \nu},$$

lässt die Coefficienten $\varkappa$, λ, μ, ν in der angegebenen Weise sich stetig ändern und gestattet auch nur stetige Aenderungen von y', so ermöglichen diese drei Gleichungen, jedem reellen Werthe von y einen einzigen reellen endlichen Werth y' zuzuordnen. Wenn hierbei y in y' übergeführt wird, so geht auch $y + 2k\nu\pi$ in $y' + 2k\nu\pi$ für denselben ganzzahligen Werth von ν über; Werthe, die sich nur um beliebige Vielfache von $2k\pi$ unterscheiden, erleiden gleiche Veränderungen. Die Zuordnung (3) hört für keinen Werth von x auf, eindeutig und stetig zu sein, wofern die Coefficienten $\varkappa$, λ, μ, ν nur stets den angegebenen Bedingungen genügen.

Die Werthe y ordnen wir stetig den Punkten einer Linie zu. Wir legen zuerst eine einfach unendliche Linie L ohne Doppelpunkte und Spitzen zu Grunde, messen die Länge des Bogens, der von einem festen Punkte A und dem zu bestimmenden Punkte P begrenzt wird, und bezeichnen sie mit y, indem wir sie nach der einen Seite hin als positiv, nach der andern als negativ voraussetzen. Dadurch wird jedem Werthe y ein einziger Punkt der Linie L und jedem Punkte von L ein einziger Werth y zugeordnet.

An zweiter Stelle nimmt man eine geschlossene Linie M vom

Umfange $2mk\pi$, wo m irgend eine ganze Zahl ist; auch hier mögen Doppel- und Rückkehrpunkte ausgeschlossen sein. Wieder gehen wir von einem festen Punkte in der Linie nach einer bestimmten Richtung voran und bezeichnen die Länge des zurückgelegten Weges mit y. Für die Länge $2mk\pi$ kommen wir zum Ausgangspunkte $y = 0$ zurück; überhaupt stellen alle Werthe von y, die sich nur um Vielfache von $2mk\pi$ unterscheiden, denselben Punkt dar.

Im ersten Falle, wo jedem Punkte der Linie ein einziger Werth y entspricht, sind jedem Werthe von x unendlich viele Punkte der Linie L zugeordnet. Ist x ein bestimmter Werth, so wollen wir von einem Punkte ausgehen, der ihm zugeordnet ist und ihn mit $P(x)_0$ bezeichnen. Indem wir x in der angegebenen Weise verändern, bis wir nach Zurücklegung aller reeller Werthe zu dem Anfangswerthe zurückkehren, wird der Punkt $P(x)_0$ nicht wieder in seine Anfangslage gelangen; gehört zu $P(x)_0$ der Werth y, so entspricht der neuen Lage des Punktes der Werth $y + 2k\pi$ oder $y - 2k\pi$; den zu dem ersten dieser beiden Werthe zugeordneten Punkt wollen wir mit $P(x)_1$, den andern mit $P(x)_{-1}$ bezeichnen. Hat die angegebene Umformung den Punkt $P(x)_0$ in $P(x)_1$ übergeführt, so wird zugleich $P(x)_1$ in eine neue Lage $P(x)_2$ u. s. w., überhaupt der Punkt $P(x)_\nu$ auf den Punkt $P(x)_{\nu+1}$ gebracht, wo dem Punkte $P(x)_\nu$ die Zahl $y + 2\nu k\pi$ zugeordnet ist.

In der geschlossenen Linie M gehören zu jedem Punkte unendlich viele Werthe von y; ist y_0 einer unter ihnen, so werden alle übrigen erhalten, indem man die Grösse $2mk\pi$ beliebig oft zu y_0 addirt oder von y_0 subtrahirt. Dagegen stellen die Werthe y_0, $y_0 + 2k\pi$, ... $y_0 + 2(m-1)k\pi$ verschiedene Punkte dar. Somit gehören zu jedem Werthe x genau m verschiedene Punkte der Linie; ist $P(x)_0$ einer derselben, so können die andern der Reihe nach mit $P(x)_1$, $P(x)_2$ ... $P(x)_{m-1}$ bezeichnet werden, so dass diejenige projective Umgestaltung, die den Punkt $P(x)_0$ in $P(x)_1$ überführt, zugleich den Punkt $P(x)_1$ nach $P(x)_2$, ... $P(x)_\nu$ nach $P(x)_{\nu+1}$, ... $P(x)_{m-1}$ nach $P(x)_0$ bringt. Man kann die Linie auch so in sich bewegen, dass $P(x)_0$ zuerst nach $P(x)_{m-1}$, dann nach $P(x)_{m-2}$ u. s. w. gelangt.

Hiernach kann man jedem Werthe x beliebig viele Punkte einer Linie zuordnen. Wird die Variabele x durch irgend eine gebrochene lineare Function transformirt, so wird auch die Linie in sich transformirt; die Veränderung von x weist auch jedem Punkte der Linie eine ganz bestimmte Bewegung zu, wobei solche Punkte, die demselben Werthe der Variabeln entsprechen, jedesmal in gleicher Weise bewegt werden.

Da es sich nur darum handelte zu zeigen, dass den Werthen x in der angegebenen Weise Punkte einer Linie zugeordnet werden

können, war es gestattet, die Hülfsgrösse y als Länge vorauszusetzen. Indessen ist eine solche Annahme keineswegs nothwendig. Im ersten Falle, wo wir die unendliche Linie L benutzten, kam es nur darauf an, jedem reellen endlichen Werthe von y einen einzigen Punkt und umgekehrt jedem Punkte einen einzigen Werth von y zuzuordnen. Das kann auf mancherlei andere Weise geschehen und macht es nicht einmal nothwendig, die Linie L als unendlich vorauszusetzen. Im zweiten Falle, wo wir die geschlossene Linie M benutzt haben, musste die Variabele y den Punkten stetig so zugeordnet werden, dass 1) zu jedem Werthe von y ein einziger Punkt gehört, und dass 2) allen Werthen von y, die sich nur um Vielfache von $2mk\pi$ unterscheiden und nur diesen, derselbe Punkt entspricht. Auch diesen Forderungen kann man genügen, ohne die Grösse y als Masszahl der Länge anzunehmen.

B. In einer zweidimensionalen Raumform seien x_0, x_1, x_2 die homogenen Coordinaten. Sieht man von den Punkten der Geraden $x_0 = 0$ ab, so kann man die Punkte durch zwei Grössen $x(= x_1 : x_0)$ und $y(= x_2 : x_0)$ bestimmen. Bei Benutzung dieser Grössen werden die projectiven Umgestaltungen durch gebrochene lineare Functionen mit gemeinschaftlichem Nenner dargestellt. Wir untersuchen, wie viel Punkte wir jedem einzelnen Werthsystem (x, y) zuordnen können.

Zu dem Zwecke beachten wir, dass ein geradliniger Weg uns von einem Punkte $P(x, y)_0$, der zum Werthsystem (x, y) gehört, zu allen weiteren Punkten $P(x, y)_1$, $P(x, y)_2$ ... führen muss, die demselben Werthsystem zugeordnet sind. Man denke nämlich irgend eine Linie verzeichnet, welche die Punkte $P(x, y)_0$ und $P(x, y)_1$ verbindet, und zeige, dass sie durch eine gerade Linie ersetzt werden kann. Das ist unmittelbar klar, wenn man annimmt, dass durch zwei Punkte, die nicht zu demselben Werthsystem gehören, eine gerade Linie gelegt werden kann. Will man diese Annahme nicht machen, so muss man doch mindestens die Möglichkeit, dass für ein beschränktes Gebiet durch je zwei Punkte eine gerade Linie geht, zulassen, und kann daraus auf eine unbegrenzte Erweiterung des Gebietes schliessen. Zudem würden unter der Annahme, dass keine geradlinige Verbindung der Punkte $P(x, y)_0$ und $P(x, y)_1$ möglich sei, jeder Gleichung $ay + by + c = 0$ getrennte Linien genügen; es gäbe dann überhaupt keinen Uebergang von der einen zur andern Linie; man erhielte also nicht eine einzige Raumform, sondern getrennte Gebilde, von denen jedes als Raumform betrachtet werden kann.

Jetzt denke man eine gerade Linie in sich verschoben; dann lässt sich durch passende Wahl der Marken erreichen, dass man vom Punkte $P(x, y)_0$ zu $P(x, y)_1$, von da zu $P(x, y)_2$ u. s. w. gelangt. Kehrt man hierbei nicht wieder zum Punkte $P(x, y)_0$ zurück, so sind jedem

Werthsysteme (x, y) unendlich viele Punkte zugeordnet; wenn man aber vom Punkte $P(x, y)_{m-1}$ wieder zum Punkte $P(x, y)_0$ zurückgelangt, so entsprechen jedem Werthsystem genau m verschiedene Punkte. Um hierüber eine Entscheidung treffen zu können, ist es natürlich nicht gestattet, die Gerade für sich zu betrachten; man muss vielmehr eine projective Umgestaltung der Ebene untersuchen, bei der eine Gerade in sich verschoben wird.

Am einfachsten ist es anzunehmen, dass ein Punkt, der der Geraden nicht angehört, in Ruhe gehalten werde. Wir gehen also von drei Punkten A_1, A_2, A_3 aus, die nicht in gerader Linie liegen, legen durch die beiden ersten eine gerade Linie und untersuchen eine stetige projective Umgestaltung der Ebene, bei welcher der Punkt A_3 in Ruhe bleibt und die Gerade A_1A_2 in sich bewegt wird, ohne dass einer ihrer Punkte in Ruhe gehalten wird.

Um die Untersuchung zu erleichtern, wählen wir die drei Punkte so, dass in den drei Strecken A_2A_3, A_3A_1 und A_1A_2 keine zwei Punkte liegen, die zu demselben Werthsysteme gehören. Zu dem Ende setze man etwa fest, der Umfang des Dreiecks werde von der Geraden $x_3 = 0$ nicht geschnitten; denn hierdurch schliesst man das Werthsystem $x = y = \infty$ von vorn herein aus; man kann aber von einem Punkte einer Geraden aus auf ihr erst dann zu einem zweiten Punkte gelangen, der denselben Coordinatenwerthen entspricht, nachdem man alle der Gleichung der Geraden genügenden Werthsysteme durchlaufen hat.

Hiernach seien die Gleichungen der drei Geraden A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Man setze:

$$\xi = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}, \quad \eta = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}, \tag{6}$$

und nehme die Transformation vor:

$$\xi' = \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi, \quad \eta' = \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi, \tag{7}$$

welche den gestellten Anforderungen genügt, wofern man φ von Null an stetig wachsen lässt.

Sobald bei diesem Verlauf die Grösse φ den Werth 2π erhält, werden die Variabeln ξ und η, und damit auch die Coordinaten x und y ihre Anfangswerthe wieder erhalten. Da aber der Punkt A_3 in Ruhe geblieben ist, kehrt in jeder Geraden, die von diesem Punkte ausgeht, jeder Punkt in seine Anfangslage zurück. Für $\varphi = 2\pi$ deckt also jeder Punkt der Ebene denselben Ort, den er für $\varphi = 0$ einnimmt.

Will man den Beweis weiter ausführen, so beachte man, dass der Punkt A_3 die Coordinaten $x = \frac{(c_2 b_1)}{(a_1 b_2)}$, $y = \frac{(c_1 a_2)}{(a_1 b_2)}$ und der Punkt A_1 die Coordinaten $x = \frac{(c_3 b_2)}{(a_2 b_3)}$, $y = \frac{(c_2 a_3)}{(a_2 b_3)}$ hat. Um die Lage zu finden, die der Punkt A_1 für $\varphi = 2\pi$ einnimmt, führe man das erste Werthsystem stetig so in das zweite über, dass auch für die Zwischenwerthe die Bedingung $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ erfüllt ist und dass unendlich grosse Werthe von x und y vermieden werden, und ordne den Zwischenwerthen Punkte der Seite $A_3 A_1$ zu. Dann muss man den Coordinaten x und y für $(a_2 b_3)x = (c_3 b_2)$, $(a_2 b_3)y = (c_2 a_3)$ den Punkt A_1 zuordnen. Auf dieselbe Art kann man den Beweis für den Punkt A_2 und darauf für das Innere des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ durchführen.

Somit bringt die durch die Gleichung (7) angegebene Transformation, wofern man die Hülfsgrösse φ von Null bis 2π wachsen lässt, jeden Punkt der Linie $A_1 A_2$ in seine Anfangslage zurück. Für die Punkte dieser Geraden lassen sich die Coordinaten x, y unter Berücksichtigung der Gleichung $a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$ aus dem Verhältniss $\xi : \eta$ bestimmen; in ihr gelegene Punkte haben dieselben Coordinaten, sobald dies Verhältniss denselben Werth hat. Der Quotient $\xi' : \eta'$ wird aber nur dann gleich $\xi : \eta$, wenn die Hülfsgrösse φ gleich einem Vielfachen von π ist. Bezeichnen wir für einen Punkt dieser Linie, dessen Coordinaten x, y sind, die Anfangslage mit $P(x, y)_0$ und nennen $P(x, y)_1$ diejenige Lage, die er für $\varphi = \pi$ deckt, so muss dieselbe Bewegung, die den Punkt $P(x, y)_0$ nach $P(x, y)_1$ bringt, den Punkt $P(x, y)_1$ nach $P(x, y)_0$ überführen. Wir können also jedem Werthepaar (x, y), wofern es einen Punkt der Linie $A_1 A_2$ bezeichnet, und demnach, wie wir oben gesehen haben, überhaupt jedem Werthepaar in der Ebene höchstens zwei Punkte zuordnen.

C. Was wir hier für die Ebene bewiesen haben, gilt für den projectiven n-dimensionalen Raum bei jeder beliebigen Zahl n. Wenn die Punkte $P(x)_0$, $P(x)_1$, $P(x)_2$ ... zu denselben Verhältnissen der homogenen Coordinaten gehören, so muss jede Gerade, die durch $P(x)_0$ hindurchgeht, auch die Punkte $P(x)_1$, $P(x)_2$ ... enthalten. Demnach hat man nur eine Gerade in sich zu verschieben und zu untersuchen, wie oft die in ihr gelegenen Punkte dieselben Coordinatenwerthe erhalten haben, nachdem sie in ihre Anfangslage zurückgekehrt sind. Zu dem Zwecke bewegt man eine zweidimensionale Ebene so, dass einer ihrer Punkte in Ruhe gehalten und eine ihrer Geraden in sich verschoben wird; natürlich darf kein Punkt dieser Geraden in Ruhe bleiben. Die für die Ebene durchgeführte Untersuchung lässt sich also auf jeden mehrdimensionalen Raum übertragen. So seien im dreifach ausgedehnten Raume die homogenen Coordinaten x_0, x_1, x_2, x_3;

man setze $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$, $z = \frac{x_3}{x_0}$ und betrachte eine Transformation, welche durch die Gleichungen (4)—(6) in Verbindung mit der Gleichung $s' = s$ bestimmt wird. Dann bleibt die obige Entwicklung und damit auch das Resultat ungeändert.

D. Es erübrigt jetzt nur noch der Nachweis, dass es in der That gestattet ist, jedem Verhältniss $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ zwei verschiedene Punkte zuzuordnen. Da die $n+1$ Grössen $x_0, x_1 \ldots x_n$ reell sind und es nur auf ihr Verhältniss ankommt, kann man festsetzen, dass sein soll:

$$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1. \tag{8}$$

Dann kann man jedem Werthsystem, welches der Gleichung (8) genügt, einen Punkt zuordnen, so dass zu jedem Werthsystem $\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0} \ldots \frac{x_n}{x_0}\right)$ zwei verschiedene Punkte gehören. Jetzt führen wir die unendlich kleine Transformation aus:

$$\frac{\delta x_\alpha}{\delta t} = \sum\nolimits^{\varkappa} a_{\alpha\varkappa} x_\varkappa - x_\alpha \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda \qquad \text{für} \quad \alpha, \varkappa, \lambda = 0, 1 \ldots n. \tag{9}$$

Hier beträgt die Anzahl der constanten Coefficienten $(n+1)^2$; da aber für $a_{00} = a_{11} = \cdots = a_{nn}$ jedes $\delta x_\alpha = 0$ wird, so hängen die infinitesimalen Transformationen (9) nur von $n(n+2)$ willkürlichen Constanten ab.

Da die Transformation (9) der Relation genügt:

$$x_0 \delta x_0 + x_1 \delta x_1 + \cdots + x_n \delta x_n = 0,$$

so bleibt die Bedingung (8) bei jeder Transformation ungeändert Ersetzt man auf der rechten Seite von (9) jedes $x_\varkappa$ durch $-x_\varkappa$, so geht δx_α in $-\delta x_\alpha$ über; somit bleiben für zwei Punkte $(x_0, x_1 \ldots x_n)$ und $(-x_0, -x_1 \cdots -x_n)$ die Verhältnisse der $n+1$ Grössen x ungeändert. Wenn also durch eine aus (9) hergeleitete endliche Transformation $(x_0 \cdots x_n)$ in $(x_0' \cdots x_n')$ übergeht, so wird zugleich $(-x_0 \cdots -x_n)$ in $(-x_0' \cdots -x_n')$ umgewandelt.

Setzt man $y_1 = \frac{x_1}{x_0}, \cdots y_n = \frac{x_n}{x_0}$, so wird, da man in (9) $a_{00} = 0$ voraussetzen darf, für $\alpha, \varkappa = 1 \cdots n$:

$$\frac{\delta y_\alpha}{\delta t} = \frac{x_0 \delta x_\alpha - x_\alpha \delta x_0}{x_0^2 \delta t} = \sum\nolimits^{\varkappa} a_{\alpha\varkappa} y_\varkappa - y_\alpha \sum\nolimits^{\varkappa} a_{0\varkappa} y_\varkappa. \tag{10}$$

Hier stellt die rechte Seite die allgemeine Form einer infinitesimalen projectiven Transformation dar. Umgekehrt kann man aus (10) die Transformation (9) herleiten, wofern man zwischen $x_0, x_1 \ldots x_n$ die Beziehung (8) festsetzt. Die Transformationen (9) und (10) sind also identisch.

E. Es sei gestattet, eine Betrachtung beizufügen, die sehr geeignet erscheint, die gewonnenen Resultate zu erläutern. Wir betrachten nur Gebilde des euklidischen Raumes und benutzen Cartesische Coordinaten, bestimmen also die Lage der Punkte einer einzelnen Geraden durch den Abstand von einem festen, in ihr gelegenen Punkte. Natürlich müssen wir die unendlich fernen Punkte als uneigentliche Punkte hinzunehmen, wenn wir den Sätzen der Projectivität allgemeine Gültigkeit sichern wollen. Indem die projective Geometrie dies thut, lässt sie gewöhnlich die Gerade im Unendlichen geschlossen sein und stellt die Sache so dar, als ob bei einer projectiven Umgestaltung ein Punkt der Geraden von der einen Seite zur andern durch das Unendlichferne hindurch überginge. Statt dessen wollen wir hier eine Anschauung benutzen, die Herr Veronese für einen andern Zweck gebildet hat. Wir gehen von mehreren parallelen Geraden aus und nehmen an, der Punkt verlasse im Unendlichfernen die eine Gerade und trete auf eine andere über. Um zu erkennen, nach welcher Seite hin die Verbindung hergestellt werden muss, hat man zunächst in jeder Geraden die Lage der Punkte in der angegebenen Weise durch Zahlen zu bestimmen. Bezeichnet man diese Zahlen mit x, versteht man also unter x den Abstand des zu bestimmenden Punktes von einem festen Punkte der Geraden, so muss der reciproke Werth ξ von x durch Null hindurch von positiven zu negativen Werthen (oder umgekehrt) übergehen; also muss man zwei parallele Gerade in der Weise verbunden denken, dass sehr grosse positive Werthe der einen Geraden sich an sehr grosse negative Werthe der andern anschliessen.

Zuvörderst denke man sich in einer Ebene eine unendliche Reihe von parallelen Geraden gegeben und bezeichne sie durch G_λ, indem man unter λ irgend eine positive oder negative ganze Zahl mit Einschluss der Null versteht. Die Anordnung ist so getroffen, dass jedesmal G_λ zwischen $G_{\lambda-1}$ und $G_{\lambda+1}$ liegt. Man durchschneidet die parallelen Linien durch eine auf ihnen senkrecht stehende Gerade, wählt den Fusspunkt dieser Senkrechten in jeder Geraden als Anfangspunkt der Messung ($x = 0$), nimmt die Längeneinheit in allen Linien als gleich an, führt aber die Messung in je zwei auf einander folgenden Linien nach der entgegengesetzten Seite aus; dann erfolgt die Verbindung von G_λ mit $G_{\lambda+1}$ jedesmal auf der positiven Seite von G_λ, wie die nebenstehende Figur 1 andeutet. Wir haben also hier den ersten unter A) an-

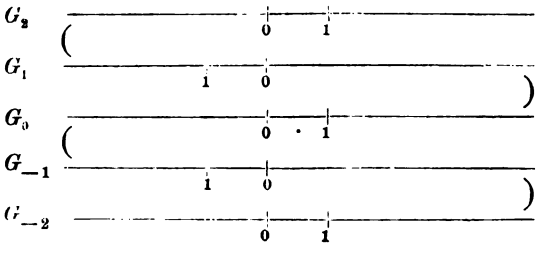


Fig. 1.

gegebenen Fall, wo jedem Werthe von x unendlich viele Punkte zugeordnet sind.

An zweiter Stelle denke man auf den Mantel eines Kreiscylinders m gerade Linien $G_0, G_1, G_2 \ldots G_{m-1}$ verzeichnet und diese im Unendlichen so verbunden, dass man vom positiven Theile von G_0 zum negativen Theile von G_1, vom positiven Theile von G_1 zum negativen Theile von G_2 u. s. w. und endlich vom positiven Theile von G_{m-1} zum negativen Theile von G_0 gelangt. Wenn m eine gerade Zahl ist, so kann man wieder annehmen, die Messung erfolge in je zwei auf einander folgenden Linien in entgegengesetztem Sinne und die Verbindung geschehe in der durch Fig. 2 angedeuteten Weise, während für ein ungerades m Fig. 3 die Art der Verbindung bezeichnet.

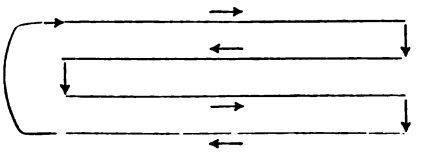


Fig. 2.

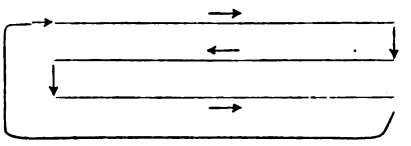


Fig. 3.

In der Ebene möge die Lage der Punkte durch Cartesische Coordinaten x und y bestimmt sein. Natürlich erfordern die Sätze der Projectivität, dass man die „unendlich ferne Gerade" hinzunehme, und es ist nicht ausgeschlossen, dass man noch weitere ideale Gebiete beifüge. Mag man letzteres thun oder nicht, immer führt jede vom Anfangspunkte ausgehende und in ihm begrenzte Gerade (jeder vom Anfangspunkte ausgehende Strahl) auf einen unendlich fernen Punkt, und die Gesammtheit der auf diese Weise erhaltenen Punkte bildet einen geschlossenen Linienzug, dem weitere Punkte nicht angehören können. Indem man die Grösse x durch das Verhältniss $x_1 : x_0$, y durch $x_2 : x_0$ ersetzt, kann man jeden unendlich fernen Punkt durch das Verhältniss $x_1 : x_2$ und die Forderung $x_0 = 0$ bestimmen; jeder solchen Festsetzung entsprechen somit in der angegebenen Linie höchstens zwei Punkte. Sollte es möglich sein, durch die Gleichungen $x_0 = 0$, $x_1 : x_2 = 0$ eine grössere Zahl von Punkten darzustellen, so müssten die weiteren Punkte in einem Linienzuge liegen, der von dem angegebenen völlig getrennt liegt, und das geht nicht an. Nun sind vom projectiven Standpunkte aus alle Verhältnisse $x_0 : x_1 : x_2$ gleichberechtigt, weil sie in einander übergeführt werden können. Folglich können zu jedem Werthsystem der Coordinaten höchstens zwei Punkte gehören.

Gewöhnlich lässt man durch jedes Werthsystem einen einzigen Punkt bestimmt sein; will man jedem Werthepaar (x, y) zwei Punkte zuordnen, so kann man sich folgende Vorstellung bilden. Man errichte auf zwei parallelen Ebenen eine gemeinschaftliche Senkrechte und

nehme in jeder den Fusspunkt der Senkrechten zum Anfangspunkte eines Cartesischen Coordinatensystems. Die X-Axen der beiden Systeme sollen parallel, aber von entgegengesetzter Richtung sein, und in entsprechender Weise sollen die Y-Axen gewählt sein. Ein von der Mitte M zwischen den beiden Anfangspunkten ausgehender Strahl trifft, wofern er nicht zu den beiden Ebenen parallel ist, eine (und nur eine) der Ebenen. Bewegt man einen solchen Strahl, so bilden die Schnittpunkte einen zusammenhängenden Linienzug, mag der Schnitt in derselben Ebene bleiben oder von einer Ebene zur andern übergehen. Hiernach sind jedem Werthsystem (x, y) zwei Punkte zugeordnet, nämlich die Schnittpunkte mit einer durch M gehenden geraden Linie.

Man denke sich eine grössere Zahl von parallelen Ebenen $E_0, E_1, E_2 \ldots$ gegeben. Sobald eine vollständige Verbindung zwischen E_0 und E_1 in der angegebenen Weise hergestellt ist, kann man nicht mehr zu E_2 übergehen. Aber bei einer theilweisen Verbindung der beiden ersten Ebenen wird man vergebens versuchen, allen Werthsystemen eine gleiche Anzahl von Punkten zuzuordnen. Wollte man z. B. von positiven Werthen von x in der ersten Ebene E_0 zu negativen Werthen von x in E_1, überhaupt in jedem Ebenenpaare E_1E_2, E_2E_3, E_3E_0 von positiven Werthen der ersten zu negativen der zweiten Ebene übergehen, so würde man zwar im allgemeinen jedem Werthsystem (x, y) vier Punkte zuordnen; aber das Werthepaar $x = 0$, $y = \infty$ oder $x_0 = x_1 = 0$ würde eine Ausnahme machen.

Ganz ähnliche Erwägungen lassen sich anstellen, wenn man die Fiction eines mehrdimensionalen Euklidischen Raumes bildet.

§ 2.

Uebergang von der Projectivität zur Metrik.

In den folgenden Entwicklungen werden die Formeln am einfachsten, wenn man die Ebenen des n-dimensionalen Raumes durch $n + 1$ Grössen $y_0, y_1 \ldots y_n$ darstellt und dementsprechend die Transformationen als homogene lineare Functionen dieser Grössen ausdrückt. Dann können wir nach der symbolischen Bezeichnung des Herrn Lie jede infinitesimale Transformation in der Form schreiben:

$$(1) \qquad \sum a_{\iota\varkappa} q_\iota y_\varkappa \quad \text{für} \quad \iota, \varkappa = 0, 1 \ldots n,$$

wo nur die Transformation $\sum q_\iota y_\iota$ keine Aenderung in den Verhältnissen der Coordinaten herbeiführt, so dass von ihr abgesehen werden kann.

Indem wir zunächst eine zweidimensionale Raumform untersuchen, setzen wir $n = 2$ voraus. Wir bestimmen die geringste Gliederzahl

für eine projective Gruppe, durch welche alle Strahlen eines Punktes in einander übergeführt werden können. Das vermag schon eine eingliedrige Gruppe, d. h. eine, welche aus einer einzigen infinitesimalen Transformation hergeleitet wird. Der Einfachheit wegen wählen wir $y_0 = 0$ als Gleichung desjenigen Punktes, durch welchen alle jene Strahlen gehen. Jede unendlich kleine projective Gruppe einer zweidimensionalen Ebene, bei der die durch den Punkt $y_0 = 0$ gehenden Geraden in sich transformirt werden, erhält für $y_0 = 0$ die Form:

$$a_{11} q_1 y_1 + a_{12} q_1 y_2 + a_{21} q_2 y_1 + a_{22} q_2 y_2 .$$

Da aber bei dieser Transformation keine reelle Gerade, die durch den gewählten Punkt geht, in sich verbleiben soll, so müssen die Gleichungen:

$$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 = \omega y_1, \quad a_{21} y_1 + a_{22} y_2 = \omega q_2$$

nur imaginäre Lösungen haben, oder es muss möglich sein, die y_1 und y_2 durch homogene lineare Functionen von ihnen so zu ersetzen, dass unter Anwendung der neuen Coordinaten $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} + a_{21} = 0$ wird. Zur Bestimmung der eingliedrigen Gruppe, welche im Stande ist, die durch den gewählten Punkt gehenden Strahlen in einander überzuführen, dürfen wir also die infinitesimale Transformation in der Form annehmen:

$$(a_{00} q_0 + a_{10} q_1 + a_{20} q_2) y_0 + q_1 y_2 - q_2 y_1 .$$

Hier kann man aber y_1 durch $y_1 + \alpha y_0$, y_2 durch $y_2 + \beta y_0$ ersetzen und die Coefficienten α und β so bestimmen, dass a_{10} und a_{20} gleich Null werden. Soll also eine projective Gruppe im Stande sein, die sämmtlichen Geraden in einander überzuführen, welche durch einen festen Punkt gehen, so muss sie eine eingliedrige Untergruppe enthalten, die bei passender Wahl der Coordinaten aus der infinitesimalen Transformation hergeleitet wird:

$$(2) \qquad \varkappa q_0 y_0 + q_1 y_2 - q_2 y_1 .$$

Jetzt soll die zu bestimmende Gruppe im Stande sein, einer durch den Punkt $y_0 = 0$ gehenden Geraden eine Lage zu geben, bei der sie diesen Punkt nicht mehr enthält. Somit muss eine zweite infinitesimale Transformation vorkommen, bei deren Darstellung die Coefficienten a_{01} und a_{02} nicht beide verschwinden. Combiniren wir diese Transformation mit (2), so erhalten wir nothwendig eine dritte, von den beiden ersten unabhängige Transformation. Soll also eine projective Gruppe der Ebene im Stande sein, alle um einen festen Punkt liegenden geraden Linien in einander überzuführen, so muss sie mindestens dreigliedrig sein, also drei willkürliche Parameter enthalten. Die Bestimmung der verschiedenen Fälle, in denen diese Zahl festgehalten wird, bietet keine Schwierigkeit. Entweder kann man bei beliebigem Werthe von λ die drei Transformationen zu Grunde legen:

(3) $$q_1y_2 - q_2y_1,\quad q_0y_1 - \lambda q_1y_0,\quad q_0y_2 - \lambda q_2y_0$$

oder bei beliebigem $\varkappa$:

(4) $$\varkappa q_0y_0 + q_1y_2 - q_2y_1,\quad q_0y_1,\quad q_0y_2.$$

In Punktcoordinaten x_0, x_1, x_2 stellen sich die Transformationen (3) in der Form dar:

$$x_1p_2 - x_2p_1,\quad x_0p_1 - \lambda x_1p_0,\quad x_0p_2 - \lambda x_2p_0,$$

während man die zweiten in der Form schreiben kann:

$$(x_2 - \varkappa x_1)p_1 - (x_1 + \varkappa x_2)p_2,\quad x_0p_1,\quad x_0p_2.$$

Die Gruppe (3) bewegt die Tangenten des Kegelschnitts *in sich*:

$$\lambda y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0,$$

die Gruppe (4) die des imaginären Punktepaares $y_1^2 + y_2^2 = 0$, so dass die Gerade $y_1 = y_2 = 0$ ungeändert bleibt. Soll also eine dreigliedrige projective Gruppe einer Ebene im Stande sein, eine Gerade in *jede* andere überzuführen, so muss sie die Form (3) für ein positives λ haben, so dass man geradezu $\lambda = 1$ setzen darf.

Wir haben jetzt noch nachzuweisen, dass jede projective Gruppe, bei deren Transformationen keine Gerade auf eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit beschränkt bleibt, die Gruppe (3) als Untergruppe enthält. Dieser Nachweis unterscheidet sich aber nicht von dem Beweise des entsprechenden Satzes für eine beliebige Zahl von Dimensionen und kann daher hier übergangen werden.

Wir nehmen jetzt an, es sei für $n - 1$ Dimensionen bewiesen, dass jede projective Gruppe, bei deren Transformationen keine $(n-2)$-dimensionale Ebene auf eine Mannigfaltigkeit von weniger als $n - 1$ Dimensionen beschränkt bleibt, entweder selbst ein imaginäres *eigentliches* quadratisches Gebilde in sich transformirt oder doch eine Untergruppe enthält, für welche ein solches Gebilde ungeändert bleibt. Dann können wir die Gesammtheit der $(n-1)$-dimensionalen Ebenen, welche in einem Raume von n Dimensionen durch einen festen Punkt gehen, als eine $(n-1)$-dimensionale projective Mannigfaltigkeit betrachten und durch die Verhältnisse von n Grössen $y_1 \ldots y_n$ darstellen, während wir für die *sämmtlichen* Ebenen des Raumes noch eine weitere Grösse y_0 hinzunehmen müssen. Soll also eine Gruppe im Stande sein, sämmtliche durch den Punkt $y_0 = 0$ gehenden Ebenen in einander überzuführen, so muss sie mindestens alle diejenigen Transformationen enthalten, durch welche für $y_0 = 0$ eine quadratische Form in $y_1 \ldots y_n$ ungeändert bleibt. Die Determinante aus den Coefficienten dieser Form darf nicht verschwinden und demnach dürfen wir geradezu voraussetzen, die Form

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$$

ändere sich durch die angegebenen Transformationen nicht. Damit

also eine projective Gruppe im Stande ist, alle $(n-1)$-dimensionalen Ebenen, welche durch den Punkt $y_0 = 0$ gehen, in einander überzuführen, muss sie für $\alpha, \beta = 1, \ldots n$ mindestens $\frac{n(n-1)}{2}$ infinitesimale Transformationen enthalten, welche in der Form

$$W_{\alpha\beta} = q_\alpha y_\beta - q_\beta y_\alpha + y_0 \sum_\varkappa m_{\alpha\beta\varkappa} q_\varkappa \tag{5}$$

für $m_{\alpha\beta\gamma} + m_{\beta\alpha\gamma} = 0$ vorausgesetzt werden können, wo auch die Summation nach $\varkappa$ nur über die Marken $1, \ldots n$ erstreckt zu werden braucht.

Die Gesammtheit der Transformationen, durch welche die Ebenen des Punktes $y_0 = 0$ in einander übergeführt werden, bildet eine Gruppe. Ist dieselbe, wie wir zunächst annehmen wollen, $\frac{n(n-1)}{2}$-gliedrig, wird sie also durch die $W_{\alpha\beta}$ bestimmt, so muss auch die durch Combination aus zwei von ihnen erhaltene Transformation wieder durch die Transformationen (5) darstellbar sein. Nun zeigt die Vergleichung derjenigen Glieder, in denen y_0 nicht vorkommt, dass

$$(W_{\alpha\beta}\, W_{\alpha\gamma}) = W_{\beta\gamma}$$

ist. Daraus ergeben sich die Beziehungen:

$$m_{\alpha\beta\gamma} + m_{\gamma\alpha} = m_{\beta\gamma\alpha}$$

für ungleiche Marken α, β, γ, und

$$m_{\beta\alpha\alpha} = m_{\beta\gamma\gamma}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt durch Permutation der Marken α, β, γ, dass $m_{\alpha\beta\gamma} = 0$ ist für drei ungleiche Marken, während die zweite Gleichung gestattet, allgemein

$$m_{\alpha\beta\beta} = p_\alpha$$

zu setzen. Nun ersetze man jedes y_α durch $y_\beta - p_\alpha y_0$ und erhält dadurch $m_{\alpha\beta\beta} = 0$, so dass wir jetzt

$$W_{\alpha\beta} = q_\alpha y_\beta - q_\beta y_\alpha \tag{6}$$

annehmen dürfen. Damit also die Gruppe im Stande ist, die sämmtlichen durch einen festen Punkt gehenden Ebenen in einander zu transformiren, muss sie die $\frac{n(n-1)}{2}$ infinitesimalen Transformationen (6) enthalten.

Wir suchen jetzt eine Gruppe, welche nicht nur dieser Forderung genügt, sondern welche zugleich einer dieser Ebenen gestattet, so transformirt zu werden, dass sie den festen Punkt nicht mehr enthält. Zu dem Zwecke muss zu den Transformationen (6) mindestens eine neue Transformation

$$\sum a_{\varrho\sigma} q_\varrho y_\sigma \quad \text{für} \quad \varrho, \sigma = 0, 1, \ldots n \tag{7}$$

hinzukommen, in deren Ausdruck die Coefficienten $a_{01}, \ldots a_{0n}$ nicht

sämmtlich verschwinden. In der zu bestimmenden Gruppe müssen aber auch alle Transformationen vorkommen, welche man durch Combination aus (6) und (7) erhält. Combinirt man aber die Transformation $W_{\alpha\beta}$ mit (7), so wird der Coefficient von q_0:

$$a_{0\alpha}y_\beta - a_{0\beta}y_\alpha, \tag{8}$$

während dieser Coefficient in (7) ist:

$$a_{01}y_1 + a_{02}y_2 + \cdots + a_{0n}y_n. \tag{9}$$

Damit sich also die hinzutretenden Transformationen auf weniger als n zurückführen lassen, muss die Determinante der in irgend $n-1$ Ausdrücken (8) und in (9) vorkommenden Coefficienten von $y_1 \ldots y_n$ verschwinden. Wählen wir aber speciell $\alpha = 1$ und β der Reihe nach gleich $2, \ldots n$, so ergiebt sich die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} & a_{03} \ldots a_{0n} \\ -a_{02} & a_{01} & 0 \ldots 0 \\ -a_{03} & 0 & a_{01} \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -a_{0n} & 0 & 0 \ldots a_{01} \end{vmatrix} = a_{01}^{n-2}(a_{01}^2 + a_{02}^2 + \cdot\ \cdot + a_{0n}^2).$$

Alle derartigen Determinanten können aber für reelle Werthe von $a_{01}, a_{02} \ldots a_{0n}$ nicht verschwinden. Ausser der Transformation (7) kommen also mindestens noch $n-1$ weitere hinzu, so dass wir bereits das Ergebniss aussprechen können:

Damit eine projective Gruppe des n-dimensionalen Raumes alle um einen Punkt gelegenen Ebenen von $n-1$ Dimensionen in einander überführen kann, muss sie mindestens $\frac{n(n+1)}{2}$ Parameter enthalten.

Nehmen wir, was hiernach gestattet ist, für (7) speciell die Form an:

$$q_0y_1 + y_0\sum a_\varkappa q_\varkappa + \sum b_{\varkappa\lambda}q_\varkappa y_\lambda, \tag{10}$$

wo die Summation beidemal nur auf die Marken $1 \ldots n$ erstreckt werden soll, so ergiebt sich durch ihre Combination mit $W_{1\alpha}$:

$$\begin{aligned} &q_0y_\alpha + y_0(a_1q_\alpha - a_\alpha q_1) - q_1\sum{}' b_{\alpha\lambda}y_\lambda + q_\alpha\sum{}' b_{1\lambda}y_\lambda - y_1\sum{}' b_{\varkappa\alpha}q_\varkappa \\ &\quad + y_\alpha\sum{}' b_{\varkappa 1}y_\varkappa + (b_{11} - b_{\alpha\alpha})(q_1y_\alpha + q_\alpha y_1) \\ &\qquad - (b_{1\alpha} + b_{\alpha 1})(q_1y_1 - q_\alpha y_\alpha), \end{aligned} \tag{11}$$

wo die Summation nach $\varkappa$ und λ in Σ' nur auf die von 1 und α verschiedenen Marken auszudehnen ist. Alle diese Transformationen sind für $\alpha = 2 \ldots n$ in der Gruppe vorhanden. Indem ich aber (11) wieder mit $W_{1\alpha}$ combinire, erhalte ich:

$$\begin{aligned} &q_0y_1 + y_0(a_1q_1 + a_\alpha q_\alpha) + q_\alpha\sum{}' b_{\alpha\lambda}y_\lambda + q_1\sum{}' b_{1\lambda}y_\lambda + y_\alpha\sum{}' b_{\varkappa\alpha}q_\varkappa \\ &\quad + y_1\sum{}' b_{\varkappa 1}y_\varkappa + 2(b_{11} - b_{\alpha\alpha})(q_1y_1 - q_\alpha y_\alpha) + 2(b_{1\alpha} + b_{\alpha 1})(q_1y_\alpha + q_\alpha y_1). \end{aligned}$$

Diese Transformation muss sich aus (10), (11) und $W_{\varkappa\lambda}$ zusammensetzen lassen. Da aber $q_0 y_2$, $q_0 y_3$, . . . $q_0 y_n$ nicht vorkommen, dürfen die Transformationen (11) hierbei nicht benutzt werden. Zudem können wir, nachdem der Fall $n = 2$ gesondert behandelt ist, $n > 2$ voraussetzen; demnach ist für $\beta \gtrless \alpha$ nothwendig $a_\beta = 0$ und damit auch $a_\alpha = 0$. Zudem ist

$$2(b_{11} + b_{\alpha\alpha}) = b_{11} = -b_{\alpha},$$
$$2(b_{1\alpha} + b_{\alpha 1}) = b_{1\alpha} + M = b_{\alpha 1} - M.$$

Aus den ersten Gleichungen folgt $b_{11} = b_{\alpha\alpha} = 0$, und da wir zu (10) die $W_{\varkappa\lambda}$ mit beliebigen Coefficienten hinzufügen können, so dürfen wir in Folge der zweiten Gleichungen allgemein $b_{\varkappa\lambda} = 0$ annehmen. Hiernach müssen zu den $W_{\alpha\beta}$ noch die n infinitesimalen Transformationen hinzugefügt werden:

$$q_0 y_1 - \lambda q_1 y_0, \ldots q_0 y_n - \lambda q_n y_0. \tag{12}$$

Alle diese $\frac{n(n+1)}{2}$ Transformationen bestimmen aber eine Gruppe. Wofern wir also für jeden $(n-1)$-dimensionalen Raum die obigen Voraussetzungen als richtig annehmen können, erhalten wir für jeden n-dimensionalen Raum den Satz:

Die kleinste projective Gruppe, durch deren Transformationen in einem Raume von n Dimensionen alle $(n-1)$-dimensionalen Ebenen in der Umgebung eines festen Punktes in einander übergeführt werden können, enthält $\frac{n(n+1)}{2}$ Parameter und kann bei passender Wahl der Coordinaten durch die infinitesimale Transformation

$$q_\alpha y_\beta - q_\beta y_\alpha, \quad q_0 y_\alpha - \lambda q_\alpha y_0 \qquad \text{für } \alpha, \beta = 1 \ldots n$$

bestimmt werden.

Diese unendlich kleine Transformationen gehen unter Anwendung von Punktcoordinaten über in

$$x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha, \quad x_0 p_\alpha - \lambda x p_0;$$

die Gruppe stellt also die Bewegung eines Raumes von dem constanten Krümmungsmasse λ dar.

Bei dem Nachweise des Satzes, dass die Transformationen (5) in die Form (6) gebracht werden können, ist angenommen, dass dies die einzigen von einander unabhängigen Transformationen seien, durch welche die Ebenen des Punktes $y_0 = 0$ in einander übergeführt werden können. Wir müssen nachweisen, dass das Resultat von dieser speciellen Annahme unabhängig ist. Kämen noch weitere Transformationen von der Form

$$\sum a_{\iota\varkappa} q_\iota y_\varkappa + y_0 \sum e_\varkappa q_\varkappa \tag{13}$$

hinzu, so würden jedenfalls die (6) mit den (13) zusammen eine Gruppe

bilden. Combinirt man aber zwei Transformationen (5), so zeigt die Vergleichung derjenigen Glieder, in denen $y_1, \ldots y_n$ vorkommen, dass sie für sich eine Gruppe bilden. Darauf stützt sich aber der gegebene Beweis.

Hierbei wird nur vorausgesetzt, dass die $a_{\varkappa\lambda}$ in (13) nicht sämmtlich verschwinden. Wären aber alle $a_{\varkappa\lambda} = 0$, so würde man wieder durch Combination alle n Transformationen $y_0 q_1, y_0 q_2, \ldots y_0 q_n$ erhalten, und man dürfte diese in (5) weglassen, also alle $m_{\alpha\beta\varkappa}$ gleich Null voraussetzen.

Damit die Induction vollständig ist, müssen wir unter der für $n-1$ Dimensionen gemachten Voraussetzung jetzt noch nachweisen, dass auch im n-dimensionalen Raume jede projective Gruppe, durch deren Transformationen *alle* reellen Ebenen in einander übergeführt werden, eine Untergruppe enthält, zu deren Bestimmung bei passender Wahl der Coordinaten die Transformationen

$$q_\alpha y_\beta - q_\beta y_\alpha, \quad q_0 y_\alpha - q_\alpha y_0$$

gewählt werden können.

Zu dem Ende haben wir zu untersuchen, welche infinitesimale Transformationen zu den $W_{\alpha\beta} = q_\alpha y_\beta - q_\beta y_\alpha$ hinzugefügt werden können, um eine Gruppe zu erhalten, und welche von diesen Gruppen im Stande sind, alle Ebenen in einander überzuführen. Die Lösung der ersten Aufgabe wird durch folgenden Satz vermittelt:

Kommt für einen n-dimensionalen projectiven Raum zu den Transformationen

$$W_{\alpha\beta} = q_\alpha y_\beta - q_\beta y_\alpha \qquad \text{für } \alpha, \beta = 1 \ldots n$$

eine davon unabhängige Transformation

$$(14) \qquad q_0 \sum a_\varkappa y_\varkappa + y_0 \sum b_\varkappa q_\varkappa + \sum c_{\varkappa\lambda} q_\varkappa y_\lambda$$

hinzu, so lässt sich hieraus nur in dem Falle nicht auf das Hinzutreten weiterer Transformationen schliessen, wenn die Transformation (14) identisch ist mit

$$(15) \qquad q_1 y_1 + q_2 y_2 + \cdots + q_n y_n,$$

oder, was dasselbe ist, wenn die $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ verschwinden und die $c_{\varkappa\lambda}$ für irgend zwei ungleiche Marken α und β den Bedingungen genügen:

$$(16) \qquad c_{\alpha\alpha} - c_{\beta\beta} = 0, \quad c_{\alpha\beta} + c_{\beta\alpha} = 0.$$

Wofern aber die Bedingungen (16) nicht sämmtlich erfüllt sind, so enthält die Gruppe alle Transformationen

$$(17) \qquad q_\alpha y_\alpha - q_\beta y_\beta \quad \text{und} \quad q_\alpha y_\beta.$$

Sind die Coefficienten $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ nicht sämmtlich gleich Null, so treten noch die Transformationen hinzu:

$$(18) \qquad A q_0 y_\alpha - B q_\alpha y_0,$$

wo A und B Constante sind, und zwar diese allein nur, wenn allgemein:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \tag{19}$$

ist; sobald aber diese n Bedingungen nicht sämmtlich erfüllt sind, erhält man in der Gruppe die Transformationen:

$$q_0 y_\alpha \quad \text{und} \quad q_\alpha y_0. \tag{20}$$

Um diesen Satz zu erweisen, combinire man die Transformation (14) mehrmals mit $q_\alpha y_\beta - q_\beta y_\alpha$. Indem man die neuen Transformationen addirt, welche man durch ein- und dreimalige Ausführung dieser Operation erhält, sieht man, dass in der Gruppe auch die infinitesimale Transformation vorkommt:

$$(c_{\alpha\beta} + c_{\beta\alpha})(q_\alpha y_\alpha - q_\beta y_\beta) - (c_{\alpha\alpha} - c_{\beta\beta})(q_\alpha y_\beta + q_\beta y_\alpha).$$

Addirt man aber die Resultate, welche sich durch zwei- und viermalige Ausführung der Operation ergeben, so erhält man:

$$(c_{\alpha\alpha} - c_{\beta\beta})(q_\alpha y_\alpha - q_\beta y_\beta) + (c_{\alpha\beta} + c_{\beta\alpha})(q_\alpha y_\beta + q_\beta y_\alpha).$$

Wenn also nicht für alle ungleichen Marken α, β die Bedingungen (16) erfüllt sind, so muss die Gruppe mindestens für ein Paar die Transformationen $q_\alpha y_\alpha - q_\beta y_\beta$, $q_\alpha y_\beta + q_\beta y_\alpha$ und damit auch $q_\alpha y_\beta$ enthalten. Indem man diese mit $W_{\alpha\gamma}$ und $W_{\beta\gamma}$ combinirt, findet man $q_\alpha y_\gamma$, $q_\gamma y_\alpha$, $q_\beta y_\gamma$, $q_\gamma y_\beta$ für jeden Werth von γ. Durch Combination von $q_\alpha y_\gamma$ und $q_\gamma y_\alpha$ ergiebt $q_\alpha y_\alpha - q_\gamma y_\gamma$ und durch Subtraction von $q_\alpha y_\alpha - q_\gamma y_\gamma$ und $q_\alpha y_\alpha - q_\delta y_\delta$ auch $q_\gamma y_\gamma - q_\delta y_\delta$, deren Combination mit $q_\gamma y_\delta - q_\delta y_\gamma$ zu $q_\gamma y_\delta + q_\delta y_\delta$ und somit zu jedem $q_\gamma y_\delta$ führt. Somit sind alle Transformationen (17) in der Gruppe enthalten, sobald nicht alle Bedingungen (16) erfüllt sind.

Jetzt kann man (14) in der Form:

$$q_0 \sum a_\varkappa y_\varkappa + y_0 \sum b_\varkappa y_\varkappa + \mu(q_1 y_1 + \cdots + q_n y_n) \tag{21}$$

voraussetzen; denn sollte es diese Form nicht haben, so müssten alle Transformationen (17) hinzukommen, durch deren Subtraction von (14) man die Form (21) enthält. Combinirt man aber die (21) zweimal mit $W_{\alpha\beta}$, so erhält man die Transformationen:

$$a_\alpha q_0 y_\beta + b_\alpha y_0 q_\beta - a_\beta q_0 y_\alpha - b_\beta q_\alpha y_0$$

und

$$a_\beta q_0 y_\beta + b_\beta y_0 q_\beta + a_\alpha q_0 y_\alpha + b_\alpha q_\alpha y_0,$$

welche auf (18) hinauskommen, wenn die Bedingungen (19) erfüllt sind, und zugleich $\mu = 0$ ist, während im andern Falle sie sich in $q_0 y_\alpha$ und $q_\alpha y_0$ zerlegen.

Somit können zu den $W_{\alpha\beta}$ hinzukommen entweder

$$q_1 y_1 + q_2 y_2 + \cdots + q_n y_n, \tag{22}$$

oder die sämmtlichen

(17) $$q_\alpha y_\alpha - q_\beta y_\beta \quad \text{und} \quad q_\alpha y_\beta,$$

oder die sämmtlichen:

(18) $$A q_0 y_\alpha - B q_\alpha y_0,$$

oder

(20) $$q_0 y_\alpha \quad \text{und} \quad q_\alpha y_0.$$

Wenn die Transformationen (22) und (17) einzeln oder zusammen hinzukommen, so werden die Ebenen, welche durch einen festen Punkt gehen, nur so transformirt, dass sie stets diesen Punkt enthalten. Dasselbe gilt, wenn für $A = 0$ die Transformationen (18) hinzutreten, während für $B = 0$ die Ebene $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ ungeändert bleibt; ist aber $B : A = \lambda$ und dieses endlich, so bleiben die Tangentialebenen des Gebildes

$$\lambda y_0^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 0$$

in einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit; unserer Forderung wird also nur durch ein positives λ genügt, wo es gestattet ist, $\lambda = 1$ zu wählen. Die Transformationen (20) setzen sich unmittelbar zu $q_0 y_\alpha - q_\alpha y_0$ zusammen. Das gleichzeitige Vorkommen von (22) oder (17) mit (18) zieht für ein nicht verschwindendes B die Transformationen (20) nach sich, während für $B = 0$ wiederum die Ebene $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ sich nicht ändert. Damit also in einem n-dimensionalen Raume durch eine projective Gruppe eine Ebene in jede andere übergeführt werden kann, muss sie die Transformationen

$$q_\alpha y_\beta - q_\beta y_\alpha \quad \text{und} \quad q_0 y_\alpha - q_\alpha y_0$$

enthalten. Unsere Voraussetzung gilt also allgemein, sobald sie für $n = 1$ bewiesen ist, und für diesen Fall leuchtet die Richtigkeit unmittelbar ein.

Zu den Grundformeln der analytischen Geometrie.

Von

O. Stolz in Innsbruck.

Die Note des Herrn v. Lilienthal zur Hesse'schen Normalform der Gleichung einer Ebene im 42. Bande dieser Zeitschrift S. 497 veranlasst mich zu nachstehender Bemerkung.

Die von ihm gegebene Regel zur Unterscheidung der beiden Seiten einer durch einen Punkt getheilten Geraden habe auch ich, wenigstens für die Geraden einer Ebene, bereits erwähnt. Ich definire nämlich in meinen Vorlesungen über allgemeine Arithmetik II, S. 37 die positive Richtung einer nicht zur Ordinatenaxe parallelen Geraden durch den Uebergang vom Punkte $M(\xi, \eta)$ zu $M'(\xi', \eta')$ wenn $\xi' - \xi > 0$ ist.

Ich halte es jedoch nicht für zweckmässig, ein für alle Male diese oder eine ähnliche Festsetzung zu treffen, da eine solche unter Umständen unbequem werden könnte. Wenn wir z. B. die positive Richtung einer jeden Geraden in der xy-Ebene nach v. Lilienthal von der negativen Seite der Abscissenaxe auf die positive treten lassen, so haben wir damit die Polarcoordinaten so bestimmt, dass die Anomalie φ zwischen 0 und 180^0 bleibt, der Radiusvector $r = OM$ jedoch negativ ist für die Punkte aller Halbstrahlen durch O, die auf der negativen Seite der x-Axe liegen. Diese Annahme über r dürfte schwerlich überall Eingang finden, erscheint es doch zunächst natürlicher, auf jedem Halbstrahl durch O positive Werthe von r zuzulassen, d. h. über die positive Richtung in der Geraden durch O nichts festzusetzen. Damit soll aber nicht gesagt sein, dass die Festlegung dieser Richtungen für besondere Untersuchungen nicht practisch sein könne.

Hinsichtlich der Grundformeln der analytischen Geometrie scheint mir jedoch die möglichste, mit ihrer Eindeutigkeit verträgliche Allgemeinheit am Platze zu sein. Sie besteht darin, die Richtung der darin vorkommenden Geraden nicht weiter zu beschränken, als dass, wenn in einer Ebene der positive Drehungssinn gegeben ist, die positive Normale für diese Ebene, sowie die positive Richtung in derjenigen

Geraden dieser Ebene, welche auf einer in ihr liegenden Richtung senkrecht steht, auf bestimmte Weise angenommen werden. In dieser Art habe ich einige Formeln der analytischen Geometrie des Raumes in den Monatsheften für Math. u. Phys. I. B., S. 433 dargestellt. Ich schreibe die Gleichung einer Ebene, deren positive Normale mit n bezeichnet wird, in der Gestalt:

$$x \cos \widehat{xn} + y \cos \widehat{yn} + z \cos \widehat{zn} - OR = 0$$

an, worin OR, das Perpendikel vom Anfangspunkte O auf die Ebene, sein Zeichen gemäss der Richtung n bekommt.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass schon Gauss in Art. 54, 137 der Theoria motus corp. coel. (1809) empfiehlt, die geometrischen Grössen so zu definiren, dass nicht für jeden der etwa möglichen Fälle eine eigene Figur zu betrachten ist und dies soweit, als er es dort für nöthig hält, durchführt.

Innsbruck, im Juli 1893.

On a Geometrical Proof of Jacobi's ϑ-Formula.

By

H. F. Baker in Cambridge.

The object of the following note is to deduce from Jacobi's ϑ-formula a geometrical property of the plane cubic curve. The establishment of this result by pure synthetical Geometry appears to be difficult, but would be an interesting extension of what is already well known, and would moreover, by a reversal of the analysis here given, furnish a new proof of Jacobi's formula.

Weierstrass has simplified Jacobi's formula, substituting a formula ("die dreigliedrige Gleichung" s. a. Kronecker, Crelle 102, S. 263 etc.) in which, instead of the *four* functions that occur in Jacobi's formula, there occurs only his, *one*, σ-function.

And from Weierstrass' formula Jacobi's is deducible, or conversely. In the following we make a further simplification, proving in fact Jacobi's and Weierstrass' formulae as properties of a doubly-periodic function of only one argument. And geometrical applications, similar to that here made for the plane cubic, can therefore also be made for every elliptic curve.

§ 1.

What is to be proved is as follows:

(α) The function, wherein u_1, u_2, u_3, u_4 are arbitrary arguments and $\varkappa$ is for shortness written for $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$,

$$g(u) = \frac{\sigma(u+u_1)\,\sigma(u+u_2)\,\sigma(u+u_3)\,\sigma(u+u_4)}{\sigma\left(2u+\frac{1}{2}\varkappa\right)}$$

is a doubly-periodic function of u, having the same periods, $2\omega, 2\omega'$ as $\wp(u)$, such that

$$\text{(I)}\qquad g(u) + g(u+\omega) + g(u+\omega') + g(u+\omega+\omega')$$
$$= -2\sigma\left(\frac{u_2+u_3-u_1-u_4}{2}\right)\sigma\left(\frac{u_3+u_1-u_2-u_4}{2}\right)\sigma\left(\frac{u_1+u_2-u_3-u_4}{2}\right).$$

Moreover if S denote the substitution (so that $S^2 = 1$)

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

and U_1, U_2, U_3, U_4 denote the arguments given by

$$(U_1, U_2, U_3, U_4) = S(u_1, u_2, u_3, u_4),$$

and $G(u)$ denote what $g(u)$ becomes when, therein, U_1, U_2, U_3, U_4 are written for u_1, u_2, u_3, u_4 respectively, then also*)

$$[-G(u), \ -G(u+\omega), \ -G(u+\omega'), \ -G(u+\omega+\omega')]$$
$$= S[g(u), \ g(u+\omega), \ g(u+\omega'), \ g(u+\omega+\omega')].$$

These results may be deduced from the following two results (II) and (III):

$$\text{(II)} \quad -G(u) = \tfrac{1}{2}[-g(u) + g(u+\omega) + g(u+\omega') + g(u+\omega+\omega')]$$

which is easily seen to become Jacobi's formula when u is put equal to 0, namely the formula

$$2\pi\vartheta\left(U; \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \pi\vartheta\left(u; \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) + \pi\vartheta\left(u; 1, \tfrac{1}{2}\right) + \pi\vartheta\left(u; \tfrac{1}{2}, 1\right) - \pi\vartheta(u; 1, 1)$$

and

$$\text{(III)} \quad \begin{aligned} g(u) - G(u) &= -\sigma(U_4 - u_1)\,\sigma(U_4 - u_2)\,\sigma(U_4 - u_3) \\ &= g(u+\omega) - G(u+\omega) = g(u+\omega') - G(u+\omega') \\ &= g(u+\omega+\omega') - G(u+\omega+\omega') \end{aligned}$$

which, by putting $u = 0$, is Weierstrass' "dreigliedrige Gleichung".

(β) If a conic be drawn to touch a plane cubic curve at a point O, meeting the cubic again in P, Q, R, S, and P_1, Q_1, R_1, S_1, be the "corresponding" points**) of the first kind, to P, Q, R, S respectively, those of the second and third kinds being respectively P_2, Q_2, R_2, S_2, and P_3, Q_3, R_3, S_3, then three other conics can be drawn to touch the cubic at O and to pass respectively through P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, R_2, S_2 and P_3, Q_3, R_3, S_3. Also if any straight line through O meet these four conics in T, T_1, T_2, T_3 respectively, and meet the polar conic of O in K,

$$\text{(IV)} \qquad \frac{4}{OK} = \frac{1}{OT} + \frac{1}{OT_1} + \frac{1}{OT_2} + \frac{1}{OT_3}.$$

*) V. Briot et Bouquet Theorie des Fonctions Elliptiques. Paris 1875. S. 497.

**) See Salmon's "Higher plane Curves".

Also if OP, OQ, OR, OS meet the cubic again in P', Q', R', S', a conic can be drawn through P', Q', R', S' to touch the cubic at O, and if OK meet this conic in T',

$$\text{(V)} \qquad \frac{2}{OK} = \frac{1}{OT} + \frac{1}{OT'}.$$

This result (V) is immediately deducible geometrically from a known property of the polar conic. Equation (IV) is the geometrical result referred to, and is the direct interpretation of the equations (III).

§ 2.

To establish the equations (I), (II) and (III) it is sufficient to establish (I) and (III). That $g(u)$ has the periods 2ω, $2\omega'$ is immediately obvious from the properties of the σ-function. From this periodicity of $g(u)$ it follows that the function

$$\varphi(u) = g(u) + g(u+\omega) + g(u+\omega') + g(u+\omega+\omega')$$

has the periods ω, ω'. But since $g(u)$, $g(u+\omega)$ etc. have, each of them, the four simple infinities

$$-\tfrac{1}{4}x, \quad -\tfrac{1}{4}x+\omega, \quad -\tfrac{1}{4}x+\omega', \quad -\tfrac{1}{4}x+\omega+\omega',$$

these are also the infinities of $\varphi(u)$. So that $\varphi(u)$ has only one infinity within its parallelogram of periods and is therefore a constant. Let the value of this constant be for the present denoted by f.

It follows in the same way that

$$\Phi(u) = -[G(u) + G(u+\omega) + G(u+\omega') + G(u+\omega+\omega')]$$

is also a constant, $= F$, say.

Then, putting $u = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\omega$,

$$f = g\left(-\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2}\omega\right) + g\left(-\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2}\omega\right) + g\left(-\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2}\omega + \omega'\right) + g\left(-\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2}\omega + \omega'\right)$$

is immediately seen, because $u_1 - \frac{1}{4}x = \frac{1}{4}x - U_1$ etc., to be equal to

$$-G\left(-\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2}\omega\right) - G\left(-\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2}\omega\right) - G\left(-\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2}\omega - \omega'\right) - G\left(-\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2}\omega + \omega'\right)$$

$$= -G(u+\omega) - G(u) - G(u+\omega-\omega') - G(u-\omega'),$$

which, by the periodicity of $G(u)$, is equal to F, so that

$$f = F.$$

Considering next the doubly-periodic function $g(u) - G(u)$, we immediately find that its residue at the infinity $u = -\frac{1}{4}\varkappa$ is

$$\tfrac{1}{2}\sigma\left(u_1 - \tfrac{1}{4}\varkappa\right)\sigma\left(u_2 - \tfrac{1}{4}\varkappa\right)\sigma\left(u_3 - \tfrac{1}{4}\varkappa\right)\sigma\left(u_4 - \tfrac{1}{4}\varkappa\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}\sigma\left(U_1 - \tfrac{1}{4}\varkappa\right)\sigma\left(U_2 - \tfrac{1}{4}\varkappa\right)\sigma\left(U_3 - \tfrac{1}{4}\varkappa\right)\sigma\left(U_4 - \tfrac{1}{4}\varkappa\right)$$

or zero, and similarly that its residue is zero at each of its other three infinities. Thus

$g(u) - G(u) =$ constant $=$, therefore, $g(u + \omega) - G(u + \omega)$
$= g(u + \omega') - G(u + \omega') = g(u + \omega + \omega') - G(u + \omega + \omega')$,
$=$, therefore, $\frac{1}{4}[g(u) - G(u) + g(u + \omega) - G(u + \omega) + g(u + \omega')$
$- G(u + \omega') + g(u + \omega + \omega') - G(u + \omega + \omega')]$
$= \frac{1}{4}(f + F) = \frac{1}{2}f$.

We are thence able to find a value for f. For if in $g(u) - G(u)$ we put $-U_4$ for u, $G(u)$ vanishes and $g(u)$ becomes $\sigma(u_1 - U_4)\,\sigma(u_2 - U_4)\,\sigma(u_3 - U_4)$. Hence our Proposition (α) is completely proved.

Passing now to the proof of the proposition (β) and recalling the ordinary elliptic representation of the points of a plane cubic curve, the arguments of the points P, Q, R, S may be taken as $-u_1$, $-u_2$, $-u_3$, $-u_4$, and the argument of the point O as $\frac{1}{2}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)$.

And using axes for which the cubic takes the form

$$Px^3 + Qx^2y + Rxy^2 + Sy^3 + Ax^2 + 2Hxy + By^2 + y = 0$$

the origin being at the point O and the axis of x the tangent at this point, the polar conic of O will be of the form

$$S = Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2y = 0,$$

and the four conics $PQRSOO$, $P_1Q_1R_1S_1OO$, $P_2Q_2R_2S_2OO$, $P_3Q_3R_3S_3OO$, whose existence is immediately obvious either by Sylvester's theory of residual points, or because the elliptic arguments of the points P_1Q_1 etc. are known, will be of the form

$$C = ax^2 + 2hxy + by^2 - y = 0,$$
$$C_1 = a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 - y = 0, \text{ etc.}$$

Then a consideration of the zeros and infinities of the function $g(u)$ shews that, on the cubic,

$$\text{(VI)} \qquad g(u) = m\frac{C}{S}, \qquad g(u + \omega) = m_1\frac{C_1}{S} \text{ etc.}$$

where m, m_1 etc. are constants.

The value of the constant m may be found as follows:

The conic $P'Q'R'S'OO$ being defined by the equation (V), it follows if its equation be written

$$C' = a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 - y = 0$$

that

$$C + C' + S = 0 \tag{VII}$$

identically, and therefore at the point P', for which $C' = 0$, that $\frac{C}{S} = -1$.

But at P',

$$u = -U_4 \quad \text{and} \quad g(u) = \sigma(u_1 - U_4)\,\sigma(u_2 - U_4)\,\sigma(u_3 - U_4).$$

Therefore equations (VI) give

$$m = \sigma(U_4 - u_1)\,\sigma(U_4 - u_2)\,\sigma(U_4 - u_3).$$

And we see now that equations (V) and (VII) are the equivalent of equation (III), and that the constant $m_1 = m$.

Therefore the equation (I) gives

$$C + C_1 + C_2 + C_3 = -2S$$

and therefore

$$a + a_1 + a_2 + a_3 = -2A \quad \text{etc.}$$

But since

$$\frac{1}{OK} = -\frac{1}{2}\frac{A\cos^2\Theta + 2H\cos\Theta\sin\Theta + B\sin^2\Theta}{\sin\Theta},$$

$$\frac{1}{OT} = \frac{a\cos^2\Theta + 2h\cos\Theta\sin\Theta + b\sin^2\Theta}{\sin\Theta} \quad \text{etc.},$$

(where Θ gives the inclination of OK)

these are equivalent to equation (IV), which is therefore proved.

Druckfehler-Berichtigung zu dem Aufsatze des Verfassers in Bd. 42 (pag. 601) dieser Zeitschrift.

Im Kopf- und Columnentitel ist „H. F. Baker" statt „H. J. Baker" zu setzen; p. 604, Z. 10 v. o., ist $+1$ zu streichen.

Einige Sätze über projective Spiegelung.

Von

Maxime Böcher in Cambridge (Mass.).

In den Untersuchungen von Herrn H. Wiener (vergl. Sächsische Berichte 1890—91) ist erneut hervorgetreten, mit welchem Vortheil man die involutorischen Transformationen (allgemeine Spiegelungen) als erzeugende Elemente verschiedener Transformationsgruppen gebrauchen kann. In der gegenwärtigen Note beschränke ich mich auf Collineationen, zerlege dieselben aber nicht, wie es Herr Wiener thut, in lauter Spiegelungen, sondern vielmehr in Spiegelungen und Transformationen der „Hauptgruppe", um die Bezeichnungsweise von Herrn Klein (Erlanger Programm) zu gebrauchen.*)

Zu diesem Zwecke will ich zunächst vier Sätze über projective Spiegelungen vorausschicken, von denen zwar die drei ersten fast trivial sind, der letzte aber auch an und für sich von Interesse sein dürfte.

I. *In der Ebene kann man, und zwar auf zwei verschiedene Weisen, jedes Punktepaar A, B in jedes andere Punktepaar C, D durch eine projective Spiegelung an Punkt und Gerade überführen.*

Dieser Satz folgt sofort aus den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks.

II. *Sind K und K' zwei Kegelschnitte, welche in verschiedenen Ebenen liegen aber zwei Punkte gemein haben, so kann man, und zwar auf zwei Weisen, K in K' durch eine projective Spiegelung an Punkt und Ebene überführen.*

Hierzu hat man nämlich als Ordnungspunkt die Spitze eines der zwei Kegel zweiten Grades zu wählen, welche durch K und K' hindurchgehen, und als Ordnungsebene diejenige Ebene, welche durch die Spitze des anderen Kegels und die Schnittlinie der Ebenen von K und K' hindurchgeht.

III. *Sind K und K' irgend zwei Kegelschnitte, so kann man K in K' auf unendlich viele Weisen durch die Aufeinanderfolge zweier projectiven Spiegelungen an Punkt und Ebene überführen.*

*) Man bemerke, dass die zu entwickelnden Sätze folgendem bekannten Satze genau analog sind:

Jede Kreisverwandtschaft lässt sich in eine Inversion und eine Transformation der Hauptgruppe zerlegen.

Man wähle nämlich irgend einen dritten Kegelschnitt $\overline{K}$, welcher mit K und zugleich mit K' zwei Punkte gemein hat, aber weder mit K noch mit K' in einerlei Ebene liegt. Sodann führe man der Reihe nach K in $\overline{K}$, $\overline{K}$ in K' durch Spiegelung an Punkt und Ebene über.

IV. *Sind K und K' zwei Kegelschnitte, welche nicht in einerlei Ebene liegen, so kann man, und zwar auf vier Weisen, K in K' durch eine projective Spiegelung an zwei Geraden überführen.*

Diesen Satz beweisen wir, indem wir die Construction für die zwei Ordnungsgeraden angeben.

Bezeichnen wir die Ebenen von K, K' durch E, E' und die Schnittlinie dieser Ebenen durch l. Seien ferner die Schnittpunkte von l mit K bezw. K' durch A, B bezw. A', B' bezeichnet. Dann giebt es zwei Involutionen auf dieser Geraden, welche das Punktepaar A, B in das Punktepaar A', B' überführen. Die Doppelpunkte dieser Involutionen mögen durch P, Q und P_1, Q_1 bezeichnet werden.

Construiren wir jetzt die Pole O, O' von l in Bezug auf K, K' und legen wir durch $OO'P$ (bezw. $OO'P_1$) eine Ebene, welche die Kegelschnitte K, K' in vier Punkten schneidet. Fasst man diese Punkte auf als Ecke eines vollständigen Vierecks, so wird P (bezw. P_1) die eine Nebenecke sein, während die zwei anderen, welche auf der Geraden OO' liegen, durch M, N (bezw. M_1, N_1) bezeichnet werden mögen. Führen wir ferner eine ebensolche Viereckskonstruction in der Ebene $OO'Q$ (bezw. $OO'Q_1$) aus, und bezeichnen die so erhaltenen, auf OO' liegenden, Punkte durch $\overline{M}$, $\overline{N}$ (bezw. $\overline{M}_1$, $\overline{N}_1$). *Dann werden*, und dies ist der Kern unseres Gedankenganges, *die Punkte M, N (bezw. M_1, N_1) mit den Punkten $\overline{M}$, $\overline{N}$ (bezw. $\overline{M}_1$, $\overline{N}_1$) zusammenfallen.* Um die Richtigkeit dieser Behauptung am bequemsten einzusehen, wollen wir K' durch eine Collineation in den Kugelkreis überführen, wodurch die ganze Figur vom metrischen Standpunkte aus viel einfacher wird. Es wird nämlich dann O der Mittelpunkt von K sein, und die Geraden OP, OQ (bezw. OP_1, OQ_1) werden, da sie offenbar symmetrisch in Bezug auf die Hauptaxen von K liegen, gleich lange Durchmesser sein, deren Länge wir mit a (bezw. a_1) bezeichnen wollen. Auf der Geraden OO', welche senkrecht auf der Ebene E steht, werden wir dann folgende Längen aufzutragen haben:

$$OM = O\overline{M} = ON = O\overline{N} = a\sqrt{-1}$$

(bezw. $OM_1 = O\overline{M}_1 = ON_1 = O\overline{N}_1 = a_1\sqrt{-1}$), w. z. b. w.

Man hat also als Paar von Ordnungsgeraden zu wählen:
MP, NQ oder MQ, NP oder M_1P_1, N_1Q_1 oder M_1Q_1, N_1P_1.
In der That wird jede von diesen vier Spiegelungen sechs Punkte von K in Punkte von K' überführen, und folglich auch K selber in K'.

Bedenken wir nun, dass die Transformationen der Hauptgruppe einfach diejenigen Collineationen sind, welche die Kreispunkte bezw. den Kugelkreis in sich selbst transformiren, so können wir aus den obigen Sätzen I, III, IV unmittelbar folgende ableiten:

V. *Eine ebene Collineation kann man auf zwei Weisen in eine projective Spiegelung an Punkt und Gerade und eine Transformation der Hauptgruppe zerlegen.*

Sofern wir uns auf reelle Collineationen beschränken, werden Ordnungspunkt und Ordnungsgerade beider Spiegelungen reell sein. Die zwei Zerlegungen unterscheiden sich aber, wie leicht zu sehen, dadurch, dass bei der einen die Transformation der Hauptgruppe Umlegung der Winkel bewirkt, bei der anderen nicht.

VI. *Eine räumliche Collineation lässt sich auf unendlich viele Weisen in zwei Spiegelungen an Punkt und Ebene und eine Transformation der Hauptgruppe zerlegen.*

Hier kann man, wenn die Collineation eine reelle ist, unendlich viele Zerlegungen finden, bei denen die Ordnungselemente der Spiegelungen reell sind.

VII. *Eine räumliche Collineation lässt sich auf vier Weisen in eine Spiegelung an zwei Geraden und eine Transformation der Hauptgruppe zerlegen.*

Bei reeller Collineation werden zwei von diesen Spiegelungen reelle Ordnungsgeraden haben, die anderen zwei conjugirt imaginäre. In der That sieht man sofort, dass wenn, wie es jetzt der Fall ist, K und K' beide nulltheilige Kegelschnitte sind, das eine Punktepaar, sagen wir P, Q, reell sein wird, während das andere, P_1, Q_1, aus conjugirt imaginären Punkten besteht. Ferner findet man, dass die Punkte M, N reell sind, die Punkte M_1, N_1 aber conjugirt imaginär. Es werden also die Ordnungsgeraden MP, NQ und MQ, NP reell sein, die anderen aber paarweise conjugirt imaginär.

Bei allen vier Zerlegungen werden die Transformationen der Hauptgruppe gleichartig sein. In der That weiss man, dass alle Spiegelungen an zwei Geraden, seien diese Geraden reell oder conjugirt imaginär, zu denjenigen Collineationen gehören, bei welchen der Drehsinn nicht geändert wird.

Schliesslich sei bemerkt, dass die Sätze dieser Note nur „im allgemeinen" gelten. Die Ausnahmen aber aufzuzählen und zu discutiren wollen wir an dieser Stelle unterlassen.

Göttingen, Juli 1893.

Das Grundproblem der Flächen- und Rauminhaltslehre.

Von

Otto Rausenberger in Frankfurt a./M.

Die Lehre vom Flächeninhalte ebener Figuren hat den Satz zur Grundlage: *Wenn zwei endliche ebene Figuren durch eine Zerlegung in entsprechend congruente Figuren als gleich erwiesen sind, so kann sich nicht durch eine andere Zerlegung ihre Ungleichheit ergeben;* oder was auf dasselbe hinausläuft: *Eine endliche ebene Figur kann niemals so in Theile zerlegt werden, dass sich durch eine andere Zusammensetzung derselben eine Figur ergiebt, von der die ursprüngliche nur ein Theil ist.* Ist dieser Satz als Axiom auszusprechen, oder lässt er sich beweisen, ohne andere Grundvoraussetzungen zu Hilfe zu nehmen als diejenigen, die bei Operationen mit Strecken und Winkeln gemacht werden müssen? Der *directe* Nachweis durch Zerlegungen führt auf eigenthümliche Schwierigkeiten, weshalb ich selbst früher vermuthete, dass ein Axiom anzunehmen sei. Am Eingange seiner Abhandlung *„Ueber endlich-gleiche Flächen"*, Math. Ann. Bd. 42, p. 297 ff. bezeichnet Herr Réthy diesen Satz als eine Folgerung aus den Grundvorstellungen über Gleichheit und Ungleichheit der Flächen, d. h. eben als Axiom. Auch die Untersuchungen von Herrn Dobriner, Math. Ann. Bd. 42, p. 275 ff. und 285 ff., liefern keinen Beweis des Fundamentalsatzes. Eine erneute Beschäftigung mit dem Gegenstande führte mich jedoch zu einem ebenso einfachen als strengen Beweise des Satzes bei geradlinigen Figuren. Das Resultat ist vom Parallelenaxiom unabhängig, der Beweis gestaltet sich jedoch je nach Annahme oder Verwerfung desselben verschieden. Im letzteren Falle sind nur einfache Betrachtungen über Winkel nöthig; im ersteren muss die Aehnlichkeitslehre und damit das Operiren mit irrationalen Streckengrössen als sicher begründet angenommen werden. *)

*) Die im ganzen sehr strenge Behandlungsweise der Aehnlichkeitslehre bei Euklid kann leicht von den ihr anhaftenden Mängeln befreit und namentlich auch von der Flächeninhaltslehre unabhängig gemacht werden.

Wir sprechen in der Folge bei Annahme des Parallelenaxioms vom *Flächenwerthe* einer endlich begrenzten, ebenen geradlinigen Figur als einer Function ihrer bestimmenden Stücke (Strecken oder Winkel); bei Zugrundelegung einer für die ganze Untersuchung festzuhaltenden Streckeneinheit hat er für jede Figur einen festen Zahlenwerth.*) Bei dem Dreieck soll das halbe Product der Längen von Basis und Höhe der Flächenwerth genannt werden; sein Werth bleibt derselbe, welche Seite man auch zur Basis wählt. Der Flächenwerth lässt sich in Ausdrücke umrechnen, in denen nur Seiten und Winkel des Dreiecks auftreten.

Fallen bei den Dreiecken ABC und ACD die Seiten BC und CD in eine Gerade, so ist $ABC + ACD = ABD$. Hierbei kann BC oder CD auch in negativem Sinne genommen werden, wenn nur gleichzeitig ABC und ACD der negative Sinn beigelegt wird.

Haben die Punkte A, B, C, D eine beliebige Lage in der Ebene, so ist

$$(I) \qquad ABD + BCD = \pm (ABC + ADC);$$

man muss hierbei dem Flächenwerthe zweier zusammenstossender Dreiecke gleiches oder entgegengesetztes Zeichen beilegen, jenachdem sie auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite der gemeinsamen Geraden liegen. (Bezeichnet O den Schnittpunkt von AC und BD, so ist $ABD = ABO + AOD$ u. s. w).

Den Flächenwerth eines beliebigen geradlinigen Linienzuges $ABCD \ldots A$ definiren wir analog der Definition von Meister u. A. für den Flächeninhalt. Wir verbinden die Punkte A, B, C, D mit einem Punkt O derselben Ebene; die eine Seite des Linienzuges betrachten wir als die positive, die andere als die negative und nehmen die Flächenwerthe der Dreiecke OAB u. s. w. als positiv oder negativ an, jenachdem sie der einen oder der anderen Seite anliegen; bei einem Polygon im gewöhnlichen Sinne soll die innere Seite die positive sein. Unter dem Flächenwerthe von $ABCD \ldots A$ verstehen wir dann die algebraische Summe der Flächenwerthe OAB, OBC u. s. w. Dass der Flächenwerth von der Lage des Punktes O unabhängig ist, wird wie der entsprechende Inhaltssatz unter Benutzung von (I) dargethan. Beim Dreieck unterscheidet sich der so erhaltene Flächenwerth nicht von dem früher definirten. Wird ein Polygon durch Gerade in beliebig viele Polygone zerlegt, so gilt der Satz: (II) *Der Flächenwerth des Ganzen ist gleich der Summe der Flächenwerthe seiner Theile.* Legen wir nämlich von O aus die Dreiecke an sämmtliche Theilpolygone an und summiren über die Flächenwerthe aller, so erscheinen je zwei

*) Wir bezeichnen ihn durch die Buchstaben an den Eckpunkten der Figur.

derselben Trennungslinie anliegende Dreiecke mit entgegengesetzt-gleichem Flächenwerthe.

(III) *Der Flächenwerth eines Polygons, dessen Umgrenzung sich nicht selbst durchschneidet, ist eine positive, von Null verschiedene Grösse,* wie die Zerlegung in Dreiecke zeigt.

Man schreibt zwei Polygonen gleichen *Flächeninhalt* zu, wenn sie sich in Theilpolygone zerlegen lassen, die paarweise congruent sind. Ein Polygon heisst grösser als ein anderes, wenn ein Theil seiner Bestandtheile ausreicht, um das zweite zusammenzusetzen. Polygone von gleichem Flächeninhalt haben nach (II) auch gleichen Flächenwerth; ein Polygon, das ein anderes an Flächeninhalt übertrifft, hat nach (II) und (III) auch grösseren Flächenwerth. Hieraus fliesst der Hauptsatz:

(IV) *Zwei Polygone, die durch eine Zerlegung als flächengleich nachgewiesen sind, können nicht durch eine andere Zerlegung als ungleich erwiesen werden.*

Nachdem die Lehre vom Flächeninhalte durch (IV) eine feste Grundlage erhalten hat, lassen sich die gewöhnlichen Entwicklungen ohne Einwand ausführen. Es ergiebt sich auch der Satz: (V) *Polygone A und B von gleichem Flächenwerthe lassen sich durch Zerlegung in eine endliche Zahl congruenter Theile als flächengleich nachweisen.* A und B können nämlich durch elementare Constructionen, denen entsprechende Zerlegungen zur Seite stehen, in Quadrate A_1 und B_1 verwandelt werden, die von gleichem Flächenwerthe und in Folge dessen congruent sind. Legt man diese unter Beibehaltung ihrer Zerlegungen aufeinander und denkt sich die Zerschneidungen von A_1 und B_1 gleichzeitig ausgeführt, so erhält man eine Zerlegung in eine endliche Zahl von Theilen, die A in B überführt. Dass der Satz: *„Gleiches von Gleichem subtrahiert giebt Gleiches"* auch für Polygone gilt, ist jetzt unmittelbar zu erkennen. — Bei der gewöhnlichen Berechnung des Flächeninhalts ergiebt sich seine Identität mit dem Flächenwerth.

Gilt das Parallelenaxiom nicht, so ist der Flächeninhalt von der Winkelsumme σ des Polygons abhängig, wodurch die Untersuchung sehr vereinfacht wird. Es genügt, dieselbe für *sphärische Polygone* (Ecken) durchzuführen; für die beiden Gattungen der nicht-Euklidischen Geometrie gestaltet sie sich natürlich ebenso. Wir bezeichnen mit dem *„sphärischen Excess"* des sphärischen n-Ecks die hier positive Grösse $\sigma - (2n - 4)R$; wir beweisen, dass zwei sphärische Polygone mit den sphärischen Excessen ε_1 und ε_2 aneinandergesetzt ein Polygon mit dem Excess $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ liefern. Zerlegt man daher ein sphärisches Polygon in beliebig viele andere, so ist der Excess des Ganzen gleich der Summe der Excesse der einzelnen Theile. Negative Ex-

tragungen sind zulässig. Nun kann wie aus (II) weitergeschlossen werden.

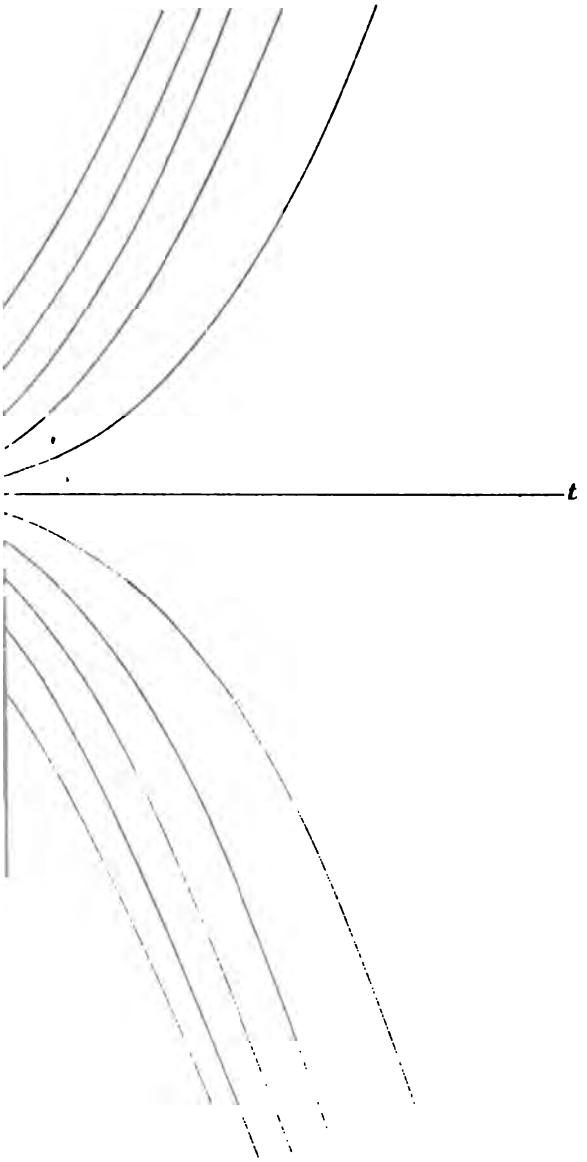
Handelt es sich um krummlinig begrenzte Ebenentheile, so lässt sich der Flächenwerth durch ein bestimmtes Integral ausdrücken; die Untersuchungen verlaufen wenigstens bei Annahme des Parallelenaxioms ganz analog. Auch könnte in anderer Weise ein Grenzübergang angewandt werden.

Auch für den Rauminhalt lassen sich entsprechende Untersuchungen anstellen, die sich unter Voraussetzung des Parallelenaxioms sehr einfach gestalten. Als *Raumwerth* eines Tetraeders kann der dritte Theil des Productes aus dem Flächenwerthe der Grundfläche und der Höhe definirt werden; drückt man diese Grösse als Function der Kanten aus, so ergiebt sich ihre Unabhängigkeit von der Wahl der Grundfläche. Die Definition kann auf mehrseitige Pyramiden ausgedehnt werden. Hierauf wird der Raumwerth eines Polyeders analog wie der Flächenwerth eines Polygons nach Möbius'scher Weise definirt, wie überhaupt die weiteren Untersuchungen einen leicht zu überblickenden Verlauf nehmen. Satz V lässt sich nicht auf den Raum übertragen.

Frankfurt a./M., im Mai 1893.

Druckfehler-Berichtigungen zum 43. Bande:

Seite 197 Zeile 4 v. u. ist $(\alpha_{ix} = \alpha_{xi})$ zu streichen.
„ 223 „ 10 v. o. setze $1 - x \cdot 2 - x \cdots$, statt $1 - x$, $2 - x \cdots$.
„ 223 „ 11 v. o. setze n statt m.
„ 223 „ 9 v. u. ergänze: $= 0$.
„ 223 „ 7 v. u. setze w_i; statt w_x;
„ 223 „ 3 v. u. setze a_1 statt α_1.
„ 224 „ 4 v. o. setze e^{α_x} statt e^{0_x}.
„ 224 „ 9 v. o. setze ; statt :


t

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

20M-2-60-93574

PHYSICS & MATH - STAT.

OCT 1 0 1967

AUG 1 7 1972

MAY 1 0 1973

MATHEMATICS LIBRARY
STORAGE AREA
510
M4
v.43
no.1
1977
DATE DUE
NAME
Isaac Harari
E. Smith
Vladimir Lifschitz
W. Wolovich
3 6105
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA
94305